2023年新高考全国Ⅰ卷模拟测试卷07

一、单选题

1．设集合 $A=\{x\mid -1\le x<3\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，则 $A\cap B=$（　）

A．$\{1\}$　　B．$\{1,2\}$　　C．$\{2,3\}$　　D．$\{1,2,3\}$

【答案】B

【分析】由交集的定义求解即可.

【解析】因为集合 $A=\{x\mid -1\le x<3\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，

则 $A\cap B=\{1,2\}$.

故选：B.

2．若 $\mathrm{i}(1+z)=2$，则 $\bar{z}=$（　）

A．$-1-2\mathrm{i}$　　B．$-1+2\mathrm{i}$　　C．$1-2\mathrm{i}$　　D．$1+2\mathrm{i}$

【答案】B

【分析】根据复数的运算和共轭复数的定义即可.

【解析】$\because \mathrm{i}(1+z)=2$，

$\therefore z=\dfrac{2}{\mathrm{i}}-1=-2\mathrm{i}-1$.

$\therefore \bar{z}=-1+2\mathrm{i}$.

故选：B.

3．设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，若点 $P(1,m)$ 在抛物线上，且 $|PF|=3$，则 $p=$（　）

A．1　　B．2　　C．4　　D．8

【答案】C

【分析】由抛物线的定义求出 p 的值.

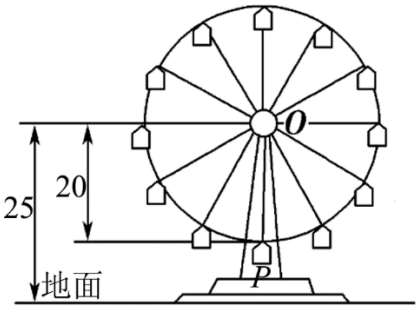
【解析】抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$，准线方程为 $x=-\dfrac{p}{2}$，

点 $P(1,m)$ 在抛物线上，且 $|PF|=3$，由抛物线的定义可知 $1+\dfrac{p}{2}=3$，则 $p=4$.

故选：C

4．红河州个旧市是一个风景优美的宜居城市，如图是个旧宝华公园的摩天轮，半径为 20 米，圆心 O 距地

面的高度为 25 米，摩天轮运行时按逆时针匀速旋转，转一周需要 10 分钟.摩天轮上的点 P 的起始位置在最低点处.若游客在距离地面至少 35 米的高度能够将个旧市区美景尽收眼底，则摩天轮转动一周内具有最佳视觉效果的时间长度（单位：分钟）为（　）



A．$\frac{8}{3}$　　B．3　　C．$\frac{10}{3}$　　D．$\frac{11}{3}$

【答案】C

【分析】先设出高度 h 与时间 t 的函数解析式为 $h=A\sin(\omega t+\varphi)+b$，利用三角函数的性质及特殊点求出解析式，通过解三角函数不等式得到答案..

【解析】设点 P 距离地面高度 h 与时间 t 的函数

解析式为 $h=A\sin(\omega t+\varphi)+b$，

由题意，得 $A=20$，$b=25$，$T=10$，

所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{\pi}{5}$，

又因为 $f(0)=5$，所以 $\varphi=-\frac{\pi}{2}$，

所以 $h=20\sin\left(\frac{\pi}{5}t-\frac{\pi}{2}\right)+25=25-20\cos\frac{\pi}{5}t(t\geq 0)$，

令 $\begin{cases}h\geq 35\\0\leq t\leq 10\end{cases}$，即 $\begin{cases}\cos\frac{\pi}{5}t\leq -\frac{1}{2}\\0\leq t\leq 10\end{cases}$，

故 $\frac{10}{3}\leq t\leq\frac{20}{3}$，即在摩天轮转动的一圈内，

有 $\frac{20}{3}-\frac{10}{3}=\frac{10}{3}$ 分钟会有这种最佳视觉效果.

故选：C.

5．美味可口的哈根达斯蛋筒冰激凌可近似看作半径相等的一个半球和一个圆锥组成，如实物图，已知冰激凌的表面积为 5π，底部圆锥的母线为 3，则冰激凌的体积为（　）



A．$\frac{2\pi}{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$　　B．$\frac{\pi}{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$　　C．$\frac{\pi}{3}\left(1+\sqrt{3}\right)$　　D．$\frac{2\pi}{3}\left(1+\sqrt{3}\right)$

【答案】A

【分析】根据球的表面积以及圆锥的侧面积求得$R=1$，再根据球、圆锥的体积运算求解.

【解析】设球的半径为$R>0$，

则冰激凌的表面积为$\frac{1}{2}\times 4\pi R^2+\pi\times 3\times R=2\pi R^2+3\pi R=5\pi$，解得$R=1$，

可得圆锥的高$h=\sqrt{3^2-R^2}=2\sqrt{2}$，

所以冰激凌的体积$V=V_{半球}+V_{圆锥}=\frac{1}{2}\times\frac{4}{3}\pi R^3+\frac{1}{3}\times\pi R^2\times h=\frac{2\pi}{3}\left(1+\sqrt{2}\right)$.

故选：A.

6．在$\triangle ABC$中，$AC=1$，$AB=2$，$\cos A=\frac{1}{8}$，点D在直线BC上，满足$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}$，则$\left|\overrightarrow{AD}\right|=$（　）.

A．$\sqrt{6}$　　B．$\sqrt{7}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．3

【答案】B

【分析】由题意和$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$可得$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{BC}$，即$C$为$BD$的中点，进而$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\left|2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|^2$，结合平面数量积的定义和运算律计算即可求解.

【解析】由题意知，$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$，

则$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{AC}-2\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{BC}$，得$C$为$BD$的中点，

所以$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$，得$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$，

有$\left|\overrightarrow{AD}\right|^2=\left|2\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right|^2=4\left|\overrightarrow{AC}\right|^2-4\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\left|\overrightarrow{AB}\right|^2=4-4\times 1\times 2\times\frac{1}{8}+4=7$，

所以$\left|\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{7}$.

故选：B.

7．在递增等比数列$\{a_n\}$中，其前n项和为S_n，且$6a_7$是a_8和a_9的等差中项，则$\frac{S_6}{S_3}=$（　）

A．28　　B．20　　C．18　　D．12

【答案】A

【分析】由等比数列的通项公式求出q，再由等比数列的前n项和公式代入化简即可得出答案.

【解析】根据题意得$12a_7=a_8+a_9$，$12=q+q^2$，解得$q=3$或$q=-4$（舍），

则$\dfrac{S_6}{S_3}=\dfrac{\dfrac{a_1\left(1-q^6\right)}{1-q}}{\dfrac{a_1\left(1-q^3\right)}{1-q}}=\dfrac{1-q^6}{1-q^3}=1+q^3=1+3^3=28$.

故选：A.

8．已知函数$f(x)=x-\dfrac{1}{x}-m\ln x$有三个零点$x_1,x_2,x_3$，其中$m\in\mathbf{R}$，则$mx_1x_2x_3$的取值范围是（　）

A．$(1,+\infty)$　　B．$(2,+\infty)$　　C．$(e,+\infty)$　　D．$(3,+\infty)$

【答案】B

【分析】根据解析式得$f(1)=0$，由$f(t)=0$，得$f(\dfrac{1}{t})=0$，设$x_1<x_2<x_3$，则$x_1\cdot x_3=1,x_2=1$，从而可得$mx_1x_2x_3=m$，求解导函数$f'(x)=\dfrac{x^2-mx+1}{x^2}$，分类讨论$m\le 2$与$m>2$两种情况下函数的单调性，从而可得答案.

【解析】定义域为$(0,+\infty)$，显然$f(1)=1-\dfrac{1}{1}-m\ln 1=0$，

若t是零点，则$f(t)=t-\dfrac{1}{t}-m\ln t=0$，

$f(\dfrac{1}{t})=\dfrac{1}{t}-t-m\ln\dfrac{1}{t}=-\left(t-\dfrac{1}{t}-m\ln t\right)=0$，

所以$\dfrac{1}{t}$也是零点，函数$f(x)=x-\dfrac{1}{x}-m\ln x$有三个零点$x_1,x_2,x_3$，

不妨设$x_1<x_2<x_3$，则$x_1\cdot x_3=1,x_2=1$，

所以$mx_1x_2x_3=m$，$f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{m}{x}=\dfrac{x^2-mx+1}{x^2}$，

当$m\le 2$时，结合定义域和判别式易知$f'(x)>0$恒成立，

即函数$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，不符合题意；

当$m>2$时，设$x^2-mx+1=0$的两根分别为x_4,x_5，

易知$0<x_4<1<x_5$，所以函数$f(x)$在$(0,x_4)$上单调递增，

在(x_4,x_5)上单调递减，在$(x_5,+\infty)$上单调递增，

当$x\to 0$时，$f(x)\to -\infty$，$f\left(x_4\right)>f\left(1\right)=0$，

$f\left(x_5\right)<f\left(1\right)=0$，当$x\to +\infty$，$f(x)\to +\infty$，

所以由零点存在定理易知有三个零点，满足题意.

综上，$mx_1x_2x_3$的取值范围是$(2,+\infty)$

故选：B

【点睛】求解本题的关键是根据函数解析式$f(x)=x-\frac{1}{x}-m\ln x$得若$t$是零点，$\frac{1}{t}$也是零点，从而得$x_1\cdot x_3=1,x_2=1$，所以求$mx_1x_2x_3$的取值范围即求$m$的取值范围，然后求解导函数，利用导数分类讨论函数的单调性即可.

二、多选题

9．设m，n为不同的直线，α，β为不同的平面，则下列结论中正确的是（　）

A．若$m//\alpha$，$n//\alpha$，则$m//n$　　B．若$m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则$m//n$

C．若$m//\alpha$，$m\subset\beta$，则$\alpha//\beta$　　D．若$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$m\perp n$，则$\alpha\perp\beta$

【答案】BD

【分析】根据线线、线面、面面的位置关系，逐一分析各选项即可得答案.

【解析】解：对A：若$m//\alpha$，$n//\alpha$，则$m//n$或m与n相交或m与n异面，故选项A错误；

对B：若$m\perp\alpha$，$n\perp\alpha$，则$m//n$，故选项B正确；

对C：若$m//\alpha$，$m\subset\beta$，则$\alpha//\beta$或α与β相交，故选项C正确；

对D：若$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$，$m\perp n$，则$\alpha\perp\beta$，故选项D正确.

故选：BD.

10．已知函数$f\left(x\right)$的图象是由函数$y=2\sin x\cos x$的图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位得到，则（　）

A．$f\left(x\right)$的最小正周期为π

B．$f\left(x\right)$在区间$\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增

C．$f\left(x\right)$的图象关于直线$x=\frac{\pi}{3}$对称

D．$f\left(x\right)$的图象关于点$\left(\frac{\pi}{6},0\right)$对称

【答案】AD

【分析】用二倍角公式化简 $y=2\sin x\cos x$，向右平移后得 $f\left(x\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，分别代入正弦函数的单调区间，对称轴，对称中心分别对四个选项判断即可.

【解析】因为 $y=2\sin x\cos x=\sin 2x$，向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得 $f\left(x\right)=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，则最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{2}=\pi$，故 A 选项正确；

令 $-\frac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+2k\pi$，解得 $-\frac{\pi}{12}+k\pi\le x\le\frac{5\pi}{12}+k\pi$，所以单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{12}+k\pi,\frac{5\pi}{12}+k\pi\right],k\in Z$，故 B 选项错误；

令 $2x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi$, 解得 $x=\frac{5\pi}{12}+\frac{k\pi}{2},k\in Z$，故 C 选项错误；

令 $2x-\frac{\pi}{3}=k\pi$, 解得 $x=\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in Z$ 所以函数 $f\left(x\right)$ 的对称中心为 $\left(\frac{\pi}{6}+k\pi,0\right),k\in Z$，故 D 选项正确.

故选：AD

11．某单位为了解该单位党员开展学习党史知识活动情况，随机抽取了 30 名党员，对他们一周的党史学习时间进行了统计，统计数据如下.则下列对该单位党员一周学习党史时间的叙述，正确的有（　）

党史学习时间（小时）	7	8	9	10	11
党员人数	4	8	7	6	5

A．众数是 8　　B．第 40 百分位数为 8

C．平均数是 9　　D．上四分位数是 10

【答案】ACD

【分析】通过分析 30 名党员党史学习时间表，即可得出众数，平均数，第 40 位百分数和上四分位数.

【解析】由题意，

随机抽取 30 名党员，

由图可知，党史学习时间为 8 小时的人最多，为 8 人，故众数是 8，A 正确；

$\because 30\times 40\%=12$

第 40 百分数为：$\frac{8+9}{2}=8.5$，故 B 错误；

$\because$平均数：$\frac{1}{30}\times\left(7\times 4+8\times 8+9\times 7+10\times 6+11\times 5\right)=9$，

故 C 正确.

$\because 30\times 75\% = 22.5$

上四分位数是第 23 项数据，为 10，故 D 正确；

故选：ACD.

12．已知点集 $M=\left\{(x,y)\,|\,\sqrt{x+y+1}\cdot\sqrt{x-y+1}=1, x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}\right\}$，且 P，$Q\in M$，$A(-1,0)$，点 O 是坐标原点，下列说法正确的是（　）

A．点集 M 表示的图形关于 x 轴对称

B．存在点 P 和点 Q，使得 $AP\perp AQ$

C．若直线 PQ 经过点 $(\sqrt{2}-1,0)$，则 $|PQ|$ 的最小值为 2

D．若直线 PQ 经过点 $(1,0)$，且 $\triangle OPQ$ 的面积为 $\sqrt{5}$，则直线 PQ 的方程为 $x\pm\sqrt{2}y-1=0$

【答案】ACD

【分析】根据点 $(x,y)\in M$ 得 $(x,-y)\in M$ 可判断 A，将 $\sqrt{x+y+1}\cdot\sqrt{x-y+1}=1$ 化简为 $(x+1)^2-y^2=1(x\geq 0)$，可知点集 M 表示双曲线的右支，结合双曲线 $x^2-y^2=1$ 与 $(x+1)^2-y^2=1(x\geq 0)$ 的关系可判断 B,C，利用韦达定理和弦长公式、点到直线的距离公式可判断 D.

【解析】A 选项：任取点 $(x,y)\in M$，则 $\sqrt{x+y+1}\cdot\sqrt{x-y+1}=1$，

因此 $\sqrt{x-(-y)+1}\cdot\sqrt{x+(-y)+1}=1$，则 $(x,-y)\in M$，

因此点集 M 表示的图形关于 x 轴对称，故 A 正确；

B 选项：$\sqrt{x+y+1}\cdot\sqrt{x-y+1}=1$ 可化简为 $(x+1)^2-y^2=1(x\geq 0)$，

因此点集 M 表示焦点在 x 轴上的双曲线的右支，

且该曲线由双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右支向左平移一个单位长度得到，

则该曲线的渐近线方程为 $y=\pm(x+1)$，两条渐近线是互相垂直的，

因为点集 M 表示的曲线的渐近线可以由双曲线 $x^2-y^2=1$ 的渐近线向左平移一个单位长度得到，

因为 $A(-1,0)$ 在两条渐近线的交点处，所以 $\angle PAQ<90^\circ$，

因此不存在点 P 和点 Q，使得 $AP\perp AQ$，故 B 错误；

C 选项：因为点 $(\sqrt{2}-1,0)$ 是曲线 $(x+1)^2-y^2=1(x\geq 0)$ 的右焦点，

因为在双曲线的一支上的所有焦点弦中，通径最短所以 $|PQ|\geq 2$，故 C 正确；

D 选项：设直线 PQ 的方程为 $x=my+1$，

与方程 $(x+1)^2-y^2=1$ 联立，化简得 $\left(m^2-1\right)y^2+4my+3=0$ $(|m|>1)$，

设 $P\left(x_1,y_1\right)$，$Q\left(x_2,y_2\right)$，则 $y_1+y_2=-\dfrac{4m}{m^2-1}$，$y_1y_2=\dfrac{3}{m^2-1}$，

因此 $|PQ|=\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}=2\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{\dfrac{m^2+3}{\left(m^2-1\right)^2}}$，

又点 O 到直线 PQ 的距离是 $\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}$，

所以 $\triangle OPQ$ 的面积为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}\times2\sqrt{1+m^2}\times\sqrt{\dfrac{m^2+3}{\left(m^2-1\right)^2}}=\sqrt{\dfrac{m^2+3}{\left(m^2-1\right)^2}}=\sqrt{5}$，

考虑到 $|m|>1$，因此得 $m=\pm\sqrt{2}$，从而直线 PQ 的方程为 $x\pm\sqrt{2}y-1=0$，故 D 正确，

故选：ACD.

【点睛】关键点点睛：本题的关键在于将 $\sqrt{x+y+1}\cdot\sqrt{x-y+1}=1$ 化简为 $(x+1)^2-y^2=1\left(x\geq0\right)$，从而该曲线表示由双曲线 $x^2-y^2=1$ 的右支向左平移一个单位长度得到，从而利用双曲线 $x^2-y^2=1$ 性质即可求解相关问题.

三、填空题

13．已知实数 a，b 满足 $\lg a+\lg b=\lg\left(a+2b\right)$，则 $a+b$ 的最小值是_____.

【答案】$3+2\sqrt{2}$

【分析】先判断出 $a>0,b>0$，且 $ab=a+2b$.令 $u=a+b$，利用判别式法求出 $a+b$ 的最小值.

【解析】因为实数 a，b 满足 $\lg a+\lg b=\lg\left(a+2b\right)$，

所以 $a>0,b>0$，且 $ab=a+2b$.

令 $u=a+b$，则 $u>0$，所以 $a=u-b$，

代入 $ab=a+2b$，则有 $\left(u-b\right)b=u-b+2b$，

所以关于 b 的一元二次方程 $b^2-\left(u-1\right)b+u=0$ 有正根，

只需 $\Delta=\left(u-1\right)^2-4u\geq0$，解得：$u\geq3+2\sqrt{2}$.

此时，关于 b 的一元二次方程 $b^2-\left(u-1\right)b+u=0$ 的两根 $b_1b_2=u>0$，所以两根同号，只需 $b_1+b_2=u-1>0$

，解得$u>1$.

综上所述：$u\geq 3+2\sqrt{2}$.

即$a+b$的最小值是$3+2\sqrt{2}$（此时$\Delta=0$，解得：$a=2+\sqrt{2},b=1+\sqrt{2}$）.

故答案为：$3+2\sqrt{2}$.

14．已知等比数列{an}，an＞0，n∈N*，且$2a_1+3a_2=33$，$9a_3^2=a_2a_6$，则a_{2020}=_____

【答案】3^{2020}

【分析】利用等比数列的通项公式即可得出.

【解析】解：由题意设数列$\{a_n\}$的公比为$q(q>0)$，

由题意有$\begin{cases}2a_1+3a_1q=33\\9a_3^2=a_4^2=a_3^2q^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1=3\\q=3\end{cases}$，

$\therefore a_{2020}=3\cdot 3^{2019}=3^{2020}$，

故答案为：3^{2020}.

【点睛】本题主要考查等比数列的通项公式的基本量的计算，属于基础题.

15．已知双曲线$C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点分别为$F_1,F_2$，$M$为$C$左支上一点，$N$为线段$MF_2$上一点，且$|MN|=|MF_1|$，$P$为线段$NF_1$的中点.若$|F_1F_2|=4|OP|$($O$为坐标原点)，则$C$的渐近线方程为_____.

【答案】$y=\pm\sqrt{3}x$

【分析】由$|F_1F_2|=4|OP|$，可得$|NF_2|=2|OP|=c$，再结合双曲线的定义可得$c=2a$，从而可求出$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$，进而可求出渐近线方程

【解析】因为$|F_1F_2|=4|OP|$，所以$|OP|=\frac{c}{2}$，所以$|NF_2|=2|OP|=c$，又$|MF_2|-|MF_1|=|NF_2|=2a$，所以$c=2a$，所以$a^2+b^2=4a^2$，则$\frac{b}{a}=\sqrt{3}$.

故C的渐近线方程为$y=\pm\sqrt{3}x$.

故答案为：$y=\pm\sqrt{3}x$

16．在空间直角坐标系$O-xyz$中，三元二次方程所对应的曲面统称为二次曲面．比如方程$x^2+y^2+z^2=1$表示球面，就是一种常见的二次曲面．二次曲而在工业、农业、建筑等众多领域应用广泛．已知点$P(x，y，z)$

是二次曲面$4x^2-xy+y^2-z=0$上的任意一点，且$x>0$，$y>0$，$z>0$，则当$\frac{z}{xy}$取得最小值时，$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)$的最大值为_____.

【答案】$\frac{2}{3}$

【分析】由题设有$z=4x^2-xy+y^2$，利用基本不等式求得$\frac{z}{xy}\geq 3$并求对应x、y的数量关系，进而得到$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}$，令$t=\frac{1}{x}>0$构造$f(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}$，应用导数求最大值即可.

【解析】由题设，$z=4x^2-xy+y^2$，故$\frac{z}{xy}=\frac{4x}{y}+\frac{y}{x}-1\geq 2\sqrt{\frac{4x}{y}\cdot\frac{y}{x}}-1=3$，当且仅当$y=2x$时等号成立，

所以，此时$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{xy}-\frac{1}{xz}=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{6x^3}$，

令$t=\frac{1}{x}>0$，则$f(t)=\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}$，故$f'(t)=\frac{t(2-t)}{2}$，

所以，当$0<t<2$时$f'(t)>0$，当$t>2$时$f'(t)<0$，即$f(t)$在$(0,2)$上递增，在$(2,+\infty)$上递减.

故$f(t)\leq f(2)=\frac{2}{3}$，且$x=\frac{1}{2},y=1$时等号成立，

综上，$\frac{1}{x}\left(\frac{1}{y}-\frac{1}{z}\right)$的最大值为$\frac{2}{3}$.

故答案为：$\frac{2}{3}$.

【点睛】关键点点睛：应用基本不等式求$\frac{z}{xy}$的最小值及对应x、y的关系，再把目标式转化为关于x的函数式，构造函数结合导数求最值.

四、解答题

17．已知数列$\{a_n\}$（$n\in \mathrm{N}_+$）满足$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{3n+3}{n}a_n$，且$b_n=\frac{a_n}{n}$.

(1)求数列$\{b_n\}$是通项公式；

(2)求数列$\{a_n\}$的前n项和S_n.

【答案】(1)$b_n=3^{n-1}$

(2)$S_n=\frac{(2n-1)3^n}{4}+\frac{1}{4}$

【分析】（1）将a_n换为nb_n代入$a_{n+1}=\frac{3n+3}{n}a_n$中化简，根据定义即可判断$\{b_n\}$为等比数列，由首项公比写出通项公式即可；

（2）由（1）中的通项公式求得a_n，再利用乘公比错位相减得出前 n 项和即可.

【解析】（1）解：因为$a_{n+1}=\frac{3n+3}{n}a_n$，所以$\frac{a_{n+1}}{n+1}=3\frac{a_n}{n}$，

又$b_n=\frac{a_n}{n}$，所以$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}}{n+1}$，所以$\frac{b_{n+1}}{b_n}=3$，又$b_1=a_1=1$，

所以数列$\{b_n\}$是以 1 为首项，3 为公比的等比数列，所以$b_n=3^{n-1}$；

（2）由（1）知，$b_n=\frac{a_n}{n}=3^{n-1}$，所以$a_n=n\cdot 3^{n-1}$，

所以$S_n=1\cdot 3^0+2\cdot 3^1+3\cdot 3^2+4\cdot 3^3+\cdots+(n-1)\cdot 3^{n-2}+n\cdot 3^{n-1}$，

$3S_n=1\cdot 3^1+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+4\cdot 3^4+\cdots+(n-1)\cdot 3^{n-1}+n\cdot 3^n$，

两式相减可得：$-2S_n=3^0+3^1+3^2+3^3+3^4+\cdots+3^{n-1}-n\cdot 3^n$，

所以$-2S_n=\frac{3^n-1}{2}-n\cdot 3^n$，故$S_n=\frac{(2n-1)3^n}{4}+\frac{1}{4}$.

18．在$\triangle ABC$中,角A,B,C的对边分别为a,b,c,已知$(2a+c)\cos B+b\cos C=0$.

(1)求B;

(2)若$a=3$,点D在AC边上且$BD\perp AC$,$BD=\frac{15\sqrt{3}}{14}$,求c.

【答案】(1)$B=\frac{2\pi}{3}$

(2)5

【分析】(1)在$\triangle ABC$中,将正弦定理代入$(2a+c)\cos B+b\cos C=0$中,移项化简可得$\cos B=-\frac{1}{2}$解出即可;

(2)先用余弦定理得三角形边之间关系,再根据等面积法,可得b,c之间关系,两式联立即可得出边长c.

【解析】（1）解:由题知,$(2a+c)\cos B+b\cos C=0$,

在$\triangle ABC$中,由正弦定理得:

$(2\sin A+\sin C)\cos B+\sin B\cos C$

$=2\sin A\cos B+\sin C\cos B+\sin B\cos C$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/217161111016006165