



7. 已知  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 若  $x=t$  为函数  $f(x)=\frac{x-1}{e^x-1}(x<0)$  的极值点, 则  $f([t])=$   
 ( )

- A.  $\frac{2e}{e-1}$                       B.  $\frac{3e^2}{e^2-1}$                       C.  $\frac{4e^3}{e^3-1}$                       D.  $\frac{5e^4}{e^4-1}$

8. 设  $O$  为原点,  $F_1, F_2$  为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$  的两个焦点, 点  $P$  在  $C$  上且满足  $|OP| = \frac{3}{2}a$ ,  $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{3}{7}$ , 则该双曲线的渐近线方程为 ( )

- A.  $\sqrt{2}x \pm y = 0$                       B.  $x \pm \sqrt{2}y = 0$                       C.  $\sqrt{3}x \pm y = 0$                       D.  $x \pm \sqrt{3}y = 0$

二、选择题: 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是 ( )

- A. 数据 7, 5, 3, 10, 2 的第 40 百分位数是 3  
 B. 已知随机变量  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma$  越小, 表示随机变量  $X$  分布越集中  
 C. 已知一组数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的方差为 3, 则  $x_1-1, x_2-1, x_3-1, \dots, x_n-1$  的方差为 3  
 D. 根据一组样本数据的散点图判断出两个变量线性相关, 由最小二乘法求得其回归直线方程为  $\hat{y} = 0.3x - m$ , 若其中一个散点为  $(m, -0.28)$ , 则  $m = 4$

10. 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $\frac{2}{\sqrt{3}}a \cdot \sin^2 \frac{A+C}{2} = b \cdot \sin A$ , 下列结论正确的是 ( )

- A.  $B = \frac{\pi}{3}$   
 B. 若  $a = 4, b = 5$ , 则  $\triangle ABC$  有两解  
 C. 当  $a - c = \frac{\sqrt{3}}{3}b$  时,  $\triangle ABC$  为直角三角形  
 D. 若  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 则  $\cos A + \cos C$  的取值范围是  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$

11. 在棱长为 1 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 已知  $E, F$  分别为线段  $B_1C, D_1C_1$  的中点, 点  $P$  满足

$$\vec{DP} = \lambda \vec{DD_1} + \mu \vec{DB}, \lambda \in [0, 1], \mu \in [0, 1], \text{ 则 ( )}$$

- A. 当  $\lambda + \mu = 1$  时, 三棱锥  $D - PEF$  的体积为定值

B. 当  $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ , 四棱锥  $P-ABCD$  的外接球的表面积是  $\frac{9\pi}{4}$

C.  $\triangle PEF$  周长的最小值为  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$

D. 若  $AP = \frac{\sqrt{6}}{2}$ , 则点  $P$  的轨迹长为  $\frac{\pi}{2}$

## 第 II 卷

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知圆台的上底面半径为 1，下底面半径为 5，侧面积为  $30\pi$ ，则圆台的高为\_\_\_\_\_.

13. 甲、乙、丙 3 人站到共有 6 级的台阶上，若每级台阶最多站 2 人且甲、乙不站同一个台阶，同一台阶上的人不区分站的位置，则不同的站法种数是\_\_\_\_\_种. (用数字作答)

14. 已知关于  $x$  的不等式  $(\ln x - 2ax)[x^2 - (2a+1)x + 1] \leq 0$  对任意  $x \in (0, +\infty)$  恒成立，则实数  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

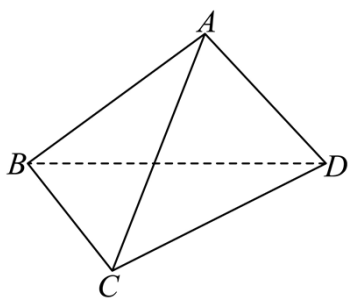
四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分. 解答应写出文字说明、证明过程或验算步骤.

15. 已知等差数列  $\{a_n\}$  的公差  $d$  不为零， $a_1, a_2, a_5$  成等比数列，且  $a_{2n} = 2a_n + 1$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 求  $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}$ .

16. 已知四面体  $A-BCD$ ,  $AB = AD = BC = CD = 2$ ,  $AC = \sqrt{3}$ .



(1) 证明:  $AC \perp BD$ ;

(2) 若  $BD = 2\sqrt{3}$ , 求直线  $AB$  与平面  $ACD$  所成角的正弦值.

17. 为了增强身体素质，寒假期间小王每天坚持在“跑步 20 分钟”和“跳绳 20 分钟”中选择一项进行锻炼.

在不下雪的时候，他跑步的概率为 80%，跳绳的概率为 20%，在下雪天他跑步的概率为 20%，跳绳的概率为 80%. 若前一天不下雪，则第二天下雪的概率为 60%，若前一天下雪，则第二天仍下雪的概率为

40%. 已知寒假第一天不下雪, 跑步 20 分钟大约消耗能量 300 卡路里, 跳绳 20 分钟大约消耗能量 200 卡路里. 记寒假第  $n$  天不下雪的概率为  $P_n$ .

(1) 求  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $P_3$  的值, 并求  $P_n$ ;

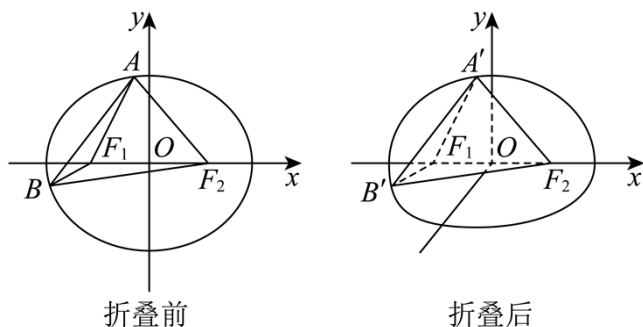
(2) 设小王寒假第  $n$  天通过运动消耗的能量为  $X$ , 求  $X$  的数学期望.

18. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点分别为  $F_1$ 、 $F_2$ , 焦距为  $2\sqrt{3}$ , 离心率为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ,

直线  $l: y = x + m$  与椭圆交于  $A, B$  两点 (其中点  $A$  在  $x$  轴上方, 点  $B$  在  $x$  轴下方).

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 如图, 将平面  $xOy$  沿  $x$  轴折叠, 使  $y$  轴正半轴和  $x$  轴所确定的半平面 (平面  $A'F_1F_2$ ) 与  $y$  轴负半轴和  $x$  轴所确定的半平面 (平面  $B'F_1F_2$ ) 垂直.



①若折叠后  $OA' \perp OB'$ , 求  $m$  的值;

②是否存在  $m$ , 使折叠后  $A'$ 、 $B'$  两点间的距离与折叠前  $A, B$  两点间的距离之比为  $\frac{3}{4}$ ?

19. 在平面直角坐标系中, 如果将函数  $y = f(x)$  的图象绕坐标原点逆时针旋转  $\alpha (0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2})$  后, 所得曲线仍然是某个函数的图象, 则称  $f(x)$  为“ $\alpha$  旋转函数”.

(1) 判断函数  $y = \sqrt{3}x$  是否为“ $\frac{\pi}{6}$  旋转函数”, 并说明理由;

(2) 已知函数  $f(x) = \ln(2x+1) (x > 0)$  是“ $\alpha$  旋转函数”, 求  $\tan \alpha$  的最大值;

(3) 若函数  $g(x) = m(x-1)e^x - x \ln x - \frac{x^2}{2}$  是“ $\frac{\pi}{4}$  旋转函数”, 求  $m$  的取值范围.

## 参考答案

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 集合  $A = \{x | 2 \leq x < 4\}$ ,  $B = \{x | x - 1 \geq 8 - 2x\}$ , 则  $A \cup B =$  ( )

- A.  $[2, 4)$                       B.  $[3, 4)$                       C.  $[2, +\infty)$                       D.  $[3, +\infty)$

【答案】C

【解析】

【分析】先解集合  $B$  中的不等式  $x - 1 \geq 8 - 2x$ , 解出  $x$  的范围, 再求得  $A \cup B$  即可.

【详解】由  $x - 1 \geq 8 - 2x$ , 解得  $x \geq 3$ , 即  $B = \{x | x \geq 3\}$ ,

$Q A = \{x | 2 \leq x < 4\}$ ,  $\therefore A \cup B = \{x | x \geq 2\}$ .

故选: C

2. 复数  $\frac{5i}{i-2}$  的虚部是 ( )

- A.  $i$                               B.  $1$                               C.  $-2i$                               D.  $-2$

【答案】D

【解析】

【分析】根据复数代数形式的除法运算化简, 再判断其虚部.

【详解】因为  $\frac{5i}{i-2} = \frac{5i(-2-i)}{(i-2)(-2-i)} = 1 - 2i$ ,

所以复数  $\frac{5i}{i-2}$  的虚部是  $-2$ .

故选: D

3. 已知单位向量  $\vec{a}, \vec{b}$  满足  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ , 则  $\cos \langle 3\vec{a} + 4\vec{b}, \vec{a} + \vec{b} \rangle =$  ( )

- A.  $0$                               B.  $\frac{7\sqrt{2}}{10}$                               C.  $\frac{\sqrt{2}}{10}$                               D.  $1$

【答案】B

【解析】

【分析】计算出  $(3\vec{a} + 4\vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 7$ ,  $|3\vec{a} + 4\vec{b}| = 5$ ,  $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2}$ , 利用向量夹角余弦公式求出答案.

【详解】  $(3\vec{a}+4\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=3\vec{a}^2+7\vec{a}\cdot\vec{b}+4\vec{b}^2=3+0+4=7,$

$(3\vec{a}+4\vec{b})^2=9\vec{a}^2+24\vec{a}\cdot\vec{b}+16\vec{b}^2=9+0+16=25,$  故  $|3\vec{a}+4\vec{b}|=5,$

$(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1+1=2,$  故  $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2},$

所以  $\cos\langle 3\vec{a}+4\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}\rangle = \frac{(3\vec{a}+4\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})}{|3\vec{a}+4\vec{b}|\cdot|\vec{a}+\vec{b}|} = \frac{7}{5\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$

故选：B

4. 设  $S_n$  为等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，已知  $S_3 = a_4 - 2, S_2 = a_3 - 2$ ，则公比  $q = ( \quad )$

A. 2

B. -2

C.  $\frac{1}{2}$

D.  $-\frac{1}{2}$

【答案】A

【解析】

【分析】根据数列的前  $n$  项和与  $a_n$  的关系，两式相减，即可求解.

【详解】由已知， $S_3 = a_4 - 2, S_2 = a_3 - 2$ ，两式相减得，

$S_3 - S_2 = a_3 = a_4 - a_3,$  即  $a_4 = 2a_3,$  即  $q = \frac{a_4}{a_3} = 2.$

故选：A

5. 已知  $A(-2,-2), B(1,3)$ ，点  $P$  在圆  $x^2 + y^2 = 4$  上运动，则  $|PA|^2 + |PB|^2$  的最大值为  $( \quad )$

A.  $16 - 6\sqrt{2}$

B.  $26 + 2\sqrt{2}$

C.  $26 + 4\sqrt{2}$

D. 32

【答案】C

【解析】

【分析】设  $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ ，根据两点间的距离公式结合三角函数的性质即可得解.

【详解】设  $P(2\cos\theta, 2\sin\theta)$ ，

则  $|PA|^2 + |PB|^2 = (2\cos\theta + 2)^2 + (2\sin\theta + 2)^2 + (2\cos\theta - 1)^2 + (2\sin\theta - 3)^2$

$= 4\cos^2\theta + 8\cos\theta + 4 + 4\sin^2\theta + 8\sin\theta + 4 + 4\cos^2\theta - 4\cos\theta + 1 + 4\sin^2\theta - 12\sin\theta + 9$

$= 4\cos\theta - 4\sin\theta + 26 = 4\sqrt{2}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 26,$

当  $\cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 1$  时,  $|PA|^2 + |PB|^2$  取得最大值  $26 + 4\sqrt{2}$ .

故选: C.

6. 若函数  $f(x) = \sin(\omega x) + \cos x$  的最大值为 2, 则常数  $\omega$  的取值可以为 ( )

- A. 1                      B.  $\frac{1}{2}$                       C.  $\frac{1}{3}$                       D.  $\frac{1}{4}$

【答案】D

【解析】

【分析】首先分别分析函数  $y = \cos x$  和  $y = \sin(\omega x)$  的最大值, 再根据三角函数的性质, 即可求解.

【详解】因为函数  $y = \cos x$  的最大值为 1,  $y = \sin(\omega x)$  的最大值为 1,

由题意可知,  $y = \cos x$  取得最大值 1 时,  $y = \sin(\omega x)$  也取得最大值 1,

即当  $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  时,  $\omega \cdot 2k\pi = \frac{\pi}{2} + 2k'\pi, k, k' \in \mathbb{Z}$ ,

得  $\omega = \frac{1}{4k} + \frac{k'}{k}, k, k' \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ ,

当  $k = 1, k' = 0$  时,  $\omega = \frac{1}{4}$ , 其他值不满足等式.

故选: D

7. 已知  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 若  $x = t$  为函数  $f(x) = \frac{x-1}{e^x-1} (x < 0)$  的极值点, 则  $f([t]) =$

( )

- A.  $\frac{2e}{e-1}$                       B.  $\frac{3e^2}{e^2-1}$                       C.  $\frac{4e^3}{e^3-1}$                       D.  $\frac{5e^4}{e^4-1}$

【答案】B

【解析】

【分析】求导后, 构造  $g(x) = -xe^x + 2e^x - 1$ , 分别求出  $g(-1) > 0, g(-2) < 0$ , 由零点存在定理得到零点范围, 再结合题意求出结果即可.

【详解】由题意可得  $f'(x) = \frac{-xe^x + 2e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$ ,

令  $g(x) = -xe^x + 2e^x - 1$ ,

则  $g(-1) = 3e^{-1} - 1 = \frac{3}{e} - 1 > 0, g(-2) = 4e^{-2} - 1 = \frac{4}{e^2} - 1 < 0$ ,

所以存在  $-2 < x_0 < -1$ ，使得  $g(x_0) = 0$ ，即  $f'(x_0) = 0$ ，

当  $-2 < x < x_0$  时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$  单调递减；当  $x_0 < x < -1$  时， $f'(x) > 0$ ， $f(x)$  单调递增，

所以  $x = x_0$  为函数  $f(x)$  的极值点，

所以  $[t] = [x_0] = -2$ ，

$$\text{所以 } f([t]) = f(-2) = \frac{-2-1}{e^{-2}-1} = \frac{-3}{\frac{1}{e^2}-1} = \frac{3e^2}{e^2-1},$$

故选：B.

8. 设  $O$  为原点， $F_1, F_2$  为双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的两个焦点，点  $P$  在  $C$  上且满足  $|OP| = \frac{3}{2}a$ ，

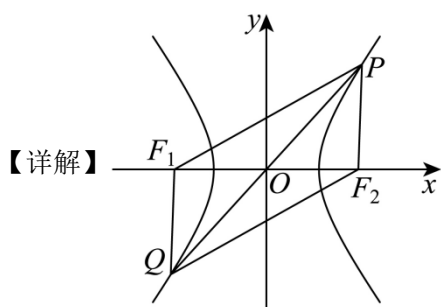
$\cos \angle F_1PF_2 = \frac{3}{7}$ ，则该双曲线的渐近线方程为 ( )

- A.  $\sqrt{2}x \pm y = 0$       B.  $x \pm \sqrt{2}y = 0$       C.  $\sqrt{3}x \pm y = 0$       D.  $x \pm \sqrt{3}y = 0$

【答案】B

【解析】

【分析】设  $|PF_1| = m, |PF_2| = n$ ，由题意列出含  $m, n$  的方程组，解出  $a, b$  的关系式，进而求出双曲线的渐近线即可.



设  $|PF_1| = m, |PF_2| = n$ ，由双曲线的定义知  $|m - n| = 2a$  ①，

在  $\triangle F_1PF_2$  中，由余弦定理得： $4c^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cdot \cos \angle F_1PF_2$ ，

所以  $4c^2 = m^2 + n^2 - \frac{6}{7}mn$  ②，

再由  $|OP| = \frac{3}{2}a$ ， $O$  为  $F_1, F_2$  的中点，延长  $PO$  至  $Q$ ，使  $|OQ| = |OP|$ ，

所以四边形  $PF_1F_2Q$  为平行四边形，且  $|PQ| = 2 \times \frac{3}{2}a = 3a$ ，

在  $\triangle PF_1F_2$  中, 由余弦定理知:  $4c^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cdot \cos \angle F_1PF_2$ ,

在  $\triangle PF_1Q$  中, 由余弦定理知:  $9a^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \angle PF_1Q$ ,

因为  $\angle F_1PF_2 + \angle PF_1Q = \pi$ , 则  $\cos \angle F_1PF_2 + \cos \angle PF_1Q = 0$ ,

可知  $2(m^2 + n^2) = (3a)^2 + (2c)^2$ ,

所以  $m^2 + n^2 = \frac{9a^2 + 4c^2}{2}$  ③,

由 ①③ 得  $mn = \frac{1}{4}a^2 + c^2$  ④, 把 ③④ 代入 ② 得  $4c^2 = \frac{9a^2 + 4c^2}{2} - \frac{6}{7}\left(\frac{1}{4}a^2 + c^2\right)$ ,

化简得  $20c^2 = 30a^2, \therefore 20a^2 + 20b^2 = 30a^2 \therefore a = \sqrt{2}b$ ,

所以渐近线方程为  $x \pm \sqrt{2}y = 0$ .

故选: B.

**【点睛】** 关键点点睛: 由四点共圆的四边形四个边的平方和等于两条对角线的平方和

$2(m^2 + n^2) = (3a)^2 + (2c)^2$  是解决本题的关键.

**二、选择题:** 本大题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 下列说法正确的是 ( )

A. 数据 7, 5, 3, 10, 2 的第 40 百分位数是 3

B. 已知随机变量  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ,  $\sigma$  越小, 表示随机变量  $X$  分布越集中

C. 已知一组数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的方差为 3, 则  $x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1, \dots, x_n - 1$  的方差为 3

D. 根据一组样本数据的散点图判断出两个变量线性相关, 由最小二乘法求得其回归直线方程为

$\hat{y} = 0.3x - m$ , 若其中一个散点为  $(m, -0.28)$ , 则  $m = 4$

**【答案】** BC

**【解析】**

**【分析】** 根据百分位数的定义即可判断 A; 根据正态曲线的性质即可判断 B; 根据方差的性质即可判断 C; 根据观测值与预测值的区别即可判断 D.

**【详解】** 对于 A, 数据按照从小到大的顺序排列为 2, 3, 5, 7, 10,

因为  $5 \times 40\% = 2$ ,

所以数据 7, 5, 3, 10, 2 的第 40 百分位数是  $\frac{3+5}{2} = 4$ , 故 A 错误;

对于 B,  $\sigma$  越小, 即方差越小, 随机变量  $X$  分布越集中, 故 B 正确;

对于 C, 已知一组数据  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的方差为 3,

则  $x_1 - 1, x_2 - 1, x_3 - 1, \dots, x_n - 1$  的方差为  $1^2 \times 3 = 3$ , 故 C 正确;

对于 D, 散点  $(m, -0.28)$  不一定在回归直线为  $\hat{y} = 0.3x - m$  上,

所以由散点  $(m, -0.28)$  无法求出  $m$  的值, 故 D 错误.

故选: BC.

10. 已知  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $\frac{2}{\sqrt{3}}a \cdot \sin^2 \frac{A+C}{2} = b \cdot \sin A$ , 下列结论正确的是

( )

A.  $B = \frac{\pi}{3}$

B. 若  $a = 4, b = 5$ , 则  $\triangle ABC$  有两解

C. 当  $a - c = \frac{\sqrt{3}}{3}b$  时,  $\triangle ABC$  为直角三角形

D. 若  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 则  $\cos A + \cos C$  的取值范围是  $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$

【答案】ACD

【解析】

【分析】通过正弦定理、诱导公式、二倍角公式及辅助角公式即可判断 A; 通过余弦定理即可判断 B; 通过

余弦定理及  $a - c = \frac{\sqrt{3}}{3}b$  可得  $a = 2c$  或  $c = 2a$ , 即可判断 C; 通过求 A 的取值范围  $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2}$ , 并将

$\cos A + \cos C = \sin(A + \frac{\pi}{6})$  即可判断 D.

【详解】对于 A, 因为  $\frac{2}{\sqrt{3}}a \cdot \sin^2 \frac{A+C}{2} = b \cdot \sin A$ ,

所以由  $A + B + C = \pi$  及正弦定理得,  $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin A \cdot \sin^2 \frac{\pi - B}{2} = \sin B \cdot \sin A$ ,

由诱导公式得,  $\frac{2}{\sqrt{3}}\sin A \cdot \cos^2 \frac{B}{2} = \sin B \cdot \sin A$ ,

因为  $A \in (0, \pi)$ , 故  $\sin A \neq 0$ , 所以  $\frac{2}{\sqrt{3}} \cos^2 \frac{B}{2} = 2 \sin \frac{B}{2} \cos \frac{B}{2}$ ,

化解得  $\cos \frac{B}{2} (\sqrt{3} \sin \frac{B}{2} - \cos \frac{B}{2}) = 0$ , 即  $\cos \frac{B}{2} \sin(\frac{B}{2} - \frac{\pi}{6}) = 0$ ,

所以  $\cos \frac{B}{2} = 0$  或  $\sin(\frac{B}{2} - \frac{\pi}{6}) = 0$ , 即  $B = \pi$  (舍) 或  $B = \frac{\pi}{3}$ , 故 A 正确;

对于 B, 由余弦定理得  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ , 即  $25 = 16 + c^2 - 8 \times c \times \frac{1}{2}$ , 得  $c^2 - 4c - 9 = 0$ ,

由  $\Delta = (-4)^2 - 4 \times (-9) = 52 > 0$ , 所以  $c = 2 + \sqrt{13}$  (负值舍), 即  $\triangle ABC$  有一解, 故 B 错误;

对于 C, 因为  $a - c = \frac{\sqrt{3}}{3} b$ , 两边平方得  $a^2 - 2ac + c^2 = \frac{b^2}{3}$ ,

由余弦定理得  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = a^2 + c^2 - ac$ ,

由两式消  $b^2$  得,  $2a^2 - 5ac + 2c^2 = 0$ , 解得  $a = 2c$  或  $c = 2a$ ,

由  $B = \frac{\pi}{3}$ ,  $a = 2c$ ,  $b = \sqrt{3}c$  解得  $\angle A = \frac{\pi}{2}$ ,

由  $B = \frac{\pi}{3}$ ,  $c = 2a$ ,  $b = \sqrt{3}a$  解得  $\angle C = \frac{\pi}{2}$ ;

故  $\triangle ABC$  为直角三角形, 故 C 正确;

对于 D, 因为  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 且  $B = \frac{\pi}{3}$ ,

$$\text{所以 } \begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < C < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < A < \frac{\pi}{2} \\ 0 < \frac{2\pi}{3} - A < \frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{2},$$

即  $\cos A + \cos C = \cos A + \cos(\frac{2\pi}{3} - A) = \frac{1}{2} \cos A + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin A = \sin(A + \frac{\pi}{6})$ ,

所以  $A + \frac{\pi}{6} \in (\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$ , 所以  $\sin(A + \frac{\pi}{6}) \in (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$ , 故 D 正确.

故选: ACD.

11. 在棱长为 1 的正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  中, 已知  $E$ 、 $F$  分别为线段  $B_1C$ ,  $D_1C_1$  的中点, 点  $P$  满足

$$\overrightarrow{DP} = \lambda \overrightarrow{DD_1} + \mu \overrightarrow{DB}, \quad \lambda \in [0, 1], \mu \in [0, 1], \text{ 则 ( )}$$

A. 当  $\lambda + \mu = 1$  时, 三棱锥  $D - PEF$  的体积为定值

B. 当  $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ , 四棱锥  $P-ABCD$  的外接球的表面积是  $\frac{9\pi}{4}$

C.  $\triangle PEF$  周长的最小值为  $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}$

D. 若  $AP = \frac{\sqrt{6}}{2}$ , 则点  $P$  的轨迹长为  $\frac{\pi}{2}$

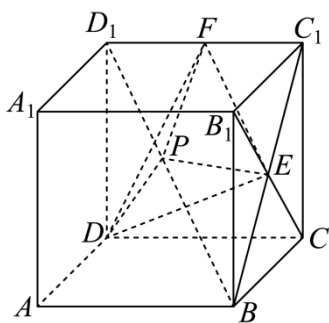
【答案】 ABD

【解析】

【分析】 A 选项, 先得到  $\vec{BP} = \lambda \vec{BD_1}$ , 故点  $P$  在线段  $D_1B$  上, 证明出  $D_1B \parallel EF$ , 所以三棱锥  $D-PEF$  为定值; B 选项, 点  $P$  为线段  $D_1B$  的中点, 作出辅助线, 找到外接球球心, 从而得到外接球半径和外接球面积; C 选项, 取线段  $A_1D_1$  的中点  $F_1$ , 由对称性知,  $|PF| = |PF_1|$ , 数形结合得到  $\therefore |PF| + |PE| = |PF_1| + |PE| \geq |F_1E| = \frac{\sqrt{5}}{2}$ , 从而得到周长的最小值; D 选项, 由  $AP = \frac{\sqrt{6}}{2}$  得到点  $P$  的轨迹为以  $Q$  为圆心, 半径为 1 的圆的一部分, 求出圆的半径, 得到轨迹长度.

【详解】 A 选项, 当  $\lambda + \mu = 1$  时,  $\vec{DP} = \lambda \vec{DD_1} + \mu \vec{DB} \Rightarrow \vec{DP} = \lambda \vec{DD_1} + (1-\lambda) \vec{DB}$ ,  
故  $\vec{DP} - \vec{DB} = \lambda (\vec{DD_1} - \vec{DB})$ , 即  $\vec{BP} = \lambda \vec{BD_1}$ ,

故点  $P$  在线段  $D_1B$  上,



连接  $BC_1$ , 与  $B_1C$  相交于点  $E$ , 则  $E$  为  $BC_1$  的中点, 连接  $EF$ ,

因为  $F$  为  $D_1C_1$  的中点, 所以  $D_1B \parallel EF$ , 故三棱锥  $D-PEF$  的体积为定值, A 正确;

B 选项, 当  $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$  时, 由 A 选项可知,  $\vec{BP} = \frac{1}{2} \vec{BD_1}$ , 点  $P$  为线段  $D_1B$  的中点,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/217042166135006114>