

第6讲 函数及其表示



01

走进教材 · 自主回顾

1. 函数的概念

一般地，设 A, B 是非空的实数集，如果对于集合 A 中的任意一个数 x ，按照某种确定的对应关系 f ，在集合 B 中都有唯一确定的数 y 和它对应，那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数，记作 $y=f(x)$ ， $x \in A$ 。

2. 函数的定义域、值域

在函数 $y=f(x)$ ， $x \in A$ 中， x 叫做自变量， x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x)|x \in A\}$ 叫做函数的值域。

3. 函数的表示法

表示函数的常用方法有解析法、图像法和列表法。

4. 分段函数

(1)若函数在其定义域的不同子集上，因对应关系不同而分别用几个不同的式子来表示，这种函数称为分段函数。

(2)分段函数虽由几个部分组成，但它表示的是一个函数。分段函数的定义域等于各段函数的定义域的并集，值域等于各段函数的值域的并集。

➤ 考点1 函数的概念

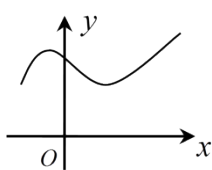
[名师点睛]

(1) 函数的定义要求非空数集 A 中的任何一个元素在非空数集 B 中有且只有一个元素与之对应, 即可以“多对一”, 不能“一对多”, 而 B 中有可能存在与 A 中元素不对应的元素.

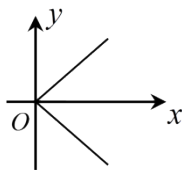
(2) 构成函数的三要素中, 定义域和对应关系相同, 则值域一定相同

[典例]

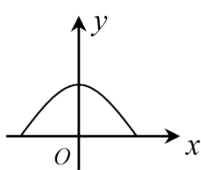
1. (2022·全国·高三专题练习) 下列四个图像中, 是函数图像的是 ()



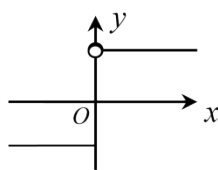
(1)



(2)



(3)



(4)

A. (1) (2)

B. (1) (2) (3)

C. (1) (3) (4)

D. (1) (2) (3) (4)

【答案】C

【解析】

根据函数的定义, 一个自变量值对应唯一一个函数值, 或者多个自变量值对应唯一一个函数值, 显然只有 (2) 不满足.

故选: C.

2. (2021·湖南·雅礼中学高三阶段练习) 下列各组函数中, $f(x)$, $g(x)$ 是同一函数的是 ()

A. $f(x) = x^2$, $g(x) = (\sqrt{x})^4$

B. $f(x) = \log_a x^2$, $g(x) = 2 \log_a x$

C. $f(x) = \frac{4^x - 1}{2^x - 1}$, $g(x) = 2^x + 1$

D. $f(x) = \sqrt{x-1} \cdot \sqrt{1-x}$, $g(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{1-x}$

【答案】D

【解析】

解：对于 A 选项， $f(x)=x^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ， $g(x)=(\sqrt{x})^4$ 的定义域为 $[0,+\infty)$ ，故不满足；

对于 B 选项， $f(x)=\log_a x^2$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$ ， $g(x)=2\log_a x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$ ，故不满足；

对于 C 选项， $f(x)=\frac{4^x-1}{2^x-1}$ 的定义域为 $\{x|x \neq 0\}$ ， $g(x)=2^x+1$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，故不满足；

对于 D 选项， $f(x)$ ， $g(x)$ 的定义域均为 $\{1\}$ ，对应关系均为 $y=0$ ，故是同一函数。

故选：D

【举一反三】

1. (2022·全国·高三专题练习) 函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $x=1$ 的交点个数 ()

- A. 至少 1 个 B. 至多 1 个 C. 仅有 1 个 D. 有 0 个、1 个或多个

【答案】B

【解析】

若 1 不在函数 $f(x)$ 的定义域内， $y=f(x)$ 的图象与直线 $x=1$ 没有交点，

若 1 在函数 $f(x)$ 的定义域内， $y=f(x)$ 的图象与直线 $x=1$ 有 1 个交点，

故选：B.

2. (2022·天津市西青区张家窝中学高三阶段练习) 下列各组函数中，表示同一个函数的是 ()

A. $y=x-1$ 和 $y=\frac{x^2-1}{x+1}$

B. $y=x^0$ 和 $y=1$

C. $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=(x+1)^2$

D. $f(x)=\frac{(\sqrt{x})^2}{x}$ 和 $g(x)=\frac{x}{(\sqrt{x})^2}$

【答案】D

【解析】

对于 A，函数 $y=x-1$ 定义域是 $\mathbf{R}$ ，函数 $y=\frac{x^2-1}{x+1}$ 定义域是 $(-\infty,-1) \cup (-1,+\infty)$ ，A 不是；

对于 B， $y=x^0$ 定义域是 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$ ，函数 $y=1$ 定义域是 $\mathbf{R}$ ，B 不是；

对于 C， $f(x)=x^2$ 和 $g(x)=(x+1)^2$ 对应法则不同，C 不是；

对于 D, $f(x)=\frac{(\sqrt{x})^2}{x}$ 和 $g(x)=\frac{x}{(\sqrt{x})^2}$ 定义域都是 $(0,+\infty)$, 并且对应法则相同, D 是.

故选: D

3. (2022·全国·高三专题练习) 下列各组函数中, 表示同一个函数的是 ()

A. $y=1$ 与 $y=x^0$

B. $y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$

C. $y=2\log_2 x$ 与 $y=\log_2 x^2$

D. $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$ 与 $y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$

【答案】D

【解析】

对于 A: $y=1$ 定义域为 $\mathbf{R}$, $y=x^0$ 定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 定义域不同不是同一个函数, 故选项

A 不正确;

对于 B: $y=x$ 定义域为 $\mathbf{R}$, $y=(\sqrt{x})^2$ 的定义域为 $\{x|x \geq 0\}$, 定义域不同不是同一个函数,

故选项 B 不正确;

对于 C: $y=2\log_2 x$ 的定义域为 $\{x|x > 0\}$, $y=\log_2 x^2$ 定义域为 $\{x|x \neq 0\}$, 定义域不同不是

同一个函数, 故选项 C 不正确;

对于 D: 由 $\frac{1+x}{1-x} > 0$ 可得 $(x+1)(x-1) < 0$, 解得: $-1 < x < 1$, 所以 $y=\ln\frac{1+x}{1-x}$ 的定义域为

$\{x|-1 < x < 1\}$, 由 $\begin{cases} 1+x > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$ 可得 $-1 < x < 1$, 所以函数 $y=\ln(1+x)-\ln(1-x)$ 的定义域为

$\{x|-1 < x < 1\}$ 且 $y=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$, 所以两个函数定义域相同对应关系也相同

是同一个函数, 故选项 D 正确,

故选: D.

考点2 函数的定义域

[名师点睛]

1. 根据具体的函数解析式求定义域的策略

已知解析式的函数，其定义域是使解析式有意义的自变量的取值集合，求解时只要根据函数解析式列出自变量满足的不等式(组)，得不等式(组)的解集即可。

2. 求抽象函数的定义域的策略

(1)若已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[a, b]$ ，则复合函数 $f(g(x))$ 的定义域由不等式 $a \leq g(x) \leq b$ 求出；

(2)若已知函数 $f(g(x))$ 的定义域为 $[a, b]$ ，则 $f(x)$ 的定义域为 $g(x)$ 在 $x \in [a, b]$ 上的值域。

3. 求函数定义域应注意的问题

(1)不要对解析式进行化简变形，以免定义域发生变化；

(2)定义域是一个集合，要用集合或区间表示，若用区间表示数集，不能用“或”连接，而应该用并集符号“ $\cup$ ”连接。

4. 已知函数的定义域求参数问题的解题步骤

(1)调整思维方向，根据已知函数，将给出的定义域问题转化为方程或不等式的解集问题；

(2)根据方程或不等式的解集情况确定参数的取值或范围。

[典例]

1. (2022·北京·模拟预测) 函数 $f(x) = \sqrt{2x+1} + \lg(2-x)$ 的定义域是_____.

【答案】 $[-\frac{1}{2}, 2)$

【解析】

由题意可得， $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases}$ ，解之得 $-\frac{1}{2} \leq x < 2$

则函数 $f(x) = \sqrt{2x+1} + \lg(2-x)$ 的定义域是 $[-\frac{1}{2}, 2)$

故答案为： $[-\frac{1}{2}, 2)$

2. (2022·全国·高三专题练习) 若函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $[0, 8]$ ，则函数 $g(x) = \frac{f(4x)}{\sqrt{x-1}}$ 的定

义域是 ()

- A. (1,32) B. (1,2) C. (1,32] D. (1,2]

【答案】D

【解析】

因为函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $[0,8]$,

$$\text{所以 } \begin{cases} 0 \leq 4x \leq 8 \\ x-1 > 0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x > 1 \end{cases}, \therefore 1 < x \leq 2.$$

故选: D.

3. (2022·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x+1)$ 的定义域为 $(-2,0)$, 则 $f(2x-1)$ 的定义域为 ()

- A. $(-1,0)$ B. $(-2,0)$ C. $(0,1)$ D. $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

【答案】C

【解析】

由题设, 若 $t=x+1$, 则 $t \in (-1,1)$,

$\therefore$ 对于 $f(2x-1)$ 有 $2x-1 \in (-1,1)$, 故其定义域为 $(0,1)$.

故选: C

4. (2022·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x)=\frac{\sqrt[3]{3x-1}}{ax^2+ax-3}$ 的定义域是 R , 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(-12,0)$ B. $(-12,0]$ C. $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$ D. $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right]$

【答案】B

【解析】

$$\because f(x)=\frac{\sqrt[3]{3x-1}}{ax^2+ax-3} \text{ 的定义域为 } R,$$

$\therefore$ 只需分母不为 0 即可, 即 $ax^2+ax-3 \neq 0$ 恒成立,

(1) 当 $a=0$ 时, $-3 \neq 0$ 恒成立, 满足题意,

(2) 当 $a \neq 0$ 时, $\Delta = a^2 - 4a \times (-3) < 0$, 解得 $-12 < a < 0$,

综上可得 $-12 < a \leq 0$.

故选: B.

[举一反三]

1. (2022·全国·高三专题练习) 函数 $y = \sqrt{2x-3} + \frac{1}{x-3}$ 的定义域为 ()

A. $\left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$

B. $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

C. $\left[\frac{3}{2}, 3\right) \cup (3, +\infty)$

D. $(3, +\infty)$

【答案】C

【解析】

要使函数 $y = \sqrt{2x-3} + \frac{1}{x-3}$ 有意义, 则

所以 $\begin{cases} 2x-3 \geq 0 \\ x-3 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $x \geq \frac{3}{2}$ 且 $x \neq 3$,

所以函数 $y = \sqrt{2x-3} + \frac{1}{x-3}$ 的定义域为 $\left[\frac{3}{2}, 3\right) \cup (3, +\infty)$.

故选: C.

2. (2022·全国·高三专题练习) 函数 $y = \sqrt{\log_5(1-2\sin x)}$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$ 的定义域是 ()

A. $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$

B. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$

C. $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

D. $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right]$

【答案】A

由题意, 得 $\begin{cases} 1-2\sin x > 0 \\ \log_5(1-2\sin x) \geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 则 $\begin{cases} \sin x < \frac{1}{2} \\ 1-2\sin x \geq 1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$, 即 $\begin{cases} \sin x \leq 0 \\ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$,

$\therefore x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

故选: A.

3. (2022·全国·高三专题练习) 已知函数 $y = f(x-1)$ 的定义域为 $[1, 3]$, 则函数 $y = f(\log_3 x)$

的定义域为 ()

A. $[0, 1]$

B. $[1, 9]$

C. $[0, 2]$

D. $[0, 9]$

【答案】B

【解析】

由 $x \in [1, 3]$, 得 $x-1 \in [0, 2]$,

所以 $\log_3 x \in [0, 2]$, 所以 $x \in [1, 9]$.

故选：B.

4. (2022·全国·高三专题练习) 定义域是一个函数的三要素之一，已知函数 $Jzzx(x)$ 定义域为 $[211, 985]$ ，则函数 $shuangyiliu(x) = Jzzx(2018x) + Jzzx(2021x)$ 的定义域为 ()

A. $\left[\frac{211}{2018}, \frac{985}{2021}\right]$

B. $\left[\frac{211}{2021}, \frac{985}{2018}\right]$

C. $\left[\frac{211}{2018}, \frac{985}{2018}\right]$

D. $\left[\frac{211}{2021}, \frac{985}{2021}\right]$

【答案】A

【解析】

由抽象函数的定义域可知，

$$\begin{cases} 211 \leq 2018x \leq 985 \\ 211 \leq 2021x \leq 985 \end{cases}, \text{解得 } \frac{211}{2018} \leq x \leq \frac{985}{2021},$$

所以所求函数的定义域为 $\left[\frac{211}{2018}, \frac{985}{2021}\right]$.

故选 A.

5. (2022·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = \sqrt{(m+1)x^2 - (m+1)x + \frac{3}{4}}$ 的定义域为 R ，则 m 的取值范围是 ()

A. $-1 < m < 2$

B. $-1 < m \leq 2$

C. $-1 \leq m \leq 2$

D. $-1 \leq m < 2$

【答案】C

【解析】

由题意得： $(m+1)x^2 - (m+1)x + \frac{3}{4} \geq 0$ 在 R 上恒成立.

$m+1=0$ 即 $m=-1$ 时， $f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 恒成立，符合题意，

$$m+1 \neq 0 \text{ 时，只需 } \begin{cases} m+1 > 0 \\ \Delta = (m+1)^2 - 3(m+1) \leq 0 \end{cases},$$

解得： $-1 < m \leq 2$ ，

综上： $m \in [-1, 2]$ ，

故选：C.

6. (2022·上海市奉贤中学高三阶段练习) 函数 $f(x) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1}$ 的定义域为_____.

【答案】 $(-\infty, 0]$

【解析】解：由 $\left(\frac{1}{2}\right)^x - 1 \geq 0$ ，得 $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^0$ ，所以 $x \leq 0$ ，所以函数的定义域为 $(-\infty, 0]$ ，

故答案为： $(-\infty, 0]$

7. (2022·全国·高三专题练习) 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{ax^2 + ax + 1}}$ 的定义域是 R ，则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $[0, 4)$

【解析】由题意可得 $ax^2 + ax + 1 > 0$ 在 R 上恒成立.

①当 $a = 0$ 时，则 $1 > 0$ 恒成立，

$\therefore a = 0$ 符合题意；

②当 $a \neq 0$ 时，

则 $\begin{cases} a > 0 \\ a^2 - 4a < 0 \end{cases}$ ，解得 $0 < a < 4$.

综上可得 $0 \leq a < 4$ ，

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $[0, 4)$.

故答案为： $[0, 4)$.

8. (2022·全国·高三专题练习) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(a-1)x^2 + (a-1)x + 1}}$ 的定义域为 R ，则 a 的范围是_____.

【答案】 $[1, 5)$

【解析】

当 $a = 1$ 时， $f(x) = 1$ ，即定义域为 R ；

当 $a \neq 1$ ，要使 $f(x)$ 的定义域为 R ，则 $g(x) = (a-1)x^2 + (a-1)x + 1 > 0$ 在 $x \in R$ 上恒成立，

$\therefore \begin{cases} a-1 > 0 \\ \Delta = (a-1)^2 - 4(a-1) < 0 \end{cases}$ ，解得 $1 < a < 5$ ，

综上，有 $1 \leq a < 5$ ，

故答案为： $[1, 5)$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/217125061126010051>