多自由度系统振动

3.1 多自由度系统的数学模型

3.1.1 多自由度系统的基本概念

用多于一个的有限独立坐标描述的振动系统，称为多自由度系统。

实际工程结构经过适当的离散或简化，可以简化成由有限个无弹性的质量（惯性元件），质点到刚体，有限个无质量的弹簧（弹性元件）和阻尼器（阻尼元件）组成。由无惯性的弹性元件和阻尼元件连接的质点系或质点刚体系，也称集中参数系统，反之称分布参数系统。

对于 m 个质点的质点系，共约束是 r 个，那么广义坐标系 n＝3m－r 个， 也就是有 n 个自由度数。

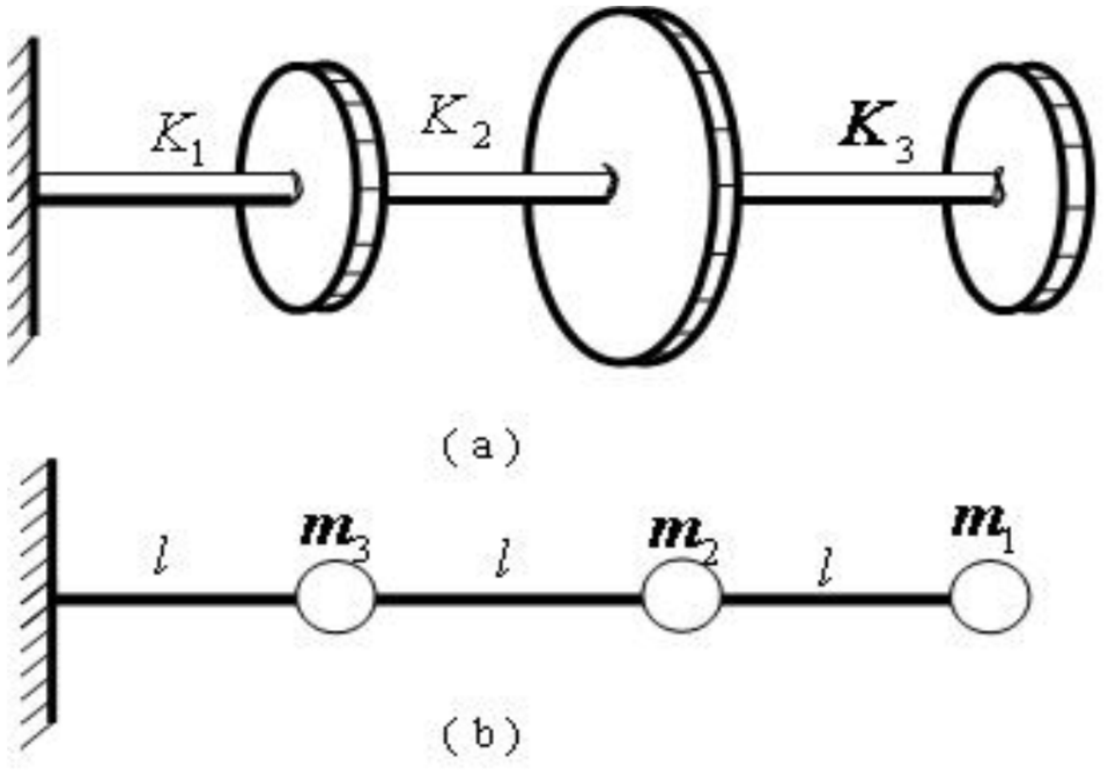


图 3-1

刚体在空间运动有六个 DOF

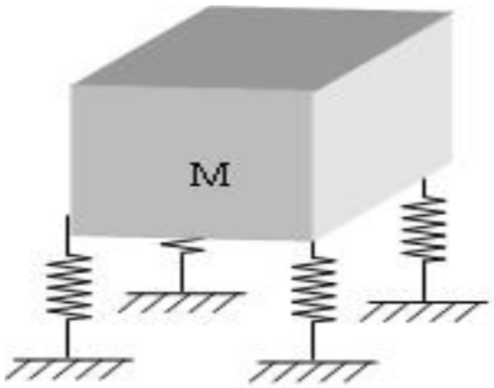
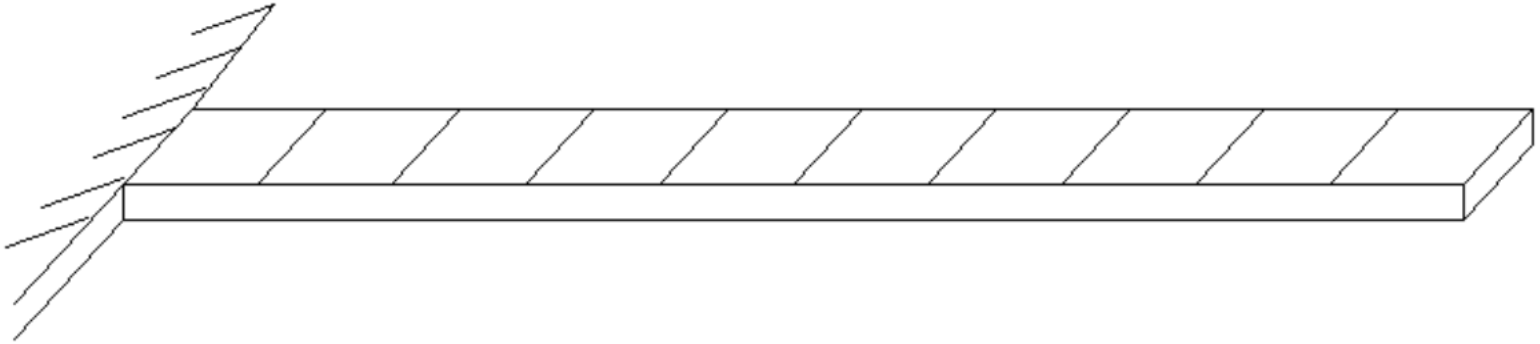


图 3-2

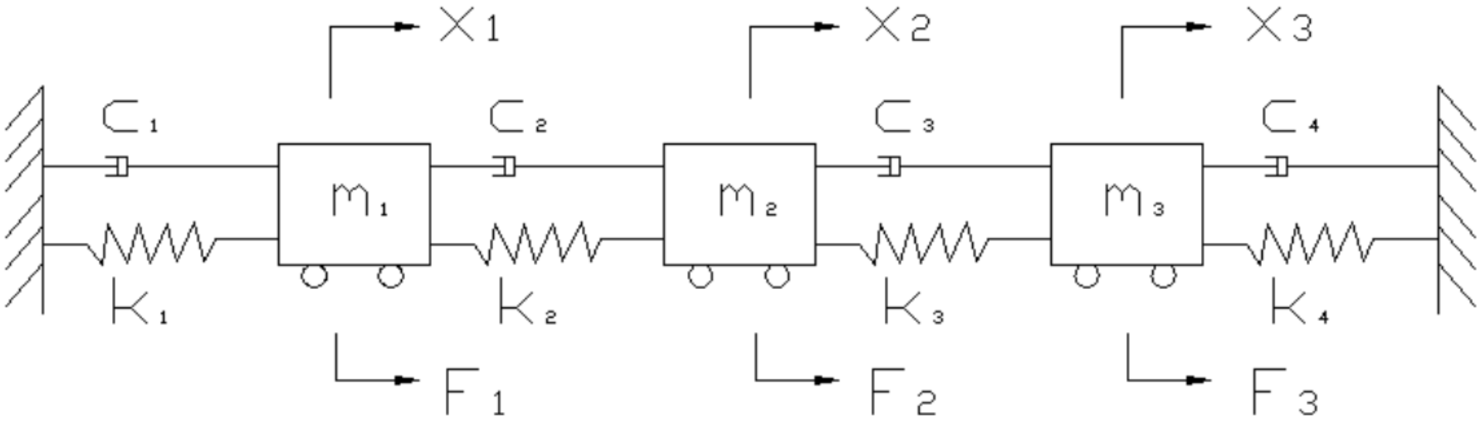
有限单元法将连续体离散成若干有限单元构成



3.1.2 多自由度系统振动微分方程（动力学方程，运动控制方程）的建立。

可用牛顿力学与分析力学的任何一种方法均可，常用的牛顿第二定律、达朗贝尔原理，**Lagrange**第二类方程。

例 1：



$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 + c_4 \end{bmatrix}$$

例 2

跨度为

$$c = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$$

$4l$ ，每跨之间均为 l ，抗弯刚度为 EI 的梁

可用材料力学的知识得到各响应系数，即在 m_j

作用单位力后在 m_i α_{ij}

$$\alpha_{22} = \frac{16}{12}\frac{l^3}{EI} \qquad \alpha_{11} = \alpha_{33} = \frac{9}{12}\frac{l^3}{EI}$$

$$\alpha_{13} = \alpha_{31} = \frac{7}{12}\frac{l^3}{EI} \qquad \alpha_{23} = \alpha_{32} = \alpha_{12} = \alpha_{21} = \frac{11}{12}\frac{l^3}{EI}$$

作用单位力后在 m_i α_{ij} 上产

$$y_1 = \left(F_1 - m_1 \ddot{y}_1\right)\alpha_{11} + \left(F_2 - m_2 \ddot{y}_2\right)\alpha_{12} + \left(F_3 - m_3 \ddot{y}_3\right)\alpha_{13}$$

$$y_2 = \left(F_1 - m_1 \ddot{y}_1\right)\alpha_{21} + \left(F_2 - m_2 \ddot{y}_2\right)\alpha_{22} + \left(F_3 - m_3 \ddot{y}_3\right)\alpha_{23}$$

$$y_3 = \left(F_1 - m_1 \ddot{y}_1\right)\alpha_{31} + \left(F_2 - m_2 \ddot{y}_2\right)\alpha_{32} + \left(F_3 - m_3 \ddot{y}_3\right)\alpha_{33}$$

$$\begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} = \alpha \cdot \begin{Bmatrix} F_1 - m_1 \ddot{y}_1 \\ F_2 - m_2 \ddot{y}_2 \\ F_3 - m_3 \ddot{y}_3 \end{Bmatrix} = \alpha \cdot (F - M \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \\ \ddot{y}_3 \end{Bmatrix})$$

$$Y = \alpha(F - M\ddot{Y}) \Rightarrow M\ddot{Y} + \alpha^{-1}Y = F$$

$$M\ddot{Y} + kY = F$$

通常当质点较多，约束比较复杂时，适合用能量分析方法，例如 **Lagrange** 第 **2** 类方程。**m** 个质点，**r**

个约束，**n** 个广义坐标 $q_i\ (i=1,2,\ldots,n)$

$$n = 3m - r$$

$$r_k = r_k\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right)$$

$$V_k = \frac{dr_k}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_k}{\partial q_i}\cdot\frac{dq_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_k}{\partial q_i}\cdot \dot{q}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{m} m_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial r_k}{\partial q_j}\right)\cdot \dot{q}_i\dot{q}_j$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2} m_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j = \frac{1}{2}\dot{q}^T M \dot{q}$$

显然 $m_{ij} = m_{ji}$ 是对称的。

则 ***T*** 是关于广义速度的二次型，

由于 ***T*>0**，是正定二次型，则 ***M*** 正定对称的。

在完整约束系统中，势能只是定义坐标的函数

$$U = U\left(q_1, q_2, \ldots, q_n\right)$$

U

$$U = U_0 + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial q_i}\bigg|_0 (q_i - 0) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\bigg|_0 (q_i - 0)(q_j - 0) + \ldots\ldots$$

通常将静平衡位置

位置为坐标原点。我

$$U_0 = 0$$

静平衡位置为势能零点，

$$\frac{\partial U}{\partial q_i}\bigg|_0 = 0$$

广义坐标的零点取在静平衡位置上，势能函数是关于广义坐标的二阶以上函数，代入零广义坐标一定为零。由于是微振动，第四项为高阶微量，省略.

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_0 q_i q_j$$

$$k_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_0 \quad \Rightarrow \quad k_{ij} = k_{ji}$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} q^T K q$$

U q $U \geq 0$

的二次型，

对应的广义力，阻尼力，耗散力。系统的第 **k** 个质点受到的阻尼力

$$R_k = -\beta_k \cdot \dot{r}_k$$

$$\Phi = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2}\beta_k \cdot \dot{r}_k \cdot \dot{r}_k = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{2}\beta_k \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial r_k}{\partial q_i} \cdot \frac{dq_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r_k}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} \beta_k \cdot \frac{\partial r_k}{\partial q_i}\frac{\partial r_k}{\partial q_j}\right) \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{2}\dot{q}^T C \dot{q}$$

$c_{ij} = c_{ji}$ **是对称的，** $\Phi \geq 0$ **所以C是正半定的**

代入拉格拉日方程，$L = T - U$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = Q_i$$

通常情况下，势能

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = Q$$

3.2 无阻尼自由振动

3.2.1 多自由度系统的固有频率

$$M\ddot{x} + Kx = 0$$

$$x(t) = \varphi \sin(\omega t + \alpha)$$

$$-M\omega^2\varphi \sin(\omega t + \alpha) + K\varphi \sin(\omega t + \alpha) = 0$$

$$\left(K - M\omega^2\right)\varphi = 0$$

$$\left|K - M\omega^2\right| = 0 \qquad \omega^2$$

i）由 M 正定，K 正半定，由矩阵理论可知，特征根均为正数或零，即有实数的

ω_i ，称ﾀ

ii)

ω_i

有不等实根（多数情况下，多数的实际工程系统）。

$$\omega_1 < \omega_2 \ldots < \omega_n$$

$$\omega_1 = 0$$

但可能

，对应系统有刚性运动（在振动同时伴随有刚体运动）

iii） 有重根，称为亏损系统

3.2.2 系统的主振型

从代数上是一个广义特征值问题，可化为标准特征值问题 $\left|M^{-1}K-I\omega^2\right|=0$ $M^{-1}K$

，其中

M ω_i 称除非

是对角阵。求出 $\left|K-M\omega_i^2\right|\varphi_i=0$ 后回代方程

$$\varphi_i=\left\{\varphi_{1i},\varphi_{2i},\ldots,\varphi_{ni}\right\}^T$$

ϕ_i

$$x^{(i)}(t)=\varphi_i\sin\left(\omega_i t+\alpha_i\right)$$

得到 n 个

，则

$$x^{(i)}(t)=\left\{x_1^{(i)},x_2^{(i)},\ldots,x_n^{(i)}\right\}^T$$

称为第 i 阶主振动

这里的 φ_i 称为第 i 阶主振型，也称第 i 阶模态（modal）。由于没有重根所以，

ω_i

回

个方程不独立

$$\begin{cases} \left(k_{11}-m_{11}\omega_i^2\right)\cdot\varphi_{1i}+\left(k_{12}-m_{12}\omega_i^2\right)\cdot\varphi_{2i}+\ldots+\left(k_{1n}-m_{1n}\omega_i^2\right)\cdot\varphi_{ni}=0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left(k_{n1}-m_{n1}\omega_i^2\right)\cdot\varphi_{1i}+\left(k_{n2}-m_{n2}\omega_i^2\right)\cdot\varphi_{2i}+\ldots+\left(k_{nn}-m_{nn}\omega_i^2\right)\cdot\varphi_{ni}=0 \end{cases}$$

n 个方程中仅有一个不独立，在

$\varphi_{1i},\ldots,\varphi_{ni}$

φ_{1i}

$$\left(k_{22}-m_{22}\omega_i^2\right)\cdot\varphi_{2i}+\ldots+\left(k_{2n}-m_{2n}\omega_i^2\right)\cdot\varphi_{ni}=\left(m_{21}\omega_i^2-k_{21}\right)\varphi_{1i}$$

$$\left(k_{n2}-m_{n2}\omega_i^2\right)\cdot\varphi_{2i}+\ldots+\left(k_{nn}-m_{nn}\omega_i^2\right)\cdot\varphi_{ni}=\left(m_{n1}\omega_i^2-k_{n1}\right)\varphi_{1i}$$

$n-1$ 个方程，$n-1$ 未知数，最终可求出 $\varphi_{2i},\ldots,\varphi_{ni}$ 用 φ_{1i} 表示，

$$\varphi_i=\varphi_{1i}\left\{1,\gamma_2^{(i)},\ldots,\gamma_n^{(i)}\right\}^T$$

n 个振型向量放在一起构成一个矩阵，称为模态矩阵。

$$\Phi=\left[\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_n\right]$$

3.2.3 各阶主振型之间的关系

1）关于 M K ，是加权正交的

$$\varphi_i^T M \varphi_j = 0 \quad \varphi_i^T K \varphi_j = 0 \qquad (i \neq j)$$

，

证明：

由

$$\left(K - M\omega_i^2\right) \cdot \varphi_i = 0$$

$$K\varphi_i = \omega_i^2 M \varphi_i \quad K\varphi_j = \omega_j^2 M \varphi_j$$

，得

φ_j^T φ_i^T 分别前乘

$$\varphi_j^T K \varphi_i = \omega_i^2 \varphi_j^T M \varphi_i$$

，

$$\varphi_i^T K \varphi_j = \omega_j^2 \varphi_i^T M \varphi_j$$

对第（1）式转置有

$$\varphi_i^T K^T \varphi_j = \omega_i^2 \varphi_i^T M^T \varphi_j$$

$$\varphi_i^T K \varphi_j = \omega_i^2 \varphi_i^T M \varphi_j$$

（3）

（2）～（3）得

$$\left(\omega_j^2 - \omega_i^2\right)\varphi_i^T M \varphi = 0$$

$i \neq j$

$\omega_i \neq \omega_j$

由于

$$\varphi_i^T M \varphi_j = 0$$

（4）

，无重根所以

，故有

$$\varphi_i^T K \varphi_j = 0$$

当 $i=j$ 时（4）式恒成立，通常

$$\varphi_i^T M \varphi_i \neq 0$$

令其为

$$M_i = \varphi_i^T M \varphi_i$$

，

称为第 i 阶模态质量，同理

$$k_i = \varphi_i^T K \varphi_i$$

称为第 i 阶模态刚度，且有（由（3）式）：

$$\varphi_i^T K \varphi_i = \omega_i^2 \varphi_i^T M \varphi_i$$

$$\frac{k_i}{M_i} = \omega_i^2 \Rightarrow \omega_i = \sqrt{\frac{k_i}{M_i}}$$

由于 φ_i 各元素取值有一个任意的比例数， M_i k_i 一定任意性

φ_i

的任意

$M_i = 1$

，则

$k_i = \omega_i^2$

$M_i \neq 1$

即在原振型向量的基础上（经计算

$\sqrt{\frac{1}{M_i}}$

$$\varphi_i' = \varphi_i \Big/ \sqrt{M_i}$$

素同乘

M_i

，新的归一化后的振型为

$$\varphi_i^{'T} M \varphi_i' = \frac{1}{M_i} \varphi_i^T M \varphi_i = \frac{M_i}{M_i} = 1$$

则归一化后的

的计算为

每一个振型都这样处理以后，构成的模态矩阵称为归一化模态矩阵。即有

$$\Phi^T M \Phi = \begin{bmatrix} \varphi_1^T \\ \varphi_2^T \\ \\ \varphi_n^T \end{bmatrix} M \left[\varphi_1, \varphi_2, ..\varphi_n\right] = \begin{bmatrix} \varphi_1^T M \varphi_1 & \varphi_1^T M \varphi_2 & \dots & \varphi_1^T M \varphi_n \\ \varphi_2^T M \varphi_1 & \varphi_2^T M \varphi_2 & \dots & \varphi_2^T M \varphi_n \\ \\ \varphi_n^T M \varphi_1 & \varphi_n^T M \varphi_2 & \dots & \varphi_n^T M \varphi_n \end{bmatrix} =$$

$$= diag \begin{bmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & M_n \end{bmatrix} = I$$

$$\Phi^T K \Phi = diag\,\omega_i^2$$

2）各个主振型之间是线性无关的。

证：若主振型之间线性相关，必能找出一组不同时为零的常数 a_i

使得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i = 0$$

假设存在这样一组不同时为零的常数 a_i

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i = 0$$

$\varphi_j^T M$

前乘

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_j^T M \varphi_i = 0 \qquad (1)$$

取

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_j^T M \varphi_i = a_j M_j = 0 \Rightarrow a_j = 0$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

可得

$$a_1 = 0, a_2 = 0, \dots, a_n = 0 \qquad (2)$$

（1）成立意味着，$a_1, a_2, \dots, a_n$ 只能同时为零。所以不存在这样一组系数，振型向量之间线性无关。

3．2．4 自由振动的解。

解法 1：

ω_i φ_i 求出后，第 i 阶主振动可以写为

$$x^{(i)} = \varphi_i \sin(\omega_i t + \alpha_i)$$

$$= a_i \varphi_i' \sin(\omega_i t + \alpha_i)$$

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n} x^{(i)}=\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \varphi_i^{'} \sin(\omega_i t+\alpha_i)$$

a_i 是从 ϕ_i 中提出的那个任意常数，剩下的 $\phi_i^{'}$ 元素值确定的向量，有条件确定。

$$\begin{cases} x(0)=x_0 \\ \dot{x}(0)=\varphi_0 \end{cases}$$

2n 个方程求解麻烦

解法 2：**模态叠加法**。

若求出归一化后的各个 φ_i 后，建立模态矩阵

$$\Phi=[\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n]$$

$$\xi=[\xi_1\dots\xi_n]^T$$

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\varphi_i$$

$$x=\Phi\xi$$

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi_1\varphi_{11} + \xi_2\varphi_{12} + \ldots \xi_n\varphi_{1n} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \xi_1\varphi_{n1} + \xi_2\varphi_{n2} + \ldots \xi_n\varphi_{nn} \end{Bmatrix}$$

各阶主模态的叠加，

ξ_i 是第 i 阶模态的参与因子。

代入方程有

$$M\Phi\ddot{\xi} + K\Phi\xi = 0$$

前乘 Φ^T

$$\Phi^T M\Phi\ddot{\xi} + \Phi^T K\Phi\xi = 0$$

$$\mathrm{I}\ddot{\xi} + diag\,\omega_i^2\xi = 0 \qquad \ddot{\xi}_i + \omega_i^2\xi_i = 0$$

初始条件处理：

$$x_0 = \Phi \xi_0$$

$$\Phi^T M x_0 = \Phi^T M \Phi \xi_0 = \mathrm{I} \xi_0 = \xi_0$$

同理有

$$\Phi^T M \dot{x}_0 = \dot{\xi}_0$$

$$\begin{cases} \ddot{\xi}_i + \omega_i^2 \xi_i = 0 \\ \xi_i(0) = \xi_{i_0} \\ \dot{\xi}_i(0) = \dot{\xi}_{i_0} \end{cases}$$

求 n 个 SDOF 方程得到 $\xi_i(t)$ $\quad \xi(t) = \{\xi_1(t), \dots, \xi_n(t)\}^T$

$$x(t) = \Phi \cdot \xi(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(t) \cdot \varphi_i$$

模态叠加法的几何解释：

n 个模态向量 ϕ_i 是线性无关的，关于 M k

的，故此可以构
模态空间，任意
态的线性组合

$$x = \Phi \cdot \xi = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \varphi_i$$

ξ_i $x(t)$

称为主坐标，模态坐标。

物理坐标。

模态矩阵的逆的求法：

$$\Phi^T M \Phi = diag M_i = M_p$$

M_p^{-1}

左乘

$$M_p^{-1} \Phi^T M \Phi = \mathrm{I}$$

Φ^{-1}

$$M_p^{-1} \Phi^T M = \Phi^{-1}$$

右乘