§5.2 中心极限定理

一. 基本定义

1. 定义：依分布收敛

设随机变量X，X_1，X_2，…的分布函数分别为$F(x), F_1(x), F_2(x), \ldots$,若

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$$

在$F(x)$的每一个连续点上都成立，则称随机变量序列$\{X_k\}, k = 1,2,\ldots$依分布收敛于X。并记为

$$X_n \xrightarrow{L} X$$

2. 定义：中心极限定理

设随机变量 $X \sim N(0,1)$，$\{X_k\}$，$k = 1,2,\ldots$相互独立，且数学期望和方差都存在, 若标准化随机变量序列

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum^{n}}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D(X_k)}}$$

依分布收敛于 X，则称随机变量序列$\{X_k\}$，$k = 1,2,\ldots$服从中心极限定理。

注:1. 它解释了现实中哪些随机变量看为服从正态分布?

2. 它给出了概率的近似计算公式。

二. 中心极限定理

1. 独立同分布中心极限定理

设$\{X_k\}$，$k=1,2\cdots$是一个相互独立、具有同分布的随机变量序列，且$E(X_k)=$ ，$D(X_k)=$ ^{2}.

则随机变量序列$\{X_k\}$满足中心极限定理，即有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n}{\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x)$$

重复试验次数估计

独立同分布中心极限定理的应用

1）求随机变量之和 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 取值的概率。

产 品 检 验

2）已知 $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ 取值的概率，反求n。

产 品 测 重

2. 棣莫佛-拉普拉斯中心极限定理

设随机变量序列$\{Y_n\}$，$Y_n \sim B(n, p)$，$n=1,2\ldots$。则对于任意的实数 x，有

$$\lim_{n} P\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right\}$$

证明：对于任意正整数n，随机变量Y_n 可表示为

$$Y_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ 相互独立，$X_i \sim B(1, p)$，且有

$$E(X_i) = p \quad , D(X_i) = p(1-p)$$

所以相互独立的随机变量序列$\{X_i\}, i=1,2,\ldots$满足中心极限定理。即有

$$\lim_{n} P\left\{\frac{Y_n - np}{\sqrt{\quad}}\right.$$

$$= \lim_{n} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} E(X_k)}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} D(X_k)}} \le x\right\}$$

$$= \Phi(x)$$

所以结论成立。 #

若$X \sim B(n, p)$，对于足够大的n，有

$$P\{m_1 < X \le m_2\}$$

$$\approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

航船的稳定性

报亭售报问题

重复试验次数估计

例：将一枚均匀硬币连续抛 n 次，试用中心极定理来估计 n，使下式成立。

$$P\{|\ f_n(A)-P(A)\ |<0.01\}\geq 0.99$$

其中 A ={ 出现正面 }。

解：$P(A)=1/2$，令

$$X_i=\begin{cases}1, & \text{第}i\text{次出现正面;}\\ 0, & \text{否则,}\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots n$$

则随机变量序列{ X_i }，i = 1,2,…是相互独立且同分布的。而且有

$$E(X_i)=\frac{1}{2},\quad D(X_i)=\frac{1}{4},\quad i=1,2,\cdots$$

所以随机变量序列{ X_i }，满足独立同分布中心极限定理。



重复试验次数估计

$$= P\left\{\left|\frac{1}{2} - 0.01 < \frac{1}{n}\sum\right.\right.$$

$$= P\left\{\left|\frac{n}{2} - 0.01n < \sum^{n}\right.\right.$$

$$= P\{-\frac{0.01n}{1/2\sqrt{n}} < \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{n}{2}}{1/2\sqrt{n}} < \frac{0.01n}{1/2\sqrt{n}}\}$$

重复试验次数估计

因为 $\dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \dfrac{n}{2}}{1/2\sqrt{n}}$ 可由$N(0,1)$来近似.

$$\approx 2\Phi(0.02\sqrt{n}) - 1$$

$$\Rightarrow \Phi(0.02\sqrt{\quad} \qquad \Rightarrow 0.02\sqrt{n} \geq 2.58$$

解得 $n \geq 16{,}641$ (次) (250,000次)

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/218126011052006047