

辽宁省名校联盟（东三省）2024-2025 学年高二上学期 12 月

联考调研测试数学试题

学校:_____姓名:_____班级:_____考号:_____

一、未知

1. 已知抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 上一点 $A\left(-2, \frac{1}{2}\right)$, 则点 A 到其焦点的距离为 ()

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{5}{2}$

C. 4

D. $\frac{9}{2}$

2. 已知 p : “ $a=1$ ”, q : “直线 $l_1: ax+y+7=0$ 和直线 $l_2: (a+2)x-3y+2=0$ 互相垂

直”, 则 p 是 q 的 ()

A. 必要不充分条件

B. 充分不必要条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

3. 在正三棱锥 $A-BCD$ 中, O 为 $\triangle BCD$ 外接圆圆心, 则 $\overrightarrow{AO} =$ ()

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$

B. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

D. $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$

4. 已知 $m, n \in \mathbf{N}^*$ 且 $m \leq n$, 则下列等式正确的是 ()

A. $A_{10}^4 = A_{10}^6$

B. $C_7^3 = \frac{A_7^3}{4!}$

C. $(n+1)A_n^m = A_{n+1}^{m+1}$

D. $C_n^m = \frac{m+1}{n+1} C_{n+1}^m$

5. 已知圆 $O: x^2 + y^2 = 16$, 定点 $A(2, 4)$, P 是圆上任意一点, 线段 AP 的垂直平分线与直线

OP 交于点 Q ，则点 Q 的轨迹为 ()

A. 以 OA 为直径的圆

B. 以 O, A 为焦点的椭圆

C. 以 O, A 为焦点的双曲线

D. 以 O 为顶点， A 为焦点的抛物线

6. 若 $C_{13}^{m-3} = C_{13}^{\frac{m}{3}}$ ，则 $C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + \cdots + C_m^2$ 的值为 ()

A. 286

B. 285

C. 219

D. 218

7. 在正四棱台 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB = 4, A_1B_1 = 2$ ，若存在球 O 与该正四棱台的各个面

均相切，则点 A_1 到平面 B_1BCC_1 的距离为 ()

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

B. $\sqrt{3}$

C. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{8\sqrt{17}}{17}$

8. 已知 M, N 是椭圆 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 上的两个动点， O 为坐标原点， $OM \perp ON$ ，过点 O 作

$OP \perp MN$ ，垂足为点 P ，若 A_1, A_2 分别为椭圆的左、右顶点，则 $|A_1P|$ 的最小值为 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

D. $\sqrt{3}$

二、多选题

9. 设 F_1, F_2 分别为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的两个焦点， P 是椭圆上一点，且 $|PF_1| - |PF_2| = 2$ ，则下

列说法中正确的是 ()

A. $|PF_1| = 3$

B. $\triangle PF_1F_2$ 的周长为 $6 + 2\sqrt{5}$

C. $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 4

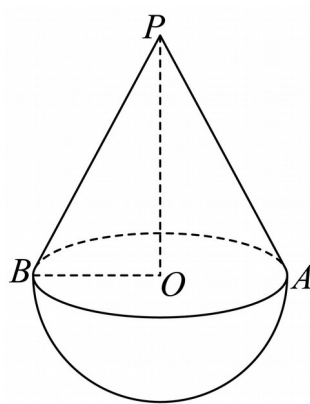
D. 点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 5$ 上

10. 在 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{3x}\right)^n$ 的展开式中二项式系数之和是 64，则下列说法正确的是 ()

- A. 二项式系数最大的项是第 4 项 B. 展开式没有常数项
- C. 各项系数之和为 $\frac{1}{243}$ D. 系数最大的项是第 3 项

11. 如图，该几何体为圆锥与半球组成的组合体，其中圆锥轴截面为边长为 2 的正三角形，

点 Q 为半球面上的一个动点，则下列说法正确的是 ()



- A. 该组合体的体积为 $\left(\frac{\sqrt{3}+2}{3}\right)\pi$
- B. PQ 与平面 PAB 所成角的取值范围为 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$
- C. 平面 PAQ 与平面 PBQ 所成角的取值范围为 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$
- D. 当 $PQ = \sqrt{7}$ 时， Q 点形成的轨迹长度为 π

三、填空题

12. 一盒子中有编号 1,2,3 的红球和编号 1,2,3 的白球各一个，随机取出 4 个球排成一列，则相同颜色和相同编号均不相邻的排法有_____种.

13. 过直线 $l: 6x + 2y - 9 = 0$ 上一点 P 作圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 和圆 $C_2: (x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 2$ 的切线,

切点分别为 A, B , 若 M 为 AB 中点, N 为 PA 中点, 则 $\frac{|PA|}{|MN|} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 杨辉三角（帕斯卡三角）是我国南宋数学家杨辉用三角形来直观解释二项式系数规律

的一种方法，如图，记第 n 行的第 i 个数为 $a_{n,i}$ ，则 $a_{10,3} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\frac{1 + \sum_{i=1}^{2024} (-1)^{i+1} a_{2024,i}^2}{a_{2024,1013}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

杨辉三角									
第0行								1	
第1行							1		1
第2行						1	2	1	
第3行				1	3	3	1		
第4行			1	4	6	4	1		
第5行		1	5	10	10	5	1		
第6行	1	6	15	20	15	6	1		
第7行	1	7	21	35	35	21	7	1	
第8行	1	8	28	56	70	56	28	8	1

四、解答题

15. 甲、乙、丙等 6 名同学利用周末到社区进行志愿服务.

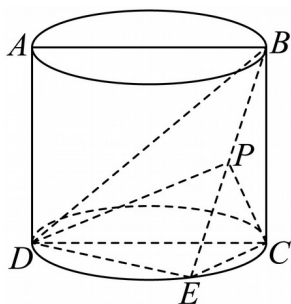
(1)6 名同学站成一排，若甲、乙、丙自左向右从高到矮排列，则不同的排列方案有多少种？

(2)6 名同学站成一排，甲、乙两名同学之间恰有 2 人的不同排列方案有多少种？

(3)6 名同学分成三组（每组至少有一人），进行三项不同的社区服务，则不同的分配方案有多少种？

16. 如图，已知正方形 $ABCD$ 是圆柱的轴截面（经过旋转轴的截面），点 E 在底面圆周上，

$AB = 4, CE = 2$ ，点 P 是 BE 的中点.



(1)求点 A 到直线 DP 的距离;

(2)求平面 PCD 与平面 BDE 的夹角的余弦值.

17. “对号函数” $y = ax + \frac{b}{x} (a > 0, b > 0)$ 的图象也可以看成是以 $x = 0$ 与 $y = ax$ 为渐近线的双

曲线. 设函数 $y = \sqrt{3} \left(\frac{x}{3} + \frac{3}{2x} \right)$, 若将其图象看成双曲线 C_1 .

(1)求双曲线 C_1 的焦点坐标;

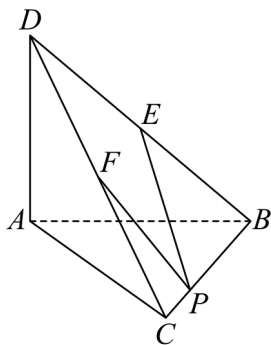
(2)将双曲线 C_1 绕着坐标原点 O 顺时针旋转, 使焦点落到 x 轴上, 得到双曲线 C_2 , 设双曲线

C_2 的右焦点为 F , 过 F 的直线 l 与双曲线 C_2 的右支交于 A, B 两点, 当 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 21$ 时, 求直

线 l 的方程.

18. 已知三棱锥 $D-ABC$ 底面为边长为 1 的等边三角形 ABC , 平面 $ABD \perp$ 平面 ABC , 平

面 $ACD \perp$ 平面 ABC , E 为线段 BD 中点, F 为线段 CD 中点, 点 P 在线段 BC 上.



(1)证明: $AD \perp$ 平面 ABC ;

(2)设直线 PE, PF 与平面 ABC 所成的角分别为 α, β , 其中 $\alpha = \frac{\pi}{6}, \cos \beta = \frac{1}{4}$, 求线段 AD 的

长度及 P 点位置.

19. 已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(1, 0)$, 过抛物线上一点 A , 任意作两条相互

垂直的弦 AB, AC , 弦 BC 过定点 $P(5, 2)$.

(1)求 E 的方程;

(2)求 A 点坐标;

(3)若直线 AB 和 AC 分别与 y 轴交于 M, N 两点, 当 $|\overline{MN}| \leq \frac{5}{2}$ 时, 求 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle AMN}}$ 的最大值.

参考答案:

题号	9	10	11							
答案	BCD	AD	ABD							

1. B

【分析】首先由点 A 求出抛物线方程,即可得到抛物线的准线方程,再根据抛物线的定义计算可得.

【详解】因为点 $A\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ 在抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 上,所以 $(-2)^2 = 2p \times \frac{1}{2}$,解得 $p = 4$,

所以抛物线方程为 $x^2 = 8y$,所以准线为 $y = -2$,

所以点 A 到其焦点的距离为 $|AF| = \frac{1}{2} - (-2) = \frac{5}{2}$.

故选: B

2. B

【分析】根据两直线垂直解得 $a = -3$ 或 $a = 1$,根据包含关系分析充分、必要条件.

【详解】若两直线垂直,则 $a \times (a + 2) + 1 \times (-3) = 0$,解得: $a = -3$ 或 $a = 1$,

显然集合 $\{1\}$ 是集合 $\{-3, 1\}$ 的真子集,

所以“ $a = 1$ ”是“直线 $l_1: ax + y + 7 = 0$ 与直线 $l_2: (a + 2)x - 3y + 2 = 0$ 互相垂直”的充分不必要条件.

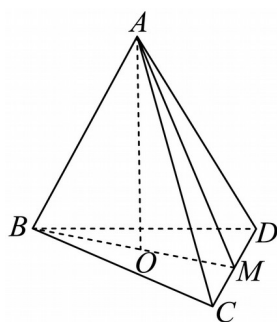
故选: B.

3. D

【分析】取 CD 的中点 M ,连接 AM, BM ,结合重心的性质,利用空间向量的线性运算即可求解.

【详解】在正三棱锥 $A-BCD$ 中,取 CD 的中点 M ,连接 AM, BM ,

$$\text{则 } \overrightarrow{AO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}.$$



故选：D

4. C

【分析】根据排列数的运算性质即可判断 AC，根据组合数的运算性质即可判断 BD.

【详解】对于 A， $A_{10}^4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$, $A_{10}^6 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 = 151200$ ，故 A 错误；

对于 B， $C_7^3 = \frac{A_7^3}{3!}$ ，故 B 错误；

$$\text{对于 C，} (n+1)A_n^m = \frac{(n+1)n!}{(n-m)!} = \frac{(n+1)!}{(n-m)!}, A_{n+1}^{m+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1-m-1)!} = \frac{(n+1)!}{(n-m)!},$$

所以 $(n+1)A_n^m = A_{n+1}^{m+1}$ ，故 C 正确；

$$\text{对于 D，} C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{m+1}{n+1} \times \frac{(n+1)!}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{m+1}{n+1} C_{n+1}^{m+1}, \text{ 故 D 错误.}$$

故选：C

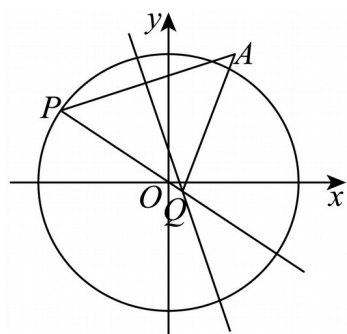
5. C

【分析】根据题意作出图像，由中垂线的性质得到 $|QA| = |QP|$ ，然后由几何图形得到

$|QA| - |QO| = 4$ 为定值，符合双曲线的定义，从而得到结果.

【详解】由题意知圆 $O: x^2 + y^2 = 16$ 的半径为 4，点 $A(2, 4)$ 在圆外，

如图，由中垂线可知 $|QA|=|QP|$ ，圆的半径 $r=4$ ，



$$\therefore |QA| - |QO| = |QP| - |QO| = |OP| = 4,$$

即动点 Q 到两个顶点 A, O 的距离差为定值，

故点 Q 的轨迹是以 A, O 为焦点的双曲线中的一支.

故选：C.

6. B

【分析】根据组合数公式及其性质求解即可.

【详解】因为 $C_{13}^{m-3} = C_{13}^{\frac{m}{3}}$ ，所以 $m-3 = \frac{m}{3}$ 或 $m-3 + \frac{m}{3} = 13$ ，解得 $m=12$ 或 $m=\frac{9}{2}$ （舍），

由组合数性质得 $C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + \cdots + C_{12}^2 = C_3^3 + C_3^2 + C_4^2 + C_5^2 + \cdots + C_{12}^2 - C_3^3$

$$= C_4^3 + C_4^2 + C_5^2 + \cdots + C_{12}^2 - 1 = \cdots = C_{13}^3 - 1 = 285.$$

故选：B

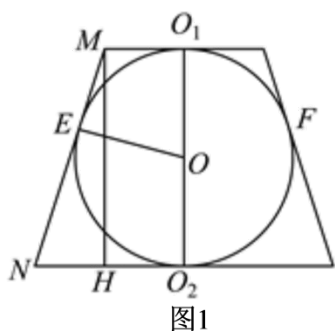
7. A

【分析】作出正棱台以及球的截面图，作辅助线结合圆的切线性质，求得正四棱台的高和正四棱台的斜高，再利用等体积法，即可求得答案.

【详解】设球 O 与上底面、下底面分别切于点 O_1, O_2 ，与面 ADD_1A_1 ，面 BCC_1B_1 分别切于点

E, F ，

作出其截面如图1所示，则 $|MO_1| = |ME| = 1$ ， $|EN| = |NO_2| = 2$ ，

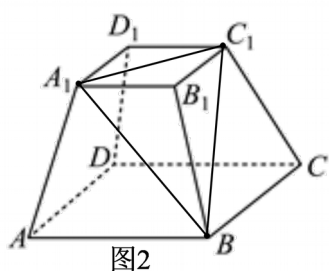


于是 $|MN| = 1 + 2 = 3$

过点 M 作 $MH \perp O_2N$ 于点 H , 则 $|NH| = |NO_2| - |MO_1| = 1$,

由勾股定理可得 $|MH| = |O_1O_2| = \sqrt{|MN|^2 - |NH|^2} = \sqrt{3^2 - 1^2} = 2\sqrt{2}$,

如图 2, 连接 A_1B, A_1C_1, BC_1 , 则 $V_{A_1-BB_1C_1} = V_{B-A_1B_1C_1}$,



又 $S_{\triangle A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$, 点 B 到平面 $A_1B_1C_1$ 的距离为 $|O_1O_2| = 2\sqrt{2}$,

由正四棱台的性质可知, 正四棱台的斜高长为 $|MN| = 3$, 所以 $S_{\triangle BB_1C_1} = \frac{1}{2} \times 2 \times 3 = 3$,

设点 A_1 到平面 B_1BCC_1 的距离为 h ,

所以 $\frac{1}{3} \times 2 \times 2\sqrt{2} = \frac{1}{3} \times 3 \times h$, 解得 $h = \frac{4\sqrt{2}}{3}$,

故选: A.

8. C

【分析】由题意知 M, N 为椭圆上两点，先考虑直线 MN 斜率不存在时，再考虑直线 MN 斜

率存在时，设直线为 $y = kx + m$ ，联立直线与椭圆，整理方程，写出韦达定理，又由已知条

件 $OM \perp ON$ ，得 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0$ ，将韦达定理代入可得 k 与 m 的关系式，最后根据三角形三

边关系求得 $|A_1P|$ 的最小值。

【详解】当直线 MN 斜率不存在时，要想求得 $|A_1P|$ 的最小值，则 M, N 为 y 轴左侧两点，又

由已知条件 $OM \perp ON$ ，易得 $P\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$ ，那么 $|A_1P| = |A_1O| - |OP| = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

当直线 MN 斜率存在时，设直线 MN 方程为 $y = kx + m$ ， $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，

联立 $\begin{cases} y = kx + m \\ \frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \end{cases}$ ，消去 y 整理得： $(3k^2 + 1)x^2 + 6kmx + 3m^2 - 3 = 0$

$$\Delta = 12(3k^2 - m^2 + 1) > 0, \quad x_1 + x_2 = \frac{-6km}{3k^2 + 1}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{3m^2 - 3}{3k^2 + 1}$$

$$\text{所以 } y_1 y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{m^2 - 3k^2}{3k^2 + 1}$$

$$\text{由 } OM \perp ON, \text{ 得 } \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = \frac{4m^2 - 3k^2 - 3}{3k^2 + 1} = 0$$

$$\text{整理得 } 4m^2 = 3k^2 + 3$$

$$\text{又因为 } OP \perp MN, \text{ 所以 } |OP| = \frac{|m|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}(k^2 + 1)}}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{又 } |A_1P| > |A_1O| - |OP| = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

综上所述, $|A_1P|$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

故选: C

【点睛】本题主要考查直线与椭圆的位置关系及垂直条件的转换, 强调计算能力和逻辑思维能力. 同时求最值时用到了三角形三边的关系, 属于中档题.

9. BCD

【分析】由椭圆方程得到 a, b, c 的值, 根据椭圆的性质得到 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$, 结合

$|PF_1| - |PF_2| = 2$ 求得 $|PF_1|$, 判断 A 选项; 由 a, c 得到焦点三角形的周长, 判断 B 选项; 由余

弦定理求 $\angle F_1PF_2$ 的值, 得到三角形面积, 判断 C 选项; 由直角三角形斜边上的中线等于斜

边的一半得到点 P 到圆心的距离, 判断 D 选项.

【详解】由解析式可知 $a = 3$, $b = 2$, $c = \sqrt{5}$

由椭圆的性质可得 $|PF_1| + |PF_2| = 2a = 6$, 又 $\because |PF_1| - |PF_2| = 2$, $\therefore |PF_1| = 4$, $|PF_2| = 2$, A 选项错误;

$C_{\triangle PF_1F_2} = |F_1F_2| + |PF_1| + |PF_2| = 2c + 2a = 6 + 2\sqrt{5}$, B 选项正确;

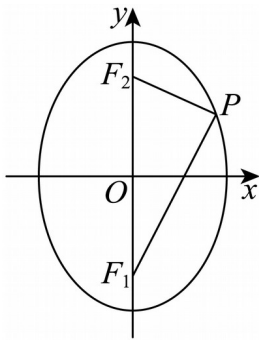
由余弦定理可得 $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{|PF_2|^2 + |PF_1|^2 - |F_1F_2|^2}{2|PF_1||PF_2|} = \frac{16 + 4 - 20}{2 \times 2 \times 4} = 0$, 即 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{2}$,

$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}|PF_1||PF_2| = 4$, C 选项正确;

$\because \angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{2}$, O 为 F_1F_2 中点, $\therefore |OP| = \frac{1}{2}|F_1F_2| = \sqrt{5}$, $\therefore$ 点 P 在圆 $x^2 + y^2 = 5$ 上, D 选项

正确.

故选: BCD



10. AD

【分析】由二项式系数之和为 2^n 可得 n 的值, 写出二项式展开式的通项, 当 n 为偶数时,

二项式系数最大项为第 $\frac{n}{2}+1$ 项判断 A, 根据通项公式求常数项判断 B, 令 $x=1$ 即可得各项

系数之和判断 C, 根据二项式的通项公式求解系数最大项即可判断 D.

【详解】因为二项式系数之和为 64, 即有 $2^n = 64$, 所以 $n = 6$,

则 $\left(\sqrt{x} - \frac{2}{3x}\right)^6$ 的通项 $T_{r+1} = C_6^r \cdot (\sqrt{x})^{6-r} \cdot \left(-\frac{2}{3x}\right)^r = \left(-\frac{2}{3}\right)^r C_6^r x^{\frac{6-3r}{2}}$,

对于 A, 二项式系数最大的是 C_6^3 , 它是第 4 项的二项式系数, 正确;

对于 B, 令 $\frac{6-3r}{2} = 0$, 得 $r = 2$, 得常数项为 $T_3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^2 C_6^2 x^0 = \frac{20}{3}$, 错误;

对于 C, 令 $x=1$, 得该展开式的各项系数之和为 $\left(1 - \frac{2}{3}\right)^6 = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}$, 错误;

对于 D, 由通项公式可得 r 为偶数时, 系数才有可能取到最大值,

由 $T_1 = \left(-\frac{2}{3}\right)^0 C_6^0 x^3 = x^3, T_3 = \frac{20}{3}, T_5 = \left(-\frac{2}{3}\right)^4 C_6^4 x^{-3} = \frac{80}{27} x^{-3}, T_7 = \left(-\frac{2}{3}\right)^6 C_6^6 x^{-6} = \frac{64}{729} x^{-6}$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/217101111146010011>