3.4 典型激光器速率方程

- 表征激光器腔内光子数和工作物质各有关能级上的原子数随时间变化的微分方程组，称为激光器速率方程组(rate equations)。
- 归纳共性，针对一些简化的、具有代表性的模型列出速率方程组，所谓的三能级和四能级系统。
- **激光速率方程理论的出发点是原子的自发辐射、受激辐射和受激吸收概率的基本关系式。**

1 爱因斯坦采用唯象法得到光和物质相互作用的关系式

$$\left(\frac{dn_{21}}{dt}\right)_{sp} = A_{21}n_2$$

$$\left(\frac{dn_{21}}{dt}\right)_{st} = W_{21}n_2, W_{21} = B_{21}\rho_\nu$$

$$\left(\frac{dn_{12}}{dt}\right)_{st} = W_{12}n_1, W_{12} = B_{12}\rho_\nu$$

$$\frac{A_{21}}{B_{21}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} = n_\nu h\nu, B_{12}f_1 = B_{21}f_2$$

2 考虑线型函数后必要的修正

线型函数可以理解为跃迁概率按频率的分布函数

$$P(\nu)=P\tilde{g}(\nu,\nu_0)=n_2 h\nu_0 A_{21}\tilde{g}(\nu,\nu_0)=n_2 h\nu_0 A_{21}(\nu)$$

$$A_{21}(\nu)=A_{21}\tilde{g}(\nu,\nu_0) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty}A_{21}(\nu)d\nu=\int_{-\infty}^{+\infty}A_{21}\tilde{g}(\nu,\nu_0)d\nu=A_{21}$$

$A_{21}(\nu)$表示在总自发跃迁概率A_{21}中，分配在频率ν处单位频率内的自发跃迁概率； $W_{21}(\nu)$表示在辐射场ρ_ν作用下的总受激跃迁概率W_{21}中，分配在频率ν处单位频率内的受激跃迁概率

$$B_{21}(\nu)=B_{21}\tilde{g}(\nu,\nu_0)=\frac{c^3}{8\pi h\nu^3}A_{21}(\nu)$$

$$B_{21}=\frac{c^3}{8\pi h\nu^3}A_{21}=\frac{c^3}{8\pi h\nu^3}\frac{A_{21}(\nu)}{\tilde{g}(\nu,\nu_0)}$$

$$W_{21}(\nu)=B_{21}(\nu)\rho_\nu=B_{21}\tilde{g}(\nu,\nu_0)\rho_\nu$$

对表达式进行修正

$$\left(\frac{dn_{21}}{dt}\right)_{sp} = \int_{-\infty}^{+\infty} n_2 A_{21}(\nu)\,d\nu = n_2 A_{21}$$

$$\left(\frac{dn_{21}}{dt}\right)_{st} = \int_{-\infty}^{+\infty} n_2 W_{21}(\nu)\,d\nu = n_2 B_{21} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\nu,\nu_0)\rho_\nu\,d\nu$$

该积分与辐射场ρ_ν的带宽$\Delta\nu'$有关。

A: 原子和连续光辐射场的相互作用，$\Delta\nu' >> \Delta\nu$

B: 原子和准单色光辐射场相互作用，$\Delta\nu' << \Delta\nu$

3 原子和准单色光相互作用

- **由于激光的高度单色性，认为原子和准单色光相互作用，辐射场ρ_ν'的中心频率为ν，带宽为$\Delta\nu'$，且$\Delta\nu' << \Delta\nu$。被积函数只在中心频率ν附近的一个极窄范围内才有非零值。在此频率范围内，$\tilde{g}(\nu', \nu_0)$可以近似看成不变。**
- 引入δ函数$\rho_\nu' = \rho\delta(\nu' - \nu)$

ρ表示频率为ν的准单色光辐射场的总能量密度，Jm^{-3}

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\nu' d\nu' = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho\delta(\nu' - \nu) d\nu' = \rho$$

$$\left(\frac{dn_{21}}{dt}\right)_{st} = n_2 B_{21} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{g}(\nu', \nu_0) \rho\delta(\nu' - \nu) d\nu' = n_2 B_{21} \tilde{g}(\nu, \nu_0) \rho$$

- 在频率为ν的单色辐射场的作用下，受激跃迁概率为

$$W_{21}=B_{21}\tilde{g}(\nu,\nu_0)\rho \qquad W_{12}=B_{12}\tilde{g}(\nu,\nu_0)\rho$$

由于谱线加宽，和原子相互作用的单色光的频率ν并不一定要精确等于原子发光的中心频率ν_0才能产生受激跃迁，而是在$\nu=\nu_0$附近一个频率范围内都能产生受激跃迁。在$\nu=\nu_0$时跃迁几率最大；当ν偏离ν_0时，跃迁几率急剧下降。

激光器内ρ与第l模内的光子数密度N_l的关系为$\rho=N_l h\nu$

$$W_{21}=\sigma_{21}(\nu,\nu_0)\upsilon N_l$$

$$W_{12}=\sigma_{12}(\nu,\nu_0)\upsilon N_l$$

υ为工作物质中的光速

4 发射截面和吸收截面

- **$\sigma_{21}(\nu,\nu_0)$和$\sigma_{12}(\nu,\nu_0)$分别称为发射截面和吸收截面，它们具有面积的量纲**

$$\sigma_{21}(\nu,\nu_0)=\frac{A_{21}\upsilon^2}{8\pi\nu_0^2}\tilde{g}(\nu,\nu_0)$$

$$\sigma_{12}(\nu,\nu_0)=\frac{f_2}{f_1}\frac{A_{21}\upsilon^2}{8\pi\nu_0^2}\tilde{g}(\nu,\nu_0)$$

中心频率处的发射截面与吸收截面最大。当$\nu=\nu_0$时，均匀加宽物质和非均匀加宽物质的发射截面分别为

$$\sigma_{21}=\frac{\upsilon^2 A_{21}}{4\pi^2\nu_0^2\Delta\nu_H},\sigma_{21}=\frac{\sqrt{\ln 2}\upsilon^2 A_{21}}{4\pi^{3/2}\nu_0^2\Delta\nu_D}$$

洛伦兹线型　　　　　　高斯线型

$$W_{21}=\frac{A_{21}\tilde{g}(\nu,\nu_0)}{n_\nu}N_l=\frac{A_{21}\tilde{g}(\nu,\nu_0)}{n_\nu V}N_lV=\frac{A_{21}\tilde{g}(\nu,\nu_0)}{n_\nu V}n_l \qquad n_\nu=\frac{8\pi\nu^2}{c^3}$$

$$\frac{W_{21}}{n_l}=a_l=\frac{A_{21}\tilde{g}(\nu,\nu_0)}{n_\nu V}$$

n_l为腔内第l模内的总光子数

n_ν：腔内单位体积中频率处于ν附近单位频率间隔内的光波模式数

得到：一个模式内的一个光子引起的受激跃迁概率等于分配到同一模式上的自发跃迁几率。

$$W_{21}=a_l n_l, W_{12}=\frac{f_2}{f_1}a_l n_l$$

- 对W_{21}作出近似计算
- 设谱线的总自发辐射跃迁概率为A_{21}，谱线宽度为Δν，并假设A_{21}均匀分配在Δν所包含的所有模式上，则分配在一个模式上的自发辐射跃迁几率为

$$a_l = \frac{A_{21}}{n_\nu V \Delta \nu}$$

$$W_{21} = \frac{A_{21} n_l}{n_\nu V \Delta \nu} = \frac{A_{21}}{n_\nu \Delta \nu} N_l$$

$$W_{12} = \frac{f_2}{f_1} W_{21} = \frac{f_2}{f_1} \frac{A_{21} n_l}{n_\nu V \Delta \nu} = \frac{f_2}{f_1} \frac{A_{21} N_l}{n_\nu \Delta \nu}$$

5 单模振荡速率方程组

三能级系统速率方程组：各能级集居数随时间变化的方程和激光器腔内的光子数密度随时间变化的规律

n为单位体积工作物质内的总粒子数，第l个模式的光子寿命为τ_{Rl}，工作物质长度l等于腔长L。

$$\frac{dn_3}{dt} = n_1 W_{13} - n_3(S_{32} + A_{31})$$

$$\frac{dn_2}{dt} = n_1 W_{12} - n_2 W_{21} - n_2(S_{21} + A_{21}) + n_3 S_{32}$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = n$$

$$\frac{dN_l}{dt} = n_2 W_{21} - n_1 W_{12} - \frac{N_l}{\tau_{Rl}}$$