

4.2.1 指数爆炸和指数衰減

一、激思导学

实数指数幂: $N = a^u$ $\xrightarrow{a \text{ 为常数}}$ $y = a^x$

\downarrow $u \text{ 为常数}$

一般的, 函数 $y = x^\alpha$ 叫做**幂函数**,
其中 x 为自变量, α 为非零常数.

二、概念探究

一般的，函数 $y = a^x$ 叫做**指数函数**。

其中 x 是自变量 $x \in R$ ，

底数 a 满足 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ 。

二、概念探究

问题1： 定义中为什么规定底数 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ？

二、概念探究

若 $a < 0$ ，如 $y = (-2)^x$ ，当 x 取 $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$ 等类似有理数时，
幂无意义，函数的定义域过于复杂。

若 $a = 0$ 或 $a = 1$ ，函数为常值函数，性质简单。

若 $a > 0$ 且 $a \neq 1$ ，如 $y = (2)^x$ ，函数定义域为 R 。

三、概念深化

问题2：指数函数 $y = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) 中
两变量间有着怎样的**变化规律**？

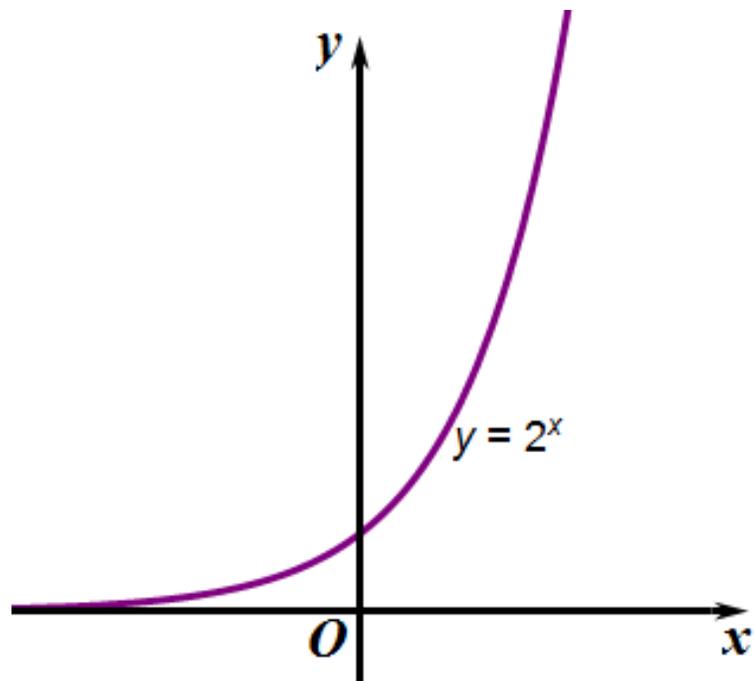
当底数 $a > 1$ 时，指数函数值随自变量增大而增大，如 $y = 2^x$.

当底数 $0 < a < 1$ 时，指数函数值随自变量增大而减小，

如 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

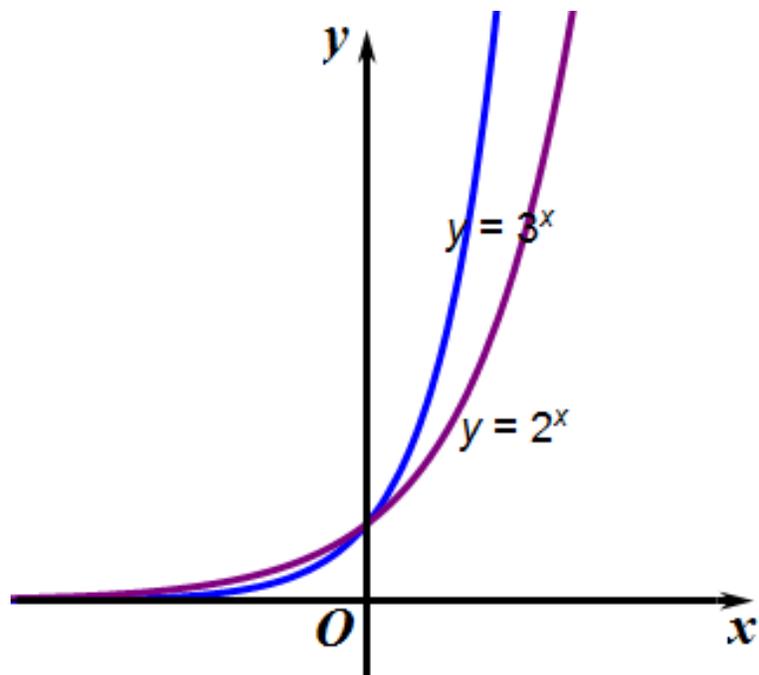
三、概念深化

问题3：底数 $a > 1$ 时函数呈增长趋势，有何**增长特征**？



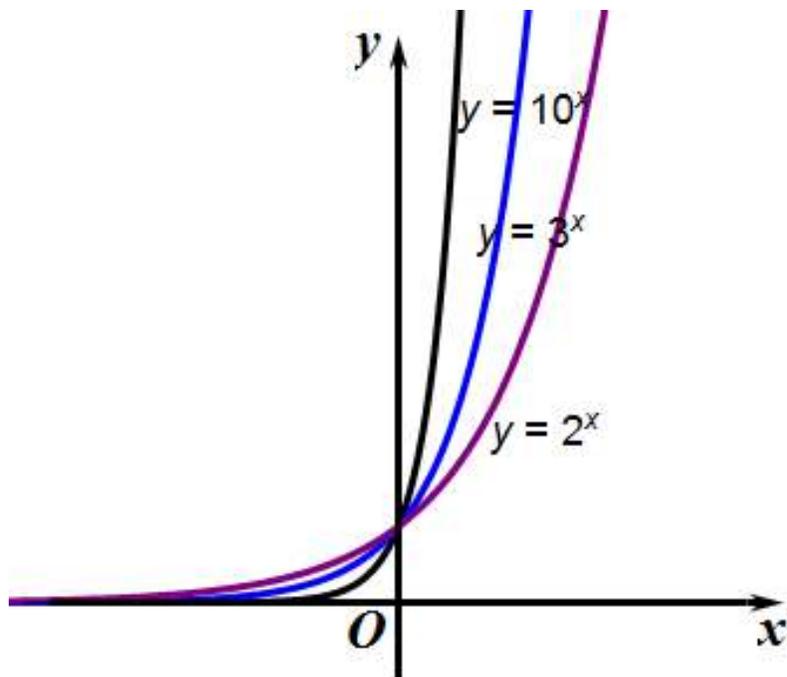
三、概念深化

问题3：底数 $a > 1$ 时函数呈增长趋势，有何**增长特征**？



三、概念深化

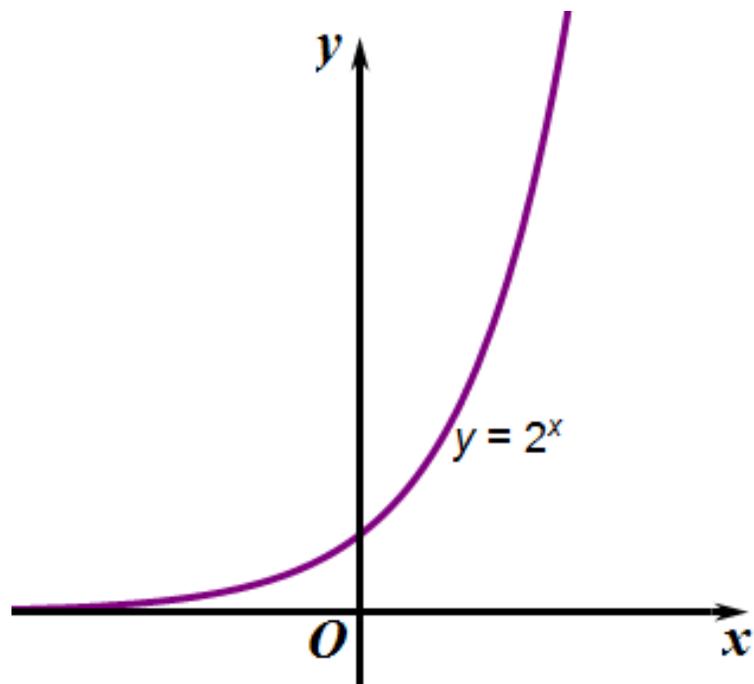
问题3：底数 $a > 1$ 时函数呈增长趋势，有何**增长特征**？



特别的，底数 a 较大时指数函数值增长速度惊人，被称为**指数爆炸**

三、概念深化

问题3：底数 $a > 1$ 时函数呈增长趋势，有何**增长特征**？



在长为 T 的时间周期 $[u, u + T]$ 中，

$$\begin{aligned} \text{函数值增长量: } & 2^{u+T} - 2^u \\ & = 2^u (2^T - 1) \end{aligned}$$

变量

$$\text{增长率: } \frac{2^{u+T} - 2^u}{2^u} = 2^T - 1$$

常量

三、概念深化

把自变量 x 看成时间，在长为 T 的时间周期 $[u, u+T]$ 中，指数函数 $y = a^x (a > 1)$ 的值从 a^u 增长到 a^{u+T}

增长量： $a^{u+T} - a^u$ 增长率： $\frac{a^{u+T} - a^u}{a^u} = a^T - 1$ 常量

当某个量在一个既定的时间周期中，其百分比增长（增长率的百分比表示）是一个**常量**时，这个量就被描述为**指数式增长**，也称**指数增长**。

三、概念深化

当底数 $0 < a < 1$ 时，指数函数值随自变量增大而缩小至无限接近于0，叫做**指数衰减**。

在长为 T 的时间周期 $[u, u+T]$ 中，指数函数的值从 a^u 减少到 a^{u+T}

$$\text{衰减率} : \frac{a^u - a^{u+T}}{a^u} = 1 - a^T$$

指数衰减的特点是：在一个既定的时间周期中，其缩小百分比（衰减率的百分比表示）是一个**常量**。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/218040134033007006>