考点三 一元二次方程

知识整合

一、一元二次方程的概念

1．一元二次方程

只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是 2 的整式方程叫做一元二次方程.

2．一般形式

$ax^2+bx+c=0$（其中 a,b,c 为常数，$a\neq 0$），其中 ax^2,bx,c 分别叫做二次项、一次项和常数项，a,b 分别称为二次项系数和一次项系数.

注意：（1）在一元二次方程的一般形式中要注意 $a\neq 0$，因为当 $a=0$ 时，不含有二次项，即不是一元二次方程；

（2）一元二次方程必须具备三个条件：

①必须是整式方程；

②必须只含有一个未知数；

③所含未知数的最高次数是 2.

二、一元二次方程的解法

1．直接开平方法

适合于 $(x\pm a)^2=b(b\geq 0)$ 或 $(ax\pm b)^2=(cx\pm d)^2$ 形式的方程.

2．配方法

（1）化二次项系数为 1；

（2）移项，使方程左边只含有二次项和一次项，右边为常数项；

（3）方程两边同时加上一次项系数一半的平方；

（4）把方程整理成 $(x\pm a)^2=b(b\geq 0)$ 的形式；

（5）运用直接开平方法解方程.

3．公式法

（1）把方程化为一般形式，即 $ax^2+bx+c=0$；

（2）确定 a,b,c 的值；

（3）求出 b^2-4ac 的值；

（4）将 a,b,c 的值代入 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 即可.

4．因式分解法

基本思想是把方程化成 $(ax+b)(cx+d)=0$ 的形式，可得 $ax+b=0$ 或 $cx+d=0$.

考向一 一元二次方程解法

典例引领

1．解下列方程：

(1) $x^2+2x-5=0$；

(2) $(x-2)^2+x(x-2)=0$.

【答案】(1) $x_1=-1+\sqrt{6}$， $x_2=-1-\sqrt{6}$；

(2) $x_1=2$， $x_2=1$.

【分析】本题主要考查解一元二次方程的能力，

（1）根据配方法即可求出答案；

（2）根据因式分解法即可求出答案.

【详解】（1）$\because x^2+2x-5=0$，

$\therefore x^2+2x=5$，

$\therefore x^2+2x+1=6$，

$\therefore (x+1)^2=6$，

$\therefore x=-1\pm\sqrt{6}$，

$\therefore x_1=-1+\sqrt{6}$， $x_2=-1-\sqrt{6}$；

（2）$\because (x-2)^2+x(x-2)=0$，

$\therefore (x-2)(x-2+x)=0$，

$\therefore x-2=0$ 或 $x-2+x=0$，

$\therefore x_1=2,\ x_2=1$.

2．解方程：

(1) $x^2-6x-1=0$；（配方法）

(2) $2x^2-5x+1=0$；（公式法）

(3) $(x-2)^2+x(x-2)=0$；（因式分解法）

(4) $(x-3)(x-1)=5$．（选择适当的方法）

【答案】(1) $x_1=3+\sqrt{10}$， $x_2=3-\sqrt{10}$

(2) $x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{4}$， $x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$

(3) $x_1=2$， $x_2=1$

(4) $x_1=2+\sqrt{6}$， $x_2=2-\sqrt{6}$

【分析】本题考查了解一元二次方程，

（1）根据配方法计算即可；

（1）根据公式法计算即可；

（3）根据因式分解法计算即可；

（4）根据公式法计算即可．

【详解】（1）解： $x^2-6x-1=0$，

移项得： $x^2-6x=1$，

配方得： $x^2-6x+9=10$， 即 $(x-3)^2=10$，

开方得： $x-3=\pm\sqrt{10}$，

则 $x_1=3+\sqrt{10}$， $x_2=3-\sqrt{10}$；

（2）由题意可得： $a=2$， $b=-5$， $c=1$，

$\therefore b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times1=17>0$，

$\therefore x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{17}}{2\times2}=\frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$，

$\therefore x_1=\frac{5+\sqrt{17}}{4}$， $x_2=\frac{5-\sqrt{17}}{4}$；

（3） $(x-2)^2+x(x-2)=0$

$\therefore (x-2)(x-2+x)=0$

即 $(x-2)(2x-2)=0$

$\therefore x-2=0$ 或 $2x-2=0$

解得 $x_1=2$， $x_2=1$；

（4）解：$(x-3)(x-1)=5$

$x^2-4x=2$

$x^2-4x+4=2+4$

$(x-2)^2=6$

$x-2=\pm\sqrt{6}$，

解得：$x_1=2+\sqrt{6}$，$x_2=2-\sqrt{6}$.

3．解方程：

(1) $x^2-4x-5=0$；

(2) $x^2-4x-2=0$.

【答案】(1) $x_1=5, x_2=-1$

(2) $x_1=2+\sqrt{6}, x_2=2-\sqrt{6}$

【分析】本题考查了解一元二次方程.

（1）利用解一元二次方程-因式分解法，进行计算即可解答；

（2）利用解一元二次方程-配方法，进行计算即可解答.

【详解】（1）解：$x^2-4x-5=0$

$(x-5)(x+1)=0$

$x-5=0$ 或 $x+1=0$

解得：$x_1=5, x_2=-1$；

（2）解：$x^2-4x-2=0$

$x^2-4x+4=6$

$(x-2)^2=6$

$x-2=\pm\sqrt{6}$

解得：$x_1=2+\sqrt{6}, x_2=2-\sqrt{6}$.

4．用适当的方法解下列方程：$(x+4)^2=3(x+4)$.

【答案】$x_1=-4$，$x_2=-1$

【分析】本题考查了一元二次方程的解法，解一元二次方程常用的方法有直接开平方法，配方法，公式法，因式分解法，利用因式分解法解一元二次方程即可；解题的关键是掌握一元二次方程的解法.

【详解】$(x+4)^2=3(x+4)$

$(x+4)^2-3(x+4)=0$

$(x+4)(x+4-3)=0$

整理得，$(x+4)(x+1)=0$

$\therefore x+4=0$，$x+1=0$

解得 $x_1=-4$，$x_2=-1$.

5．提出问题：

为解方程 $x^4-3x^2-4=0$，我们可以令 $x^2=y$，于是原方程可转化为 $y^2-3y-4=0$，解此方程，得 $y_1=4, y_2=-1$（不符合要求，舍去）.

当 $y_1=4$ 时，$x^2=4, x=\pm 2$.

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1=2, x_2=-2$.

以上方法就是换元法解方程，从而达到了降次的目的，体现了转化的思想.

解决问题：运用上述换元法解方程：$\left(x^2-2\right)^2-13\left(x^2-2\right)+42=0$.

【答案】$x_1=2\sqrt{2}$，$x_2=-2\sqrt{2}$，$x_3=3$，$x_4=-3$

【分析】本题考查换元法解高次方程，根据材料提示，令 $x^2-2=y$，利用换元法解方程即可求解.

【详解】解：令 $x^2-2=y$，

则原方程可转化为 $y^2-13y+42=0$，

因式分解得 $(y-6)(y-7)=0$，

解得 $y_1=6$，$y_2=7$.

当 $x^2-2=6$ 时，解得 $x_1=2\sqrt{2}$，$x_2=-2\sqrt{2}$，

当 $x^2-2=7$ 时，解得 $x_3=3$，$x_4=-3$，

$\therefore$ 原方程的解为 $x_1 = 2\sqrt{2}$，$x_2 = -2\sqrt{2}$，$x_3 = 3$，$x_4 = -3$．

6．换元法是数学中的一种解题方法．若我们把其中某些部分看成一个整体，用一个新字母代替（即换元），则能使复杂的问题简单化．如：解二元一次方程组 $\begin{cases}2(x+y)+3(x-y)=-2\\ x+y-2(x-y)=3\end{cases}$，按常规思路解方程组计算量较大．可设 $x+y=a$，$x-y=b$，那么方程组可化为 $\begin{cases}2a+3b=-2\\ a-2b=3\end{cases}$，从而将方程组简单化，解出 a 和 b 的值后，再利用 $x+y=a$，$x-y=b$ 解出 x 和 y 的值即可．用上面的思想方法解方程：

(1) $\frac{x^2}{x+2}+\frac{2x+4}{x^2}=3$；

(2) $x^2+2x+4\sqrt{x^2+2x}-5=0$

【答案】(1) $x_1=-1$； $x_2=2$； $x_3=1+\sqrt{5}$； $x_4=1-\sqrt{5}$

(2) $x_1=\sqrt{2}-1$， $x_2=-\sqrt{2}-1$

【分析】该题主要考查了换元思想解方程，一元二次方程的解答，分式方程的解答，解题的关键是运用换元法进行整体代换；

（1）设 $\frac{x^2}{x+2}=t(t\neq 0)$，将原方程化为 $t^2-3t+2=0$，解得 $t=2$ 或 $t=1$，再分别代入 $\frac{x^2}{x+2}=t$ 求解分式方程的解即可；

（2）设 $\sqrt{x^2+2x}=t\left(t\geq 0\right)$，则有 $x^2+2x=t^2$，将原方程化为：$t^2+4t-5=0$，解得 $t=-5$（舍）或 $t=1$，再代入 $\sqrt{x^2+2x}=t$ 求解即可；

【详解】（1）设 $\frac{x^2}{x+2}=t(t\neq 0)$，

$\therefore$ 原方程化为 $t+\frac{2}{t}=3$，

$\therefore t^2-3t+2=0$，

解得 $t=2$ 或 $t=1$，

当 $t=1$ 时，$\frac{x^2}{x+2}=1$，

解得 $x=2$ 或 $x=-1$，

经检验，$x=-1$ 或 $x=2$ 是方程的解；

当$t=2$时，$\frac{x^2}{x+2}=2$，

解得$x=1+\sqrt{5}$或$x=1-\sqrt{5}$，

经检验，$x=1+\sqrt{5}$或$x=1-\sqrt{5}$是方程的解.

∴原方程的解为：$x_1=-1$；$x_2=2$；$x_3=1+\sqrt{5}$；$x_4=1-\sqrt{5}$.

（2）设$\sqrt{x^2+2x}=t(t\geq0)$，则有$x^2+2x=t^2$，

∴原方程可化为：$t^2+4t-5=0$，

解得$t=-5$（舍）或$t=1$，

∴$\sqrt{x^2+2x}=1$，

∴$x^2+2x-1=0$，

解得$x_1=\sqrt{2}-1$或$x_2=-\sqrt{2}-1$；

经检验：$x_1=\sqrt{2}-1$，$x_2=-\sqrt{2}-1$是原方程的解.

7．解下列方程：

(1) $x^2+3x-4=0$；

(2) $2x^2-4x-1=0$.

【答案】(1) $x_1=1$，$x_2=-4$；

(2) $x_1=\frac{2+\sqrt{6}}{2}$，$x_2=\frac{2-\sqrt{6}}{2}$.

【分析】本题考查了解一元二次方程的能力.

（1）利用因式分解法求解即可；

（2）利用公式法求解即可.

【详解】（1）解：$x^2+3x-4=0$，

∴$(x-1)(x+4)=0$，

∴$x-1=0$或$x+4=0$，

∴$x_1=1$，$x_2=-4$；

（2）解：∵$2x^2-4x-1=0$，

∴$a=2$，$b=-4$，$c=-1$，

$\therefore \Delta = b^2 - 4ac = 16 + 8 = 24 > 0$，

$\therefore x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{24}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$，

$\therefore x_1 = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}$，$x_2 = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}$．

8．解方程：

(1) $x^2 - 3x = -1$；

(2) $(x+5)^2 = 3(x+5)$．

【答案】(1) $x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$

(2) $x_1 = -5, x_2 = -2$

【分析】本题考查了一元二次方程的解法，常用的方法有直接开平方法、配方法、因式分解法、求根公式法，熟练掌握各种方法是解答本题的关键．

（1）用配方法求解即可；

（2）移项后用因式分解法求解即可．

【详解】（1）$\because x^2 - 3x = -1$，

$\therefore x^2 - 3x + \frac{9}{4} = -1 + \frac{9}{4}$，

$\therefore \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$，

$\therefore x - \frac{3}{2} = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，

$\therefore x_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$；

（2）$\because (x+5)^2 = 3(x+5)$，

$\therefore (x+5)^2 - 3(x+5) = 0$，

$\therefore (x+5)(x+5-3) = 0$，

$\therefore x+5=0$ 或 $x+5-3=0$，

$\therefore x_1 = -5, x_2 = -2$．

9．解下列方程：

(1) $x^2 - 2x - 1 = 0$；

(2) $x^2+6x-16=0$

【答案】(1) $x_1=1+\sqrt{2}$， $x_2=1-\sqrt{2}$

(2) $x_1=-8$， $x_2=2$

【分析】本题考查了解一元二次方程.

（1）利用配方法得到$(x-1)^2=2$，然后利用直接开平方法解方程；

（2）利用因式分解法把方程转化为$x+8=0$或$x-2=0$，然后解两个一次方程即可.

熟练掌握解一元二次方程的几种常用方法：直接开平方法、因式分解法、公式法、配方法，结合方程的特点选择合适、简便的方法是解题的关键.

【详解】（1）解：$x^2-2x-1=0$，

$(x-1)^2=2$

$x-1=\pm\sqrt{2}$，

$x_1=1+\sqrt{2}$， $x_2=1-\sqrt{2}$；

（2） $x^2+6x-16=0$，

$(x+8)(x-2)=0$，

$x+8=0$， $x-2=0$，

$x_1=-8$， $x_2=2$.

10．解方程

(1) $2x^2-4x-1=0$

(2) $2(x-3)^2=3x-9$

【答案】(1) $x_1=\frac{2+\sqrt{6}}{2},x_2=\frac{2-\sqrt{6}}{2}$

(2) $x_1=3$， $x_2=\frac{9}{2}$

【分析】本题考查了解一元二次方程，

（1）利用公式法，即可解得；

（2）利用因式分解法，即可解答.

【详解】（1）解：由$2x^2-4x-1=0$可得$a=2,b=-4,c=-1$，

$$\therefore x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\times2\times(-1)}}{2\times2}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2},$$

解得$x_1=\frac{2+\sqrt{6}}{2},x_2=\frac{2-\sqrt{6}}{2}$；

（2）解：$2(x-3)^2=3x-9$，

$2(x-3)^2-3(x-3)=0$，

$(x-3)[2(x-3)-3]=0$，

可得$x-3=0$或$2(x-3)-3=0$，

解得$x_1=3$，$x_2=\frac{9}{2}$.

11．解下列方程：

(1) $x^2-2x-5=0$（配方法）

(2) $(x-3)^2=2(3-x)$

【答案】(1) $x_1=1+\sqrt{6}$，$x_2=1-\sqrt{6}$

(2) $x_1=3$，$x_2=1$

【分析】本题考查解一元二次方程．

（1）配方法解方程即可；

（2）因式分解法解方程即可．

掌握解一元二次方程的方法，是解题的关键．

【详解】（1）解：$x^2-2x-5=0$

$x^2-2x=5$

$x^2-2x+1=5+1$

$(x-1)^2=6$

$\therefore x-1=\pm\sqrt{6}$

解得：$x_1=1+\sqrt{6}$，$x_2=1-\sqrt{6}$；

（2）解：$(x-3)^2+2(x-3)=0$，

$\left(x-3\right)\left(x-1\right)=0$，

则 $x-3=0$ 或 $x-1=0$，

解得 $x_1=3$， $x_2=1$.

12．阅读材料：为解方程 $(x^2-1)^2-5(x^2-1)+4=0$，我们可以将 x^2-1 看作一个整体，设 $x^2-1=y$，则原方程可化为

$y^2-5y+4=0$ ①，解得 $y_1=1$，$y_2=4$.

当 $y=1$ 时， $x^2-1=1$，$\therefore x^2=2$，$\therefore x=\pm\sqrt{2}$.

当 y=4 时， $x^2-1=4$， $x^2=5$，$\therefore x=\pm\sqrt{5}$.

故原方程的解为 $x_1=\sqrt{2}$， $x_2=-\sqrt{2}$， $x_3=\sqrt{5}$， $x_4=-\sqrt{5}$.

解答问题：

(1)上述解题过程，在由原方程得到方程①的过程中，利用_法达到了降次的目的.

(2)请利用以上知识解方程 $(x^2+x)^2-4(x^2+x)+3=0$.

【答案】(1)换元

(2)方程的解为 $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$， $x_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$， $x_3=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$， $x_4=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

【分析】本题考查了利用换元法解次数高于 2 次的整式方程，读懂材料提供的方法是关键.

（1）根据材料即可完成解答；

（2）利用材料中提供的方法完成即可.

【详解】（1）解：上述解题过程，在由原方程得到方程①的过程中，体现了换元的数学思想.

故答案为：换元；

（2）解：设 $y=x^2+x$，

原方程可化为 $y^2-4y+3=0$，

则 $(y-3)(y-1)=0$，

$\therefore$ $y-3=0$ 或 $y-1=0$，

$\therefore$ $y_1=3$，$y_2=1$，

当 $y=3$ 时， $x^2+x=3$，

解得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$，

当 $y=1$ 时，$x^2+x=1$，

解得 $x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$，

∴原方程的解为 $x_1=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$，$x_3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$x_4=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

13．阅读材料：解方程 $\left(x^2-2\right)^2-\left(x^2-2\right)-2=0$ 时，我们可以将 x^2-2 视为一个整体，

设 $x^2-2=y$，则 $y^2=\left(x^2-2\right)^2$，原方程化为 $y^2-y-2=0$，解此方程，得 $y_1=-1$，$y_2=2$.

当 $y=-1$ 时，$x^2-2=-1$，$x^2=1$，$\therefore x=\pm1$；

当 $y=2$ 时，$x^2-2=2$，$x^2=4$，$\therefore x=\pm2$.

∴原方程的解为 $x_1=-1$，$x_2=1$，$x_3=-2$，$x_4=2$.

以上方法就叫换元法，达到了降次转化为一元二次方程的目的．这一过程体现了数学整体思想和转化的思想．

类比应用：运用上述方法解方程：$\left(x^2+2x\right)^2-\left(x^2+2x\right)-12=0$.

【答案】$x_1=-1+\sqrt{5}$，$x_2=-1-\sqrt{5}$，

【分析】本题考查了换元法解一元二次方程，设 $x^2+2x=y$，原方程化为：$y^2-y-12=0$，得出方程的解，当 $y=4$ 时，当 $y=-3$ 时，代入原方程即可求解，解题的关键是掌握换元法解一元二次方程的一般步骤．

【详解】解：设 $x^2+2x=y$，则：$y^2=\left(x^2+2x\right)^2$，

原方程化为：$y^2-y-12=0$，

解得：$y_1=4$，$y_2=-3$，

当 $y=4$ 时，$x^2+2x=4$，即：$(x+1)^2=5$，

解得：$x_1=-1+\sqrt{5}$，$x_2=-1-\sqrt{5}$，

当 $y=-3$ 时，$x^2+2x=-3$，即：$(x+1)^2=-2$（舍去），

∴原方程的解为 $x_1=-1+\sqrt{5}$，$x_2=-1-\sqrt{5}$.

14．定义：若一个整数能表示成 a^2+b^2（a，b 是整数）的形式，则称这个数为“平和数”．例如，5 是“平和数”．理由：因为 $5=2^2+1^2$．再如，

$M=x^2+2xy+2y^2=(x+y)^2+y^2$（$x$，$y$是整数），所以$M$也是“平和数”．

解决问题：

(1)请你再写一个小于 5 的“平和数”_____；判断 29 是否为“平和数”____（填“是”或“否”）；

(2)若二次三项式$x^2-6x+13$（x是整数）是“平和数”，可配方成$(x-m)^2+n$（m，n为常数），则$mn=$_____．

(3)已知“平和数”$x^2+y^2-4x+6y+13$（x，y是整数）的值为 0，则$x+y$的值为_____；

(4)已知$S=x^2+9y^2+6x-6y+k$（x，y是整数，k是常数），要使S为“平和数”，请写出符合条件的k的值_____；

(5)已知实数x，y满足$-x^2+9x+y-25=0$，求$x+y$的最小值．

【答案】(1)4；是

(2)12

(3)-1

(4)$k=10$

(5)当$x=4$时，$x+y$的最小值为 9

【分析】本题考查的是配方法的应用，掌握完全平方公式、偶次方的非负性是解题的关键；

（1）根据“平和数”的定义判断即可；

（2）利用配方法进行转化，然后求得对应系数的值；

（3）配方后根据非负数的性质可得x和y的值，进行计算即可；

（4）利用完全平方公式把原式变形，根据“平和数”的定义证明结论；

（5）根据题中结论求解；

【详解】（1）4 是“平和数”，

理由：因为$=2^2+0^2$；

29 是“平和数”，

理由：因为$29=5^2+2^2$．

故答案为：4(答案不唯一)，是；

（2）$\because x^2-6x+13=x^2-6x+9+4=(x-3)^2+4$

$\therefore m=3,n=4,$