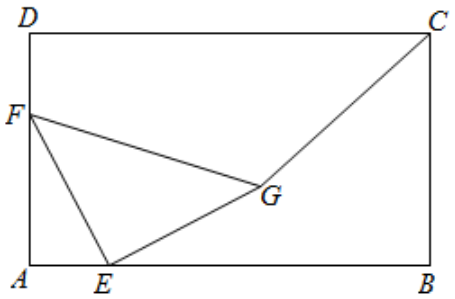
最值模型专项训练

本专题主要包含最值模型：将军饮马模型、将军遛马（造桥）模型、费马点模型、瓜豆原理（直线轨迹）、胡不归模型等。

1.（2023·山东·统考二模）如图，矩形 $ABCD$ 的边 $AB=\frac{11}{2}, BC=3$，E 为 AB 上一点，且 $AE=1$，F 为 AD 边上的一个动点，连接 EF，若以 EF 为边向右侧作等腰直角三角形 $EFG, EF=EG$，连接 CG，则 CG 的最小值为（　）

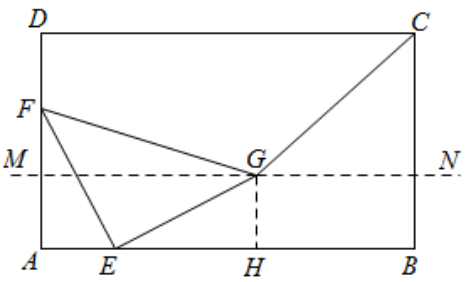


A．$\sqrt{5}$　　B．$\frac{5}{2}$　　C．3　　D．$2\sqrt{2}$

【答案】B

【分析】过点 G 作 GH⊥AB 于 H，过点 G 作 MN∥AB，由“AAS”可证△GEH≌△EFA，可得 GH＝AE＝1，可得点 G 在平行 AB 且到 AB 距离为 1 的直线 MN 上运动，则当 F 与 D 重合时，CG 有最小值，即可求解.

【详解】解：如图，过点 G 作 GH⊥AB 于 H，过点 G 作 MN∥AB，



∵四边形 ABCD 是矩形，AB＝$\frac{11}{2}$，BC＝3，∴∠B＝90°，CD＝$\frac{11}{2}$，AD＝3，

∵AE＝1，∴BE＝$\frac{9}{2}$，∵∠GHE＝∠A＝∠GEF＝90°，

∴∠GEH＋∠EGH＝90°，∠GEH＋∠FEA＝90°，∴∠EGH＝∠FEA，

又∵GE＝EF，∴△GEH≌△EFA（AAS），∴GH＝AE＝1，

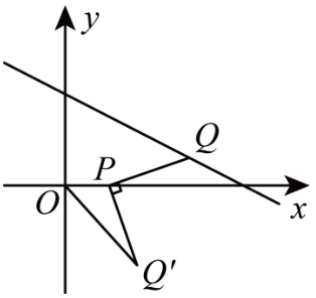
∴点 G 在平行 AB 且到 AB 距离为 1 的直线 MN 上运动，

∴当 F 与 D 重合时，CG 有最小值，此时 AF＝EH＝3，

∴CG 的最小值＝$\sqrt{\left(\frac{11}{2}-1-3\right)^2+2^2}=\frac{5}{2}$，故选 B.

【点睛】本题考查矩形的性质，全等三角形的判定和性质，勾股定理，确定点 G 的运动轨迹是本题的关键.

2.（2023 上·广东广州·九年级校考期中）如图，在平面直角坐标系中，Q 是直线 $y=-\frac{1}{2}x+2$ 上的一个动点，将 Q 绕点 $P(1,0)$ 顺时针旋转 $90°$，得到点 Q'，连接 OQ'，则 OQ' 的最小值为（　）



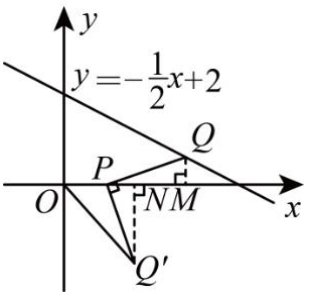
A. $\frac{4\sqrt{5}}{5}$　　B. $\sqrt{5}$　　C. $\frac{5\sqrt{5}}{2}$　　D. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【分析】利用等腰直角三角形构造全等三角形，求出旋转后 Q' 的坐标，然后根据勾股定理并利用二次函数的性质即可解决问题.

【详解】解：作 $QM\perp x$ 轴于点 M，$Q'N\perp x$ 轴于 N，　设 $Q\left(m,-\frac{1}{2}m+2\right)$，

∵ $P(1,0)$，则 $PM=m-1$，$QM=-\frac{1}{2}m+2$，



∵ $\angle PMQ=\angle Q'NP=\angle QPQ'=90°$，∴ $\angle MPQ=90°-\angle NPQ'=\angle NQ'P$，

在 $\triangle MPQ$ 和 $\triangle NQ'P$ 中，∵ $\begin{cases}\angle PQM=\angle Q'NP\\ \angle MPQ=\angle NQ'P\\ QP=PQ'\end{cases}$，∴ $\triangle MPQ\cong\triangle NQ'P(\mathrm{AAS})$，

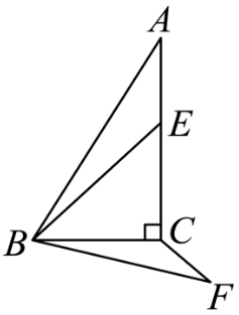
∴ $PN=QM=-\frac{1}{2}m+2$，$Q'N=PM=m-1$，∴ $ON=OP+PN=-\frac{1}{2}m+2+1=3-\frac{1}{2}m$，

$\therefore Q'\left(3-\frac{1}{2}m,1-m\right)$，$\therefore OQ'^2=(1-m)^2+\left(3-\frac{1}{2}m\right)^2=\frac{5}{4}(m-2)^2+5$，

当$m=2$时，OQ'^2有最小值为5，$\therefore OQ'$的最小值为$\sqrt{5}$，故选：B.

【点睛】本题考查了一次函数图像上点的坐标特征，一次函数的性质，三角形全等的判定和性质，坐标与图形的变换-旋转，二次函数的性质，勾股定理，表示出点的坐标是解题的关键.

3.（2023上·河南新乡·九年级校考期中）如图，Rt$\triangle ABC$中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，$BC=5$，点E是边AC上一点，将BE绕点B顺时针旋转$60°$到BF，连接CF，则CF长的最小值是（　　）

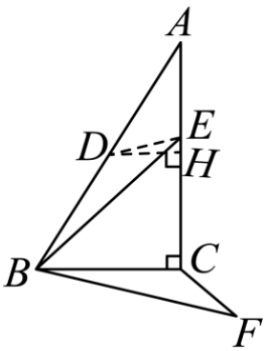


A．2　　B．2.5　　C．$\sqrt{5}$　　D．$\frac{\sqrt{5}}{2}$

【答案】B

【分析】取AB的中点为点D，连接DE，过点D作$DH\perp AC$，垂足为H，在Rt$\triangle ABC$中，利用含30度角的直角三角形的性质可求出AB的长，$\angle ABC$的度数，再根据线段的中点定义可得$AD=BD=\frac{1}{2}AB=5$，从而可得$DH=\frac{1}{2}AD=2.5$，然后利用旋转的性质可得：$BE=BF$，$\angle EBF=60°$，从而利用等式的性质可得$\angle ABE=\angle CBF$，进而利用SAS证明$\triangle BDE\cong\triangle BCF$，最后利用全等三角形的性质可得$DE=CF$，再根据垂线段最短，即可解答.

【详解】解：取AB的中点为点D，连接DE，过点D作$DH\perp AC$，垂足为H，$\therefore\angle AHD=90°$，



$\because\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，$BC=5$，$\therefore AB=2BC=10,\angle ABC=90°-\angle A=60°$，

∵点 D 是 AB 的中点，∴ $AD=BD=\frac{1}{2}AB=5$，∴ $DH=\frac{1}{2}AD=2.5$，

由旋转得：$BE=BF$，$\angle EBF=60°$，∴$\angle EBF=\angle ABC=60°$，

∴$\angle EBF-\angle EBC=\angle ABC-\angle EBC$，∴$\angle ABE=\angle CBF$，

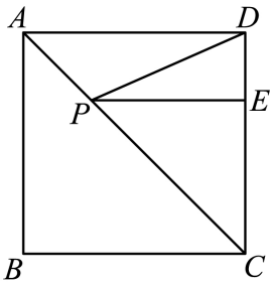
∵$BD=BC=5$，∴$\triangle BDE\cong\triangle BCF(SAS)$，∴$DE=CF$，

当 $DE\perp AC$ 时，即当点 E 和点 H 重合时，DE 有最小值，且最小值为 2.5，

∴CF 长的最小值是 2.5，故选：B.

【点睛】本题考查了旋转的性质，垂线段最短，全等三角形的判定与性质，根据题目的已知条件并结合图形添加适当的辅助线是解题的关键.

4.（2023·陕西榆林·九年级校考阶段练习）如图，正方形 $ABCD$ 的边长是 4，点 E 是 DC 上一个点，且 $DE=1$，P 点在 AC 上移动，则 $PE+PD$ 的最小值是（　）

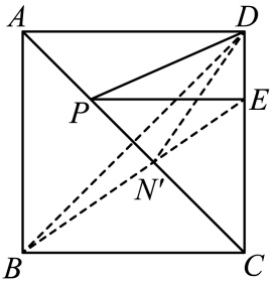


A．4　　B．4.5　　C．5.5　　D．5

【答案】D

【分析】连接 BE，交 AC 于点 N'，连接 DN'，N'即为所求的点，则 BE 的长即为 DP+PE 的最小值，利用勾股定理求出 BE 的长即可.

【详解】解：如图，



∵四边形 ABCD 是正方形，∴点 B 与点 D 关于直线 AC 对称，

连接 BE，交 AC 于点 N'，连接 DN'，∴DN'=BN'，DN'+EN'=BN'+ EN'≥BD，

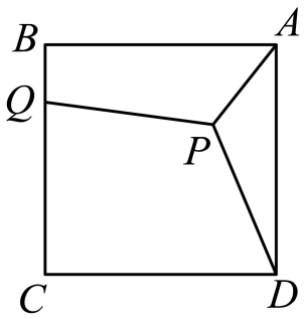
则 BE 的长即为 DP+PE 的最小值，∴AC 是线段 BD 的垂直平分线，

又∵CE=CD-DE=4-1=3，在 Rt△BCE 中，BE2=CE2+BC2=25，

∵BE＞0，∴BE=5，即 DP+PE 的最小值为 5，故选：D.

【点睛】本题主要考查了正方形的性质，轴对称-最短路线问题，两点之间，线段最短等知识，将 PE+PD 的最小值转化为 BE 的长是解题的关键.

5.（2023 上·山东·九年级专题练习）如图，P 是边长为 2 的正方形 $ABCD$ 内一动点，Q 为边 BC 上一动点，连接 PA、PD、PQ，则 $PA+PD+PQ$ 的最小值为（　）

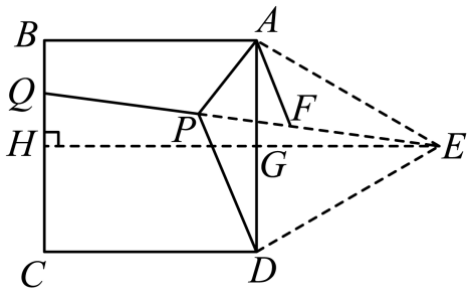


A．4　　B．3　　C．$3+\sqrt{3}$　　D．$2+\sqrt{3}$

【答案】D

【分析】将 $\triangle APD$ 绕点 A 逆时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle AFE$，则知 $\square AFP$ 是等边三角形，转化为两定点之间的折线，再利用“垂线段最短”求最小值.

【详解】如图，将 $\triangle APD$ 绕点 A 逆时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle AFE$，则 $\square AFP$ 是等边三角形，



作 $EH\perp BC$ 于 H，交 AD 于 G．则四边形 $ABGH$ 是矩形，

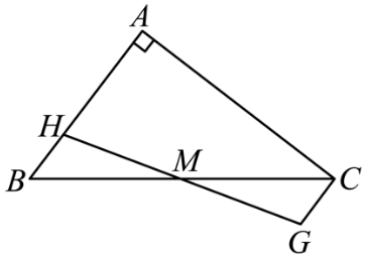
$\therefore AG=GD=1$，$\angle AEG=30°$，$GH=AB=2$，$\therefore EG=\sqrt{AE^2-AG^2}=\sqrt{3}$，$\therefore EH=2+\sqrt{3}$，

$\because PA+PD+PQ=EF+FP+PQ\geq EH$，$\therefore PA+PD+PQ\geq 2+\sqrt{3}$，

$\therefore PA+PD+PQ$ 的最小值 $2+\sqrt{3}$．故选：D.

【点睛】本题主要考查了正方形的性质，勾股定理，等边三角形的性质，两点之间线段最短时的位置的确定，解本题的关键是确定取最小值时的位置.

6．（2022·湖南湘西·统考中考真题）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle A=90°$，M 为 BC 的中点，H 为 AB 上一点，过点 C 作 $CG\parallel AB$，交 HM 的延长线于点 G，若 $AC=8$，$AB=6$，则四边形 $ACGH$ 周长的最小值是（　　）



A．24　　B．22　　C．20　　D．18

【答案】B

【分析】通过证明△BMH≌△CMG 可得 BH＝CG，可得四边形 ACGH 的周长即为 AB+AC+GH，进而可确定当 MH⊥AB 时，四边形 ACGH 的周长有最小值，证明四边形 ACGH 为矩形可得 HG 的长，进而可求解．

【详解】∵CG∥AB，∴∠B＝∠MCG，∵M 是 BC 的中点，∴BM＝CM，

在△BMH 和△CMG 中，$\begin{cases}\angle B=\angle NCG\\ BM=CM\\ \angle BMH=\angle CMG\end{cases}$，∴△BMH≌△CMG（ASA），∴HM＝GM，BH＝CG，

∵AB＝6，AC＝8，∴四边形 ACGH 的周长＝AC+CG+AH+GH＝AB+AC+GH＝14+GH，

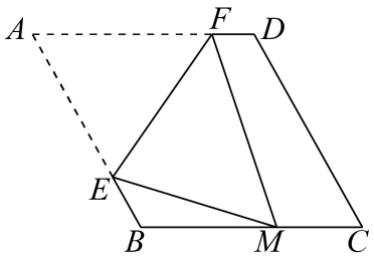
∴当 GH 最小时，即 MH⊥AB 时四边形 ACGH 的周长有最小值，

∵∠A＝90°，MH⊥AB，∴GH∥AC，∴四边形 ACGH 为矩形，∴GH＝8，

∴四边形 ACGH 的周长最小值为 14+8＝22，故选：B．

【点睛】本题主要考查全等三角形的判定与性质，确定 GH 的值是解题的关键．

7．（2023 下·江苏苏州·九年级校考阶段练习）如图，在菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°, AB=6$．折叠该菱形，使点 A 落在边 BC 上的点 M 处，折痕分别与边 AB, AD 交于点 E，F．当点 M 的位置变化时，DF 长的最大值为（　）



A．3　　B．$6-2\sqrt{3}$　　C．$2\sqrt{3}$　　D．$6-3\sqrt{3}$

【答案】D

【分析】先根据菱形的性质得到 $AD=CD=AB=6$，$\angle C=\angle A=60°$，可知当 AF 的长最小时，DF 的长最大，由折叠性质得 $AF=FM$，故当 $FM\perp BC$ 时，FM 的长最小，即 AF 的长最小，如图，过点 D 作 $DG\perp BC$ 于 G，证明四边形 $DGMF$ 是矩形得到 $FM=DG$，然后解直角三角形求得 DG 即可求解.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是菱形，

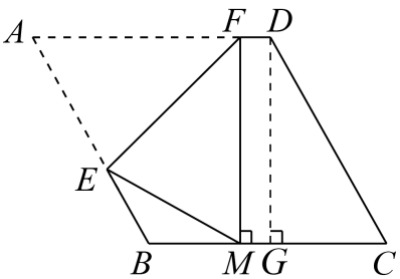
$\therefore AD=CD=AB=6$，$\angle C=\angle A=60°$，∴当 AF 的长最小时，DF 的长最大，

由折叠性质得 $AF=FM$，故当 $FM\perp BC$ 时，FM 的长最小，即 AF 的长最小，

如图，过点 D 作 $DG\perp BC$ 于 G，则 $\angle FMG=\angle DGM=\angle DGC=\angle GDF=90°$，

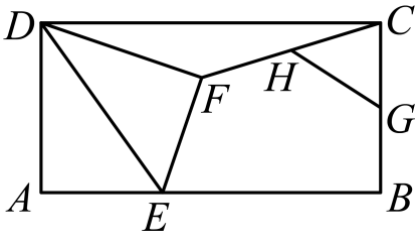
∴四边形 $DGMF$ 是矩形，$\therefore FM=DG$，在 $\mathrm{Rt}\triangle DGC$ 中，$\angle C=60°$，$CD=6$，

$\therefore DG=CD\sin 60°=3\sqrt{3}$，∴ AF 长的最小值为 $3\sqrt{3}$，此时 DF 长的最大值为 $6-3\sqrt{3}$，故选：D.



【点睛】本题考查菱形的性质、折叠性质、矩形的判定与性质、解直角三角形、垂线段最短，熟练掌握菱形的性质和折叠性质，将问题转化为求 AF 即 FM 的最小值是解答的关键.

8.（2023 下·浙江宁波·八年级校考期中）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=6$，$BC=3$，点 E 为 AB 上一点，连接 DE，将 $\triangle ADE$ 沿 DE 折叠，点 A 落在 F 处，连接 FC，若 H，G 分别为 FC，BC 的中点，则 HG 的最小值为（　）

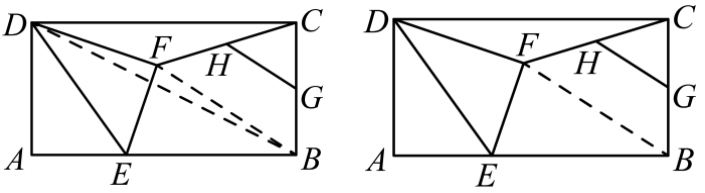


A. $\frac{3}{2}$　　B. $3\sqrt{5}-3$　　C. $\frac{3\sqrt{5}-3}{2}$　　D. $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

【答案】C

【分析】如图所示，连接 BD,BF，当点 F 在线段 BD 上时，BF 的值最小，则 HG 有最小值，根据矩形的性质，勾股定理的知识可求出 BD 的长，再根据题意可得 HG 是中位线，根据中位线的性质即可求解.

【详解】解：如图所示，连接 BD, BF，



在 $\triangle BDF$ 中，$BF > BD - DF$，∴当点 F 在线段 BD 上时，BF 的值最小，则 HG 有最小值，

如图所示，点 F 在线段 BD 上，∵四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=6$，$BC=3$，

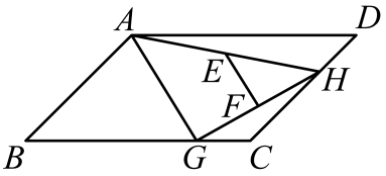
∴ $\angle DAB=90°$，$AD=BC=3$，∴在 $\mathrm{Rt}\triangle ABD$ 中，$BD=\sqrt{AB^2+AD^2}=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$，

∵ $\triangle ADE$ 沿 DE 折叠，点 A 落在 F 处，∴ $AD=FD=3$，∴ $BF=BD-DF=3\sqrt{5}-3$，

∵ H，G 分别为 FC，BC 的中点，∴在 $\triangle BCF$ 中，HG 是中位线，∴ $HG=\frac{1}{2}BF=\frac{3\sqrt{5}-3}{2}$，故选：C．

【点睛】本题主要考查矩形的性质，折叠的性质，三角形三边的数量关系，勾股定理求线段长度，三角形中位线的性质等知识，掌握以上知识是解题的关键．

9.（2023 上·广东佛山·九年级校联考阶段练习）如图，在平行四边形 $ABCD$ 中，$\angle C=135°$，$AB=2$，$AD=3$，点 H, G 分别是 CD，BC 上的动点，连接 AH，GH．E, F 分别为 AH，GH 的中点，则 EF 的最小值是（　　）

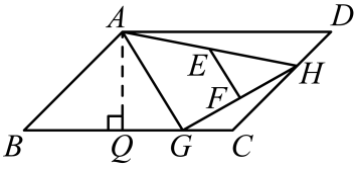


A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{2}$　　D．$2\sqrt{2}$

【答案】C

【分析】作 $AQ \perp BC$，根据中位线定理可推出 $EF=\frac{1}{2}AG$，进一步可得当 $AG \perp BC$ 时，AG 有最小值，此时 EF 的值也最小．据此即可求解．

【详解】解：作 $AQ \perp BC$，如图：



∵E，F 分别为 AH，GH 的中点 ∴ $EF=\frac{1}{2}AG$

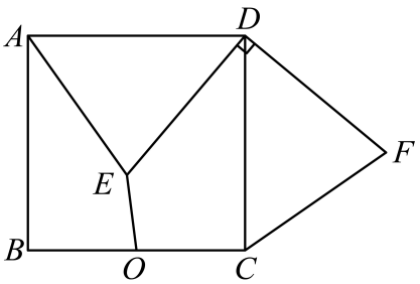
故：当 $AG\perp BC$ 时， AG 有最小值，此时 EF 的值也最小 $\therefore EF$ 的最小值是 $\frac{1}{2}AQ$

$\because \angle C=135°$，$AB=2$ $\therefore \angle B=180°-135°=45°$

$\therefore AQ=AB\times\sin 45°=\sqrt{2}$ $\therefore EF$ 的最小值是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 故选：C

【点睛】本题考查了中位线定理、平行四边形的性质、解直角三角形等．掌握相关结论即可．

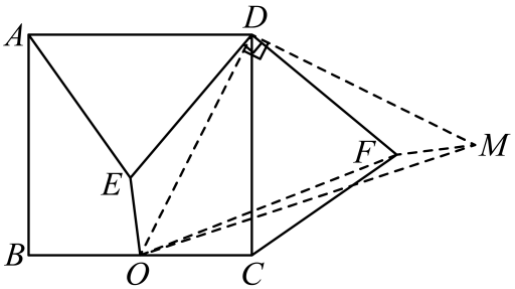
10．（2023 上·四川达州·九年级校考期末）如图，正方形 $ABCD$ 中，$AB=4\sqrt{2}$，O 是 BC 边的中点，点 E 是正方形内一动点，$OE=2$，连接 DE，将线段 DE 绕点 D 逆时针旋转 $90°$ 得 DF，连接 AE、CF，则线段 OF 长的最小值为_____．



【答案】$4\sqrt{5}-2$

【分析】连接 DO，将线段 DO 绕点 D 逆时针旋转 $90°$ 得 DM，连接 OF，FM，OM，证明 $\triangle EDO\cong\triangle FDM$，可得 $FM=OE=2$，由条件可得 $OM=4\sqrt{5}$，根据 $OF+MF\geq OM$，即可得出 OF 的最小值．

【详解】解：连接 DO，将线段 DO 绕点 D 逆时针旋转 $90°$ 得 DM，连接 OF，FM，OM，



$\because \angle EDF=\angle ODM=90°$，$\therefore \angle EDO=\angle FDM$，

$\because DE=DF$，$DO=DM$，$\therefore \triangle EDO\cong\triangle FDM\,(\mathrm{SAS})$，$\therefore FM=OE=2$，

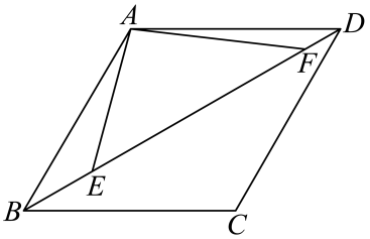
$\because$正方形 $ABCD$ 中，$AB=4\sqrt{2}$，O 是 BC 边的中点，$\therefore OC=2\sqrt{2}$，

$\therefore OD=\sqrt{\left(4\sqrt{2}\right)^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}=2\sqrt{10}$，$\therefore OM=\sqrt{\left(2\sqrt{10}\right)^2+\left(2\sqrt{10}\right)^2}=4\sqrt{5}$，

$\because OF+MF\geq OM$，$\therefore OF\geq 4\sqrt{5}-2$，$\therefore$线段 OF 长的最小值为 $4\sqrt{5}-2$．故答案为：$4\sqrt{5}-2$．

【点睛】本题考查了旋转的性质，正方形的性质，勾股定理，以及三角形三条边的关系．解题的关键是掌握图形旋转的性质．

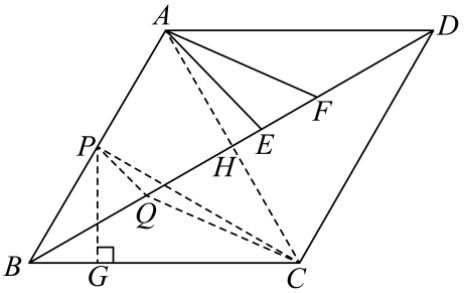
11．（2023 上·陕西西安·九年级校考阶段练习）如图，菱形 $ABCD$ 边长为 5，点 E、F 为对角线 BD 上两点，且 $BE=2DF$，$BD=8$，连接 AE,AF，则 $2AF+AE$ 的最小值是_____．



【答案】$\sqrt{97}$

【分析】取 AB,BE 的中点 P，Q，连接 PQ,PC,QC，连接 AC 交 BD 于点 H，过点 P 作 $PG\perp BC$，交 BC 于点 G，证明 $\triangle BCQ\cong\triangle DAF(\mathrm{SAS})$，得到 $CQ=AF$，推出当点 P，Q，C 三点共线时，$CQ+PQ$ 有最小值，最小值为 PC 长的 2 倍，利用菱形的性质及勾股定理求出 PC 的长即可．

【详解】解：取 AB,BE 的中点 P，Q，连接 PQ,PC,QC，连接 AC 交 BD 于点 H，过点 P 作 $PG\perp BC$，交 BC 于点 G，则 $PQ=\frac{1}{2}AE$，$BQ=\frac{1}{2}BE$，$\because ABCD$ 是菱形，$\therefore AD=BC$，$AD/\!/BC$，$\therefore\angle ADF=\angle CBQ$，



$\because BE=2DF$，即 $DF=\frac{1}{2}BE$，$\therefore BQ=DF$，$\therefore\triangle BCQ\cong\triangle DAF(\mathrm{SAS})$，$\therefore CQ=AF$，

$\because 2AF+AE=2\left(AF+\frac{1}{2}AE\right)=2(CQ+PQ)\geq 2PC$，

当点 P，Q，C 三点共线时，$CQ+PQ$ 有最小值，最小值为 PC 长的 2 倍，

$\because ABCD$ 是菱形，且边长为 5，$\therefore BD\perp AC$，$BH=\frac{1}{2}BD=4$，$AB=BC=5$，

$\therefore AH=\sqrt{AB^2-BH^2}=3$，$\therefore AC=6$，$\because S_{\triangle BCP}=\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}$，

$\therefore\frac{1}{2}BC\cdot PG=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}AC\cdot BH$，即 $\frac{1}{2}\times 5PG=\frac{1}{4}\times 6\times 4$，$\therefore PG=\frac{12}{5}$，

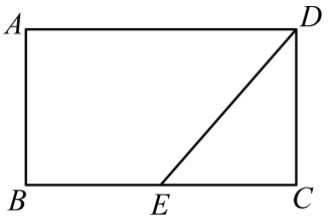
$BG=\sqrt{BP^2-PG^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{7}{10}$，$\therefore CG=BC-BG=5-\frac{7}{10}=\frac{43}{10}$，

$\therefore PC=\sqrt{CG^2+PG^2}=\sqrt{\left(\frac{43}{10}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2}=\frac{\sqrt{97}}{2}$，$\therefore 2PC=\sqrt{97}$，

$\therefore 2AF+AE$ 的最小值为 $\sqrt{97}$，故答案为：$\sqrt{97}$．

【点睛】本题考查了菱形的性质，三角形全等的判定与性质，勾股定理，动点问题求最小值，三角形中位线定理，正确作出辅助线构造全等，灵活运用勾股定理是解题的关键．

12．（2023 上·广东深圳·九年级校联考期中）如图，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$AD=2\sqrt{3}$，点 E 在 BC 上，连接 DE，在点 E 的运动过程中，$BE+\sqrt{2}DE$ 的最小值为_____．



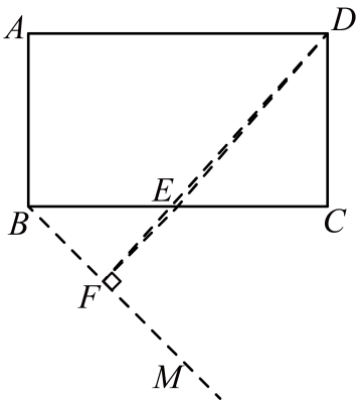
【答案】$2+2\sqrt{3}$ / $2\sqrt{3}+2$

【分析】在线段 BC 下方作 $\angle CBM=45°$，过点 E 作 $EF\perp BM$ 于点 F，连接 DF，求出此时 DF 的长度便可．

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，$AB=2$，$AD=2\sqrt{3}$，

$\therefore \angle DCE=90°$，$CD=AB=2$，$BC=AD=2\sqrt{3}$，$\therefore BE=2\sqrt{3}-CE$，

在线段 BC 下方作 $\angle CBM=45°$，过点 E 作 $EF\perp BM$ 于点 F，连接 DF，



$\therefore EF=\frac{\sqrt{2}}{2}BE$，$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}BE+DE=EF+DE\geq DF$，

当 D、E、F 三点共线时，$\frac{\sqrt{2}}{2}BE+DE=EF+DE=DF$ 的值最小，此时 $\angle DEC=\angle BEF=45°$，

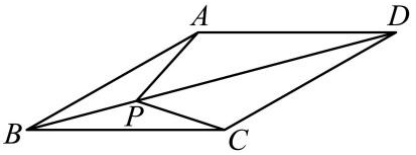
$\therefore CE=CD=2$，$\therefore BE=2\sqrt{3}-2$，$DE=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$，$\therefore EF=\frac{\sqrt{2}}{2}BE=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，

$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2}BE+DE$ 的最小值为：$EF+DE=\sqrt{2}+\sqrt{6}$，

$\therefore BE+\sqrt{2}DE$ 的最小值为 $BE+\sqrt{2}DE=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}BE+DE\right)=2+2\sqrt{3}$．故答案为：$2+2\sqrt{3}$．

【点睛】本题考查了长方形的性质，勾股定理，等腰直角三角形的性质与判定，垂线段最短性质，关键是作辅助线构造 $\frac{\sqrt{2}}{2}BE+DE$ 的最小值．

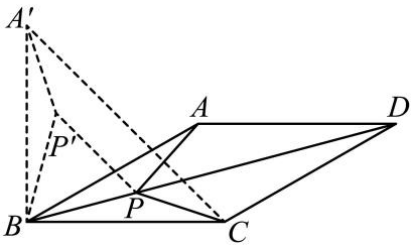
13．（2023·陕西榆林·九年级校考期中）如图，点 P 是边长为 4 的菱形 $ABCD$ 的对角线 BD 上一动点，若 $\angle ABC=30°$，则 $PA+PB+PC$ 的最小值为_____．



【答案】$4\sqrt{2}$

【分析】将 $\triangle ABP$ 逆时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle A'BP'$，根据题意证明出 $\triangle P'BP$ 是等边三角形，得到 $PP'=BP$，进而得到 $PA+PB+PC=A'P'+PP'+PC\le A'C$，证明出当点 A'，P'，P，C 四点共线时，$PA+PB+PC$ 的值最小，即为 $A'C$ 的长度，然后利用勾股定理求解即可．

【详解】如图所示，将 $\triangle ABP$ 逆时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle A'BP'$，



$\therefore BP'=BP$，$\angle P'BP=60°$，$AP=AP$ $\therefore \triangle P'BP$ 是等边三角形 $\therefore PP'=BP$

$\therefore PA+PB+PC=A'P'+PP'+PC\le A'C$

$\therefore$ 当点 A'，P'，P，C 四点共线时，$PA+PB+PC$ 的值最小，即为 $A'C$ 的长度，

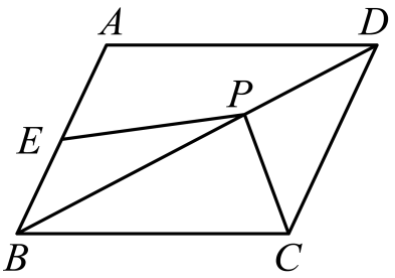
$\because$ 菱形 $ABCD$ 的边长为 4 $\therefore BC=AB=A'B=4$

$\because \angle ABC=30°$，$\angle A'BA=60°$ $\therefore \angle A'BC=90°$ $\therefore A'C=\sqrt{A'B^2+BC^2}=4\sqrt{2}$

$\therefore PA+PB+PC$ 的最小值为 $4\sqrt{2}$．故答案为：$4\sqrt{2}$．

【点睛】此题考查了菱形的性质，勾股定理，旋转的性质，等边三角形的性质和判定等知识，解题的关键是将 $\triangle ABP$ 逆时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle A'BP'$．

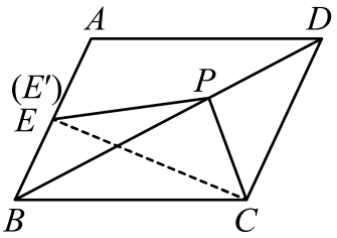
14．（2023 上·湖北·九年级校考周测）如图，已知菱形 $ABCD$ 的周长为 8，面积为 $2\sqrt{3}$，E 为 AB 的中点，若 P 为对角线 BD 上一动点，记 $PC-PE$ 的最大值为 m，记 $PC+PE$ 的最小值为 n，则 $\frac{m}{n}=$_____.



【答案】 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ / $\frac{1}{3}\sqrt{3}$

【分析】过点 C 作 $CE'\perp AB$，交 AB 与点 E'，再根据菱形的面积求出 CE'，根据勾股定理求出 BE'，可得点 E 和点 E' 重合，即可得出 $PC+PE$ 的最小值为 CE，然后根据点 C 和点 A 关于 BD 对称，可知 $PC-PE=PA-PE$，进而当点 P 与点 B 重合时，得出 $PC-PE$ 的最大值为 AE，即可得出答案．

【详解】解：过点 C 作 $CE'\perp AB$，交 AB 与点 E'，



∵菱形的周长为 8，面积为 $2\sqrt{3}$，$\therefore AB=BC=2$，$\therefore AB\cdot CE'=2\sqrt{3}$，$\therefore CE'=\sqrt{3}$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle BCE'$ 中，$BE'=\sqrt{BC^2-CE'^2}=1$．∵点 E 是 AB 的中点，$\therefore BE=1$，∴点 E 和点 E' 重合．

根据三角形的三边关系可知 $PC+PE\geq CE$，$\therefore n=\sqrt{3}$．

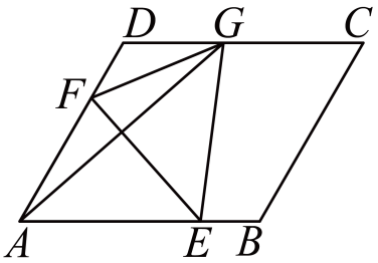
∵点 C 和点 A 关于 BD 对称，$\therefore PA=PC$，即 $PC-PE=PA-PE$．

当点 P 与点 B 重合时，得出 $PC-PE$ 的最大值为 AE，$\therefore m=1$，$\therefore \frac{m}{n}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$．故答案为：$\frac{\sqrt{3}}{3}$．

【点睛】本题主要考查了菱形的性质，勾股定理，根据轴对称求线段和最小，三角形三边关系等，确定点

的位置是解题的关键.

15.（2023·重庆·九年级专题练习）如图，在$\mathrm{Y}ABCD$中，点E，F分别在边AB，AD上，折叠$\triangle AEF$使得点A落在CD上，若$\angle ABC=120°$，$AD=4\sqrt{3}$，$AB=8$，则BE长度的最大值为_____.



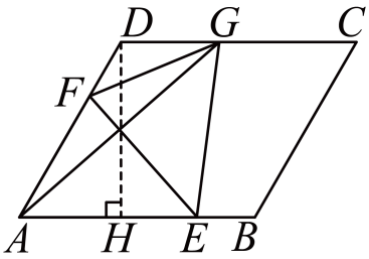
【答案】2

【分析】由折叠的性质可知$AE=GE$，当$GE\perp AB$时，GE的长度取最小值，则AE的长度取最小值，此时BE的长度取最大值，过点D作$DH\perp AB$于点H，则$DH=GE=AE$，由含30度角直角三角形的性质以及勾股定理可得$DH=AE=GE=6$，从而即可得到答案.

【详解】解：由折叠的性质可知$AE=GE$，当$GE\perp AB$时，GE的长度取最小值，则AE的长度取最小值，此时BE的长度取最大值，$\because$四边形$ABCD$是平行四边形，

$\therefore AD/\!/BC$，$\therefore\angle DAB+\angle ABC=180°$，$\therefore\angle DAB=180°-\angle ABC=180°-120°=60°$，

如图，过点D作$DH\perp AB$于点H，则$DH=GE=AE$，



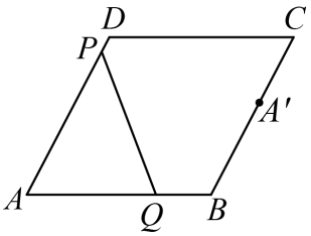
在$\mathrm{Rt}\triangle ADH$中，$\angle DAH=60°$，$\therefore\angle ADH=90°-\angle DAH=30°$，

$\therefore AH=\dfrac{1}{2}AD=2\sqrt{3}$，$\therefore DH=\sqrt{AD^2-AH^2}=6$，$\therefore AE$和$GE$长度的最小值为6，

故BE长度的最大值为$AB-AE=8-6=2$，故答案为：2.

【点睛】本题主要考查了平行四边形的性质、含30度角直角三角形的性质、勾股定理、折叠的性质，熟练掌握以上知识点，添加适当的辅助线，构造直角三角形是解题的关键.

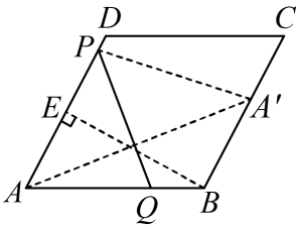
16.（2024上·北京海淀·九年级校考开学考试）如图，在菱形$ABCD$中，$AB=2$，$\angle BAD=60°$，点P，Q分别在边AD，AB上，连接PQ，点A关于PQ的对称点在线段BC上，则DP的最大值为_____.



【答案】$2-\sqrt{3}$

【分析】如图所示，作 $BE\perp AD$ 于点 E，连接 AA'、PA'，根据菱形的性质可得 $AD=AB$，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中可求出 BE 的长，根据折叠的性质，可得 PQ 是 AA' 的垂直平分线，可得 $AP=A'P$，当 $A'P=BE=\sqrt{3}$ 时，$A'P$ 的值最小，则 DP 的值最大，由此即可求解.

【详解】解：如图所示，作 $BE\perp AD$ 于点 E，则 $\angle AEB=90°$，连接 AA'、PA'，



∵四边形 $ABCD$ 是菱形，$AB=2$，∴$AD=AB=2$，

∵$BE\perp AD$，$\angle BAD=60°$，∴在 $\mathrm{Rt}\triangle ABE$ 中，$\sin\angle BAE=\sin 60°=\dfrac{BE}{AB}$，∴$BE=AB\sin 60°=2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$，

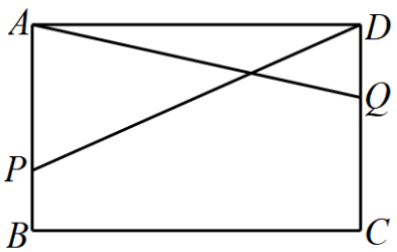
∵点 A 关于 PQ 的对称点在线段 BC 上，∴PQ 垂直平分 AA'，∴$AP=A'P$，

∵由垂线段最短可知，当 $A'P=BE=\sqrt{3}$ 时，$A'P$ 的值最小，∴AP 的最小值为 $\sqrt{3}$，

∵当 AP 最小时，DP 最大，∴DP 的最大值为 $2-\sqrt{3}$，故答案为：$2-\sqrt{3}$.

【点睛】本题主要考查菱形的性质，折叠的性质，特殊角的三角函数的综合，掌握以上知识是解题的关键.

17.（2023 下·山东烟台·八年级统考期中）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=5$，$AD=6$，点 P、点 Q 分别在边 AB、CD 上，且 $DQ=PB$，连接 AQ 和 DP，则 $AQ+DP$ 的最小值是_____.



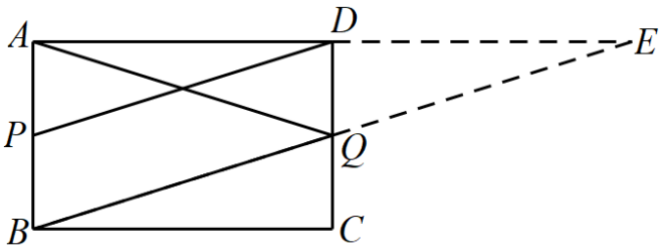
【答案】13

【分析】证明四边形 $PBQD$ 是平行四边形，得到 $PD=BQ$，作点 A 关于 CD 的对称点 E，当 B、Q、E 在同一直线上时，$AQ+DP=QE+BQ=BE$ 取得最小值，利用勾股定理即可求解.

【详解】解：∵四边形 $ABCD$ 是矩形，∴ $PB\parallel DQ$，

∵ $DQ=PB$，∴四边形 $PBQD$ 是平行四边形，∴ $PD=BQ$，

作点 A 关于 CD 的对称点 E，则 $AQ=QE$，$AD=DE=6$，

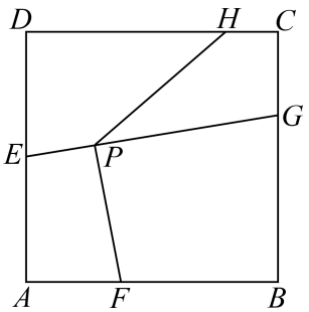


当 B、Q、E 在同一直线上时，$AQ+DP=QE+BQ=BE$ 取得最小值，

此时，$BE=\sqrt{AB^2+AE^2}=\sqrt{5^2+(6+6)^2}=13$，∴ $AQ+DP$ 的最小值是 13，故答案为：13.

【点睛】本题考查的是最短线路问题及矩形的性质，勾股定理，熟知两点之间线段最短的知识是解答此题的关键.

18.（2023 上·广西·九年级专题练习）如图，正方形 $ABCD$ 中，$AB=8$，点 E 为 AD 的中点，点 F 在 AB 上，且 $AF=3$，点 G，H 分别为 BC，CD 上的动点，连接 EG，过点 F 作 $FP\perp EG$，垂足为点 P，连接 PH，则 PH 的最小值为_____.



【答案】3.5

【分析】连接 EF 并取 EF 的中点 M，作 $MN\perp CD, ML\perp AD$ 连接 MP、PN，当点 H 与点 N 重合，M、P、N 三点共线时，PH 最小；利用勾股定理和中线的性质求出此时的长度即可.

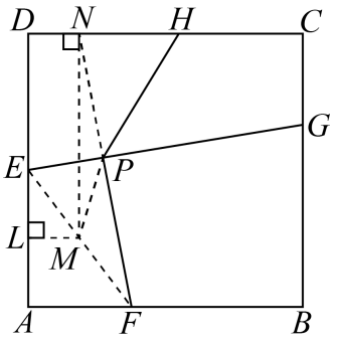
【详解】连接 EF 并取 EF 的中点 M，作 $MN\perp CD, ML\perp AD$ 连接 MP、PN，当点 H 与点 N 重合，M、P、

N 三点共线时，PH 最小；∵正方形 $ABCD$ 中，$AB=8$，点 E 为 AD 的中点，

$\therefore \angle A=90°$，$AF=3$，$AE=4$，$\therefore EF=\sqrt{AE^2+AF^2}=5$，

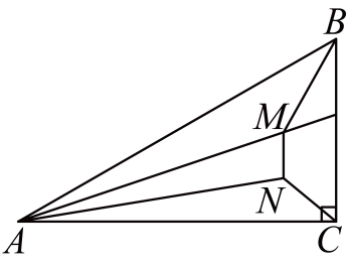
∵ EF 的中点是 M，$\therefore PM=\frac{1}{2}EF=2.5$，∵ $ML\perp AD$，$\therefore EL=LA=2$，$DL=MN=6$，

当点 H 与点 N 重合，M、P、N 三点共线时，$PH=MN-MP=3.5$，故答案为：3.5



【点睛】本题考查了勾股定理，直角三角形斜边中线的性质，解题关键是恰当作辅助线，构建直角三角形解决问题.

19.（2023 下·四川成都·八年级统考期中）如图，在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，$AB=8\sqrt{3}$．如果在三角形内部有一条动线段 $MN\parallel BC$，且 $MN=\sqrt{3}$，则 $AN+BM+CN$ 的最小值为 _____.



【答案】$3\sqrt{31}$

【分析】在 BC 上取一点 B'，使得 $BB'=MN=\sqrt{3}$，连接 B′N．首先证明 $AN+BM+CN=TG+GN+B'N$，将 $\triangle ANC$ 绕点 C 逆时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle GCT$，连接 NG，过点 T 作 $TH\perp BC$ 交 BC 的延长线于 H．要使 $AN+BM+CN$ 的值最小，需点 B'、N、G、T 四点共线．连接 $B'T$，则其就是所求最小值，求出 B′T 可得结论.

【详解】解：如图，在 BC 上取一点 B'，使得 $BB'=MN=\sqrt{3}$，连接 $B'N$，将 $\triangle ANC$ 绕点 C 逆时针旋转 $60°$ 得到 $\triangle GCT$，连接 NG，过点 T 作 $TH\perp BC$ 交 BC 的延长线于 H.

∵ $MN\parallel BC$，$MN=BB'$，∴四边形 $MNBB'$ 是平行四边形，$\therefore BM=B'N$.

由旋转的性质可知，$\triangle CNG$ 和 $\square ACT$ 都是等边三角形，

$\therefore CN=GN$，$AN=GT$．$\therefore AN+BM+CN=TG+GN+B'N$．

要使 $AN+BM+CN$ 的值最小，需点 B'、N、G、T 四点共线．连接 $B'T$，则其就是所求最小值．

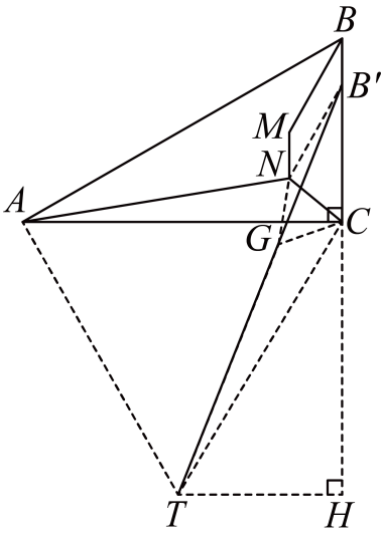
$\because \text{Rt}\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AB=8\sqrt{8}$．$\therefore BC=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{3}=4\sqrt{3}$，$AC=\sqrt{3}BC=\sqrt{3}\times 4\sqrt{3}=12$．

由旋转的性质可知：$CT=AC=12$，$\angle ACT=60°$，$\therefore \angle TCH=90°-60°=30°$，

在 $\text{Rt}\square CTH$ 中，$TH=\frac{1}{2}CT=\frac{1}{2}\times 12=6$，$CH=\sqrt{3}TH=6\sqrt{3}$，

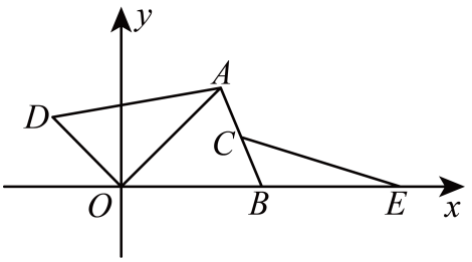
$\because B'C=BC-BB'=4\sqrt{3}-\sqrt{3}=3\sqrt{3}$．$\therefore B'H=CH+CB'=6\sqrt{3}+3\sqrt{3}=9\sqrt{3}$，

$\therefore B'T=\sqrt{TH^2+B'H^2}=\sqrt{6^2+\left(9\sqrt{3}\right)^2}=3\sqrt{31}$．$\therefore AN+BM+CN$ 的最小值是 $3\sqrt{31}$．故答案为：$3\sqrt{31}$．



【点睛】本题考查了平行四边形的判定与性质，旋转变换，30 度角所对的直角边等于斜边的一半，等边三角形的判定与性质，勾股定理，两点之间线段最短等知识，解题的关键是学会利用旋转法添加辅助线，构造全等三角形解决问题．

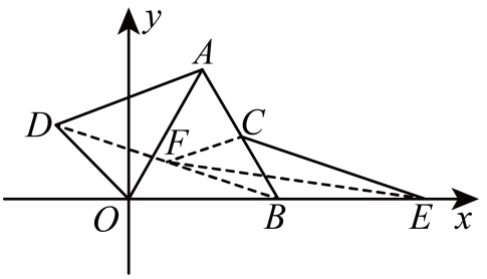
20.（2023 上·湖北黄石·九年级校联考阶段练习）如图，在平面直角坐标系中，$OA=2$，将线段 OA 绕点 O 进行旋转，$B(2,0)$，取 AB 中点 C，$E(4,0)$，连接 CE，已知点 D 的坐标为 $(-1,1)$，那么将线段 OA 绕点 O 的旋转过程中，$AD+2CE$ 的最小值为 _____．



【答案】$5\sqrt{2}$

【分析】连接BD，取BD中点F，连接CF，由三角形中位线定理可得$CF=\frac{1}{2}AD$，即$AD=2CF$，由三角形三边关系可得$AD+2CE=2CF+2CE=2\left(CF+CE\right)\geq 2EF$，当$E$、$F$、$C$三点共线时，上式取等号，由$B$,$D$的坐标可得$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，再根据两点间的距离公式可得$EF=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，即可得到答案.

【详解】解：连接BD，取BD中点F，连接CF，



，

$\because$ C为AB的中点，$\therefore CF=\frac{1}{2}AD$，即$AD=2CF$，$\therefore AD+2CE=2CF+2CE=2\left(CF+CE\right)\geq 2EF$，

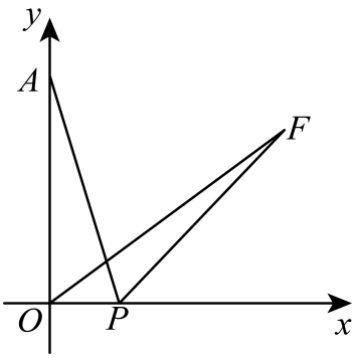
当E、F、C三点共线时，上式取等号，$\because B\left(2,0\right)$，$D\left(-1,1\right)$，$\therefore F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，

$\because$ $E\left(4,0\right)$，$\therefore EF=\sqrt{\left(4-\frac{1}{2}\right)^2+\left(0-\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$，

$\therefore$ $AD+2CE$的最小值为$2EF=2\times\frac{5\sqrt{2}}{2}=5\sqrt{2}$，故答案为：$5\sqrt{2}$.

【点睛】本题考查了坐标与图形、三角形中位线定理、勾股定理、三角形三边关系等知识点，熟练掌握以上知识点，添加适当的辅助线是解此题的关键.

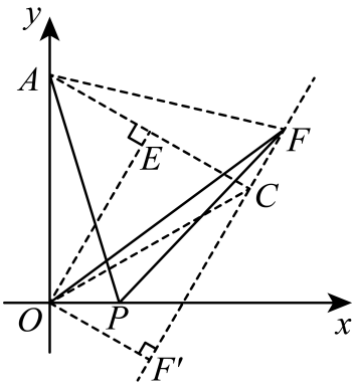
21.（2023上·陕西西安·八年级校考阶段练习）如图，在平面直角坐标系xOy中，点A的坐标为$\left(0,4\sqrt{3}\right)$，P是x轴上一动点，把线段PA绕点P顺时针旋转$60°$得到线段PF，连接OF，则线段OF长的最小值是_____.



【答案】$2\sqrt{3}$

【分析】本题主要考查等边三角形的判定和性质、全等三角形的判定和性质及旋转的性质，连接AF，以AO为边长作等边三角形AOC，连接FC，可得$\triangle APF$为等边三角形，进一步可证得$\triangle AOP\cong\triangle ACF$，得$\angle ACF=\angle AOP=90°$，得到点P在x轴上运动时，点F在直线$FC$上运动，作$OF'\perp FC$交直线$FC$于$F'$，$OE\perp AC$于E，则有$OF'=EC=2\sqrt{3}$，当F在直线$FC$上运动到点$F'$位置时，线段$OF$的最小值为$OF'$.

【详解】解：连接AF，以AO为边长作等边三角形AOC，连接FC，如图，



则$AO=AC=4\sqrt{3}$，$\angle OAC=60°$，$\angle APF=60°$，$AP=FP$，$\therefore\triangle APF$为等边三角形，

则$AF=AP$，$\angle PAF=\angle OAC=60°$，那么$\angle OAP=\angle CAF$，

在$\triangle AOP$和$\triangle ACF$中$\begin{cases}AO=AC\\\angle OAP=\angle CAF\\AP=AF\end{cases}$ $\therefore\triangle AOP\cong\triangle ACF(SAS)$，$\therefore\angle AOP=\angle ACF=90°$，

则点P在x轴上运动时，点F在直线FC上运动，作$OF'\perp FC$交直线FC于F'，$OE\perp AC$于E，

则$\angle AOE=\angle COE=30°$，$\therefore AE=EC=\frac{1}{2}AC=2\sqrt{3}$

$\because OF' \perp FC$，$\angle ACF = 90°$，$OE \perp AC$，$\therefore OF' = EC = 2\sqrt{3}$，

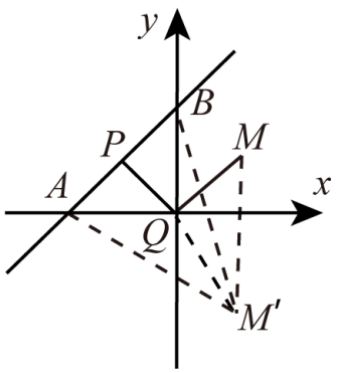
显然，当 F 在直线 FC 上运动到点 F' 位置时，线段 OF 取得最小值为 $OF' = 2\sqrt{3}$．故答案为：$2\sqrt{3}$．

22．（2023·江苏南通·统考一模）平面直角坐标系 xOy 中，已知点 P（m，$m+2$），点 Q（n，0），点 M（1，1），则 $PQ+QM$ 最小值为_____．

【答案】$2\sqrt{2}$

【分析】根据点 P（m，m＋2）可知，点 P 在一次函数 $y = x+2$ 的图像上移动，作出图示，并作 M 关于 x 轴的对称点 M'，过点 M' 作 $M'P \perp AB$ 于点 P，交 x 轴于点 Q，连接 AM', BM'，QM，利用“垂线段最短”原理，可知此时 PQ＋QM 最小，最小值为 PM' 的长度，利用等腰三角形的性质求解 PM' 即可得出答案．

【详解】解：如图所示，由题意可知，点 P（m，m＋2）在一次函数 $y = x+2$ 的图像上移动，一次函数分别交 x 轴、y 轴于点 A，B，作 M 关于 x 轴的对称点 M'，过点 M' 作 $M'P \perp AB$ 于点 P，交 x 轴于点 Q，连接 AM', BM'，QM，利用“垂线段最短”原理，可知此时 PQ＋QM 最小，最小值为 PM' 的长．



$\because$ 点 M（1，1），由对称性质可知：点 $M'(1,-1)$

$\because$ 一次函数 $y = x+2$ 的图像分别交 x 轴、y 轴于点 A, B

$\therefore$ 令 $x = 0$，解得 $y = 2$，即点 $B(0,2)$，令 $y = 0$，解得 $x = -2$，即点 $A(-2,0)$

$\therefore AM' = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}, BM' = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$ $\therefore AM' = BM'$ $\therefore \triangle ABM'$ 为等腰三角形，

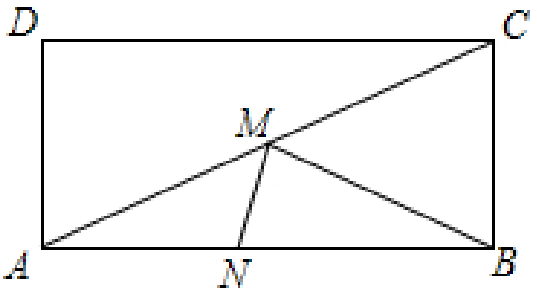
$\because M'P \perp AB$ $\therefore$ 点 P 为 AB 的中点，则点 $P(-1,1)$ $\therefore PM' = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

$\therefore PQ+QM = PM' = 2\sqrt{2}$ 故答案为：$2\sqrt{2}$

【点睛】本题考查了最值问题，涉及到一次函数的性质、等腰三角形的性质“三线合一”以及根据两点坐标求

点之间的距离，思考问题时参照“将军饮马”模型，根据“垂线段最短”原理，将问题转化为求垂线段的长度是解决本题的关键.

23.（2023·江苏南通·九年级校考阶段练习）如图，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=10$，$BC=5$．若点 M、N 分别是线段 AC，AB 上的两个动点，当 $BM+MN$ 取最小值时△BMN 的周长为_____.



【答案】12

【分析】如图作点 B 关于 AC 的对称点 B′，连接 B′A 交 DC 于点 E，根据对称性可得 $BM+MN=B'M++MN$，由两点之间线段最短和垂线段最短可得当 $B'N\perp AB$ 时，$BM+MN$ 取得最小值，设 $EC=AE=x$，根据勾股定理求出 $B'E=\frac{15}{4}$，然后由等面积法即可求出高 h 的长度，然后利用勾股定理求出 AN' 的长度，进而可求出△BMN 的周长.

【详解】解：如图作点 B 关于 AC 的对称点 B′，连接 B′A 交 DC 于点 E，则 BM+MN 的最小值等于 $B'M+MN$ 的最小值，∴当 $B'N\perp AB$ 时，$BM+MN$ 取得最小值，

∴作 $B'N'\perp AB$ 交 AC 于 M'，则 $B'N'$ 即 $BM+MN$ 的最小值；

∵四边形 ABCD 是矩形，∴$\angle D=90°$，$DC\parallel AB$，∴$\angle DCA=\angle BAC$，

又∵$\angle B'AC=\angle BAC$，∴$\angle B'AC=\angle DCA$，∴$AE=CE$，

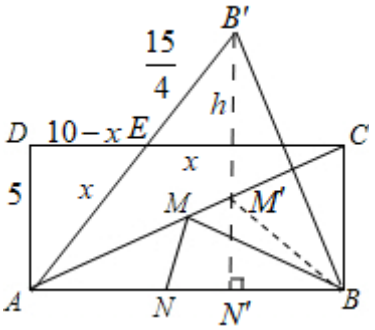
设 $EC=AE=x$，∴在 $Rt\triangle AED$ 中，$DE^2+AD^2=AE^2$，即 $(10-x)^2+5^2=x^2$，

解得：$x=\frac{25}{4}$，$\therefore B'E=AB'-AE=10-\frac{25}{4}=\frac{15}{4}$，设 $\triangle B'EC$ 中 EC 边上的高为 h，

由对称性可得 $B'C=BC=5$，$\angle AB'C=\angle ABC=90°$，∴$S_{\triangle B'CE}=\frac{1}{2}\times\frac{15}{4}\times5=\frac{1}{2}\cdot\frac{25}{4}\cdot h$，解得：$h=3$，

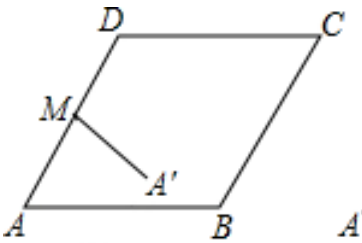
$B'N'=$ h+5=8，即 BM+MN 的最小值是 8，∴在 $Rt\triangle AB'N'$ 中，$AN'=\sqrt{AB'-B'N'}=\sqrt{10^2-8^2}=6$，

∴$BN'=AB-AN'=10-6=4$，∴△BMN 的周长＝$BN'+BM'+M'N'=BN'+B'N'=4+8=12$．故答案为：12

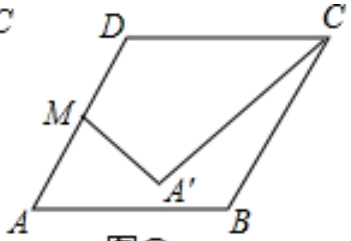


【点睛】本题主要是利用轴对称求最短路线，题中应用了勾股定理与用不同方式表示三角形的面积从而求出某条边上的高，利用轴对称得出 M 点与 N 点的位置是解题的关键.

24.（2023·江苏·八年级专题练习）在边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中，$\angle A=60°$，M 是 AD 边的中点，若线段 MA 绕点 M 旋转得线段 MA'.（1）如图①，线段 MA'的长＝___.（2）如图②，连接 $A'C$，则 $A'C$ 长度的最小值是___.



图①



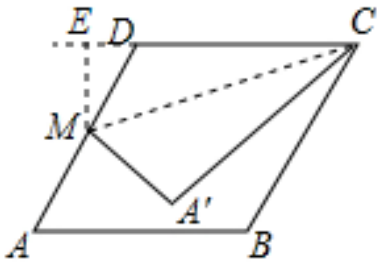
图②

【答案】 1 $\sqrt{7}-1$

【详解】思路引领：（Ⅰ）由中点的定义和旋转的性质可求解；

（Ⅱ）当 A'在 MC 上时，线段 A'C 长度最小，作 ME⊥CD 于点 E，首先在直角△DME 中利用三角函数求得 ED 和 EM 的长，然后在直角△MEC 中利用勾股定理求得 MC 的长，然后减去 MA 的长即可求解.

答案详解：（Ⅰ）∵M 是 AD 边的中点，∴MA＝1，



图②

∵线段 MA 绕点 M 旋转得线段 MA'．∴MA'＝1，故答案为：1；

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/218065112060006056