山西省忻州一中等四校 2024 年第二学期 5 月质检考试高三数学试题

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角"条形码粘贴处"。

2．作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。

3．非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4．考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1．已知抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 上的点 M 到其焦点 F 的距离比点 M 到 y 轴的距离大 $\frac{1}{2}$，则抛物线的标准方程为（　）

A． $y^2=x$　　**B．** $y^2=2x$　　**C．** $y^2=4x$　　**D．** $y^2=8x$

2．对两个变量进行回归分析，给出如下一组样本数据：$(0.675,-0.989)$，$(1.102,-0.010)$，$(2.899,1.024)$，$(9.101,2.978)$，下列函数模型中拟合较好的是（　　）

A． $y=3x$　　**B．** $y=3^x$　　**C．** $y=-(x-1)^2$　　**D．** $y=\log_3 x$

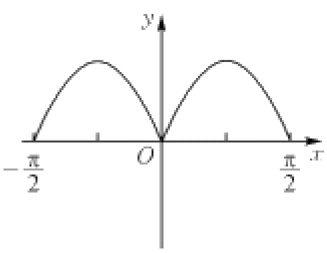
3．一袋中装有 5 个红球和 3 个黑球（除颜色外无区别），任取 3 球，记其中黑球数为 X，则 $E(X)$ 为（　　）

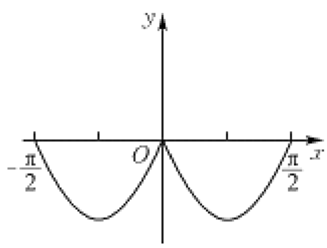
A． $\frac{9}{8}$　　**B．** $\frac{7}{8}$　　**C．** $\frac{1}{2}$　　**D．** $\frac{62}{56}$

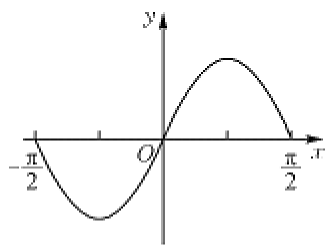
4．设实数 x、y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\le 10\\ x-y\le 2\\ x\ge 4\end{cases}$，则 $z=2x+3y$ 的最小值为（　　）

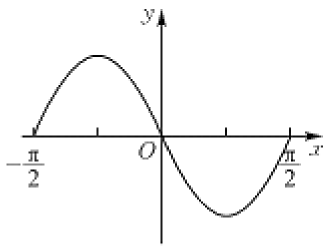
A．2　　**B．24**　　**C．16**　　**D．14**

5．函数 $f(x)=\dfrac{x\cos x}{2^x+2^{-x}}$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的图象大致为（　　）

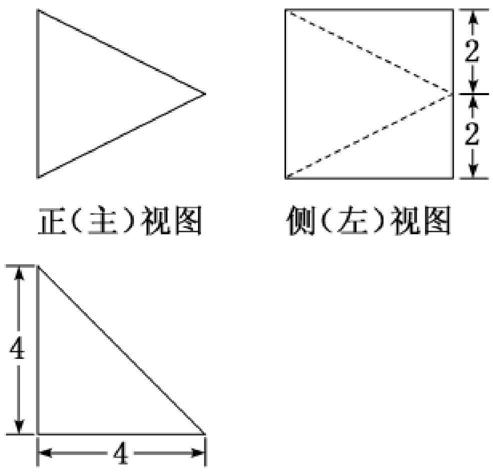
A．


B．


C．


D. 

6．已知某几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积是（　　）



正（主）视图　　侧（左）视图

俯视图

A．$\frac{64}{3}$　　B．64　　C．$\frac{32}{3}$　　D．32

7．设函数 $f\left(x\right)=\frac{e^x}{x}-t\left(\ln x+x+\frac{2}{x}\right)$ 恰有两个极值点，则实数 t 的取值范围是（　　）

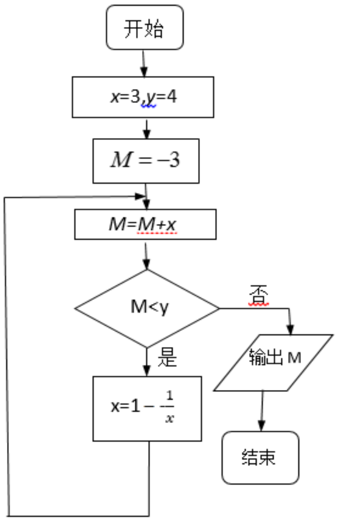
A．$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$　　B．$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$

C．$\left(\frac{1}{2},\frac{e}{3}\right)\cup\left(\frac{e}{3},+\infty\right)$　　D．$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left(\frac{e}{3},+\infty\right)$

8．已知抛物线 C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点为 F，$M\left(\frac{1}{2},y_0\right)$ 为该抛物线上一点，以 M 为圆心的圆与 C 的准线相切于点 A，$\angle AMF=120°$，则抛物线方程为（　　）

A．$y^2=2x$　　B．$y^2=4x$　　C．$y^2=6x$　　D．$y^2=8x$

9．执行如图所示的程序框图，输出的结果为（　　）



A．$\frac{19}{3}$　　B．4　　C．$\frac{25}{4}$　　D．$\frac{13}{2}$

10．函数 $f(x)=2\cos^2 x+(\sin x+\cos x)^2-2$ 的一个单调递增区间是（　　）

A．$\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$　　B．$\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$　　C．$\left[\frac{\pi}{8},\frac{5\pi}{8}\right]$　　D．$\left[\frac{5\pi}{8},\frac{9\pi}{8}\right]$

11．在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，点 E，F，G 分别为棱 A_1D_1，D_1D，A_1B_1 的中点，给出下列命题：①$AC_1\perp EG$；②$GC//ED$；③$B_1F\perp$平面 BGC_1；④EF 和 BB_1 成角为 $\frac{\pi}{4}$.正确命题的个数是（　　）

A．0　　B．1　　C．2　　D．3

12．已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$ 的左、右焦点分别为 F_1、F_2，圆 $x^2+y^2=b^2$ 与双曲线在第一象限内的交点为 M，若 $|MF_1|=3|MF_2|$．则该双曲线的离心率为

A．2　　B．3　　C．$\sqrt{2}$　　D．$\sqrt{3}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13．为激发学生团结协作，敢于拼搏，不言放弃的精神，某校高三 5 个班进行班级间的拔河比赛．每两班之间只比赛 1 场，目前（—）班已赛了 4 场，（二）班已赛了 3 场，（三）班已赛了 2 场，（四）班已赛了 1 场．则目前（五）班已经参加比赛的场次为__________．

14．已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=-\frac{1}{4}+\lambda a_n$ 且 $a_1=\frac{1}{4}$，设 $f(x)=e^x-e^{2-x}+1$，则 $f(\log_2 a_1)+f(\log_2 a_2)+\cdots\cdots+f(\log_2 a_7)$ 的值等于_______________．

15．已知 $x,y\in R$，i 为虚数单位，且 $(x-2)i-y=-1+i$，则 $x+y=$_____．

16．已知α的终边过点$(3m,-2)$，若$\tan\left(\pi+\alpha\right)=\dfrac{1}{3}$，则$m=$__________.

三、解答题：共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．（12分）设函数$f(x)=\left|x+3\right|$，$g(x)=\left|2x-1\right|$.

（1）解不等式$f(x)<g(x)$；

（2）若$2f(x)+g(x)>ax+4$对任意的实数x恒成立，求a的取值范围.

18．（12分）选修4-5：不等式选讲

已知函数$f\left(x\right)=|x+1|+2\left|x-a\right|$.

（1）设$a=1$，求不等式$f\left(x\right)\le 7$的解集；

（2）已知$a>-1$，且$f\left(x\right)$的最小值等于3，求实数a的值.

19．（12分）已知a，b均为正数，且$ab=1$.证明：

（1）$\sqrt{a^2+b^2}\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b})$；

（2）$\dfrac{(b+1)^2}{a}+\dfrac{(a+1)^2}{b}\ge 8$.

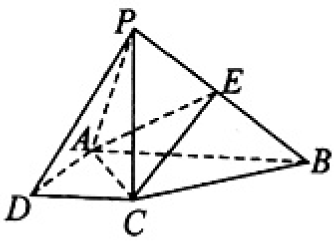
20．（12分）在平面直角坐标系xOy中，直线l的参数方程为$\begin{cases}x=a+\dfrac{1}{2}t\\ y=\sqrt{3}a-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$（$t$为参数，$a\in R$）.在以坐标原点为极点、$x$轴的非负半轴为极轴的极坐标系中，曲线$C$的极坐标方程为$3\rho^2\cos 2\theta+4\rho^2\sin^2\theta=3$.

（1）若点$A\left(2,0\right)$在直线l上，求直线l的极坐标方程；

（2）已知$a>0$，若点P在直线l上，点Q在曲线C上，且$|PQ|$的最小值为$\dfrac{\sqrt{6}}{2}$，求a的值.

21．（12分）如图,在四棱锥$P-ABCD$中,四边形$ABCD$是直角梯形，$AB\perp AD, AB//CD, PC\perp$底面$ABCD$

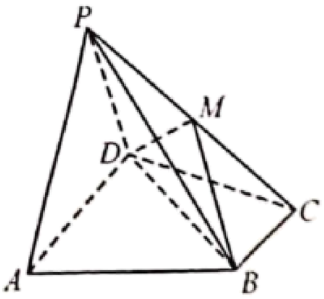
$AB=2AD=2CD=4, PC=2a, E$,是PB的中点.



（1）.求证:平面 $EAC\perp$ 平面 PBC；

（2）.若二面角 $P-AC-E$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$,求直线 PA 与平面 EAC 所成角的正弦值.

22.（10 分）如图，平面四边形 $ABCD$ 为直角梯形，$AD//BC$，$\angle ADC=90^{\circ}$，$AB=AD=2BC=2$，将 $\triangle ABD$ 绕着 AD 翻折到 ΔPAD.



（1）M 为 PC 上一点，且 $\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MC}$，当 $PA//$ 平面 DMB 时，求实数 λ 的值；

（2）当平面 PAD 与平面 PBC 所成的锐二面角大小为 30° 时，求 PC 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

由抛物线的定义转化，列出方程求出 p，即可得到抛物线方程.

【详解】

由抛物线 $y^2=2px$（$p>0$）上的点 M 到其焦点 F 的距离比点 M 到 y 轴的距离大 $\dfrac{1}{2}$，根据抛物线的定义可得 $\dfrac{p}{2}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore p=1$，所以抛物线的标准方程为：$y^2=2x$.

故选 B.

【点睛】

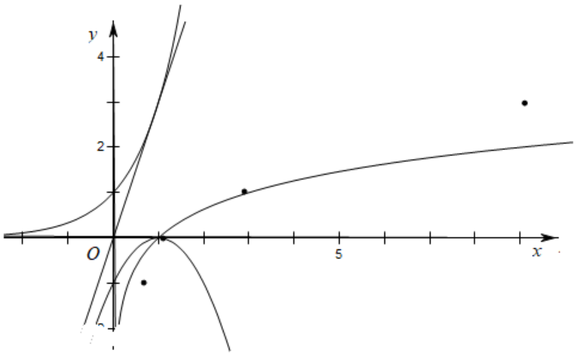
本题考查了抛物线的简单性质的应用，抛物线方程的求法，属于基础题.

2、D

【解析】

作出四个函数的图象及给出的四个点，观察这四个点在靠近哪个曲线.

【详解】



如图，作出 A，B，C，D 中四个函数图象，同时描出题中的四个点，它们在曲线 $y=\log_3 x$ 的两侧，与其他三个曲线都离得很远，因此 D 是正确选项，

故选：D.

【点睛】

本题考查回归分析，拟合曲线包含或靠近样本数据的点越多，说明拟合效果好.

3、A

【解析】

由题意可知，随机变量 X 的可能取值有 0、1、2、3，计算出随机变量 X 在不同取值下的概率，进而可求得随机变量 X 的数学期望值.

【详解】

由题意可知，随机变量 X 的可能取值有 0、1、2、3，

则 $P\left(X=0\right)=\dfrac{C_5^3}{C_8^3}=\dfrac{10}{56}$，$P\left(X=1\right)=\dfrac{C_5^2C_3^1}{C_8^3}=\dfrac{30}{56}$，$P\left(X=2\right)=\dfrac{C_5^1C_3^2}{C_8^3}=\dfrac{15}{56}$，$P\left(X=3\right)=\dfrac{C_3^3}{C_8^3}=\dfrac{1}{56}$.

因此，随机变量 X 的数学期望为 $E\left(X\right)=0\times\dfrac{10}{56}+1\times\dfrac{30}{56}+2\times\dfrac{15}{56}+3\times\dfrac{1}{56}=\dfrac{9}{8}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查随机变量数学期望的计算，考查计算能力，属于基础题.

4、D

【解析】

做出满足条件的可行域，根据图形即可求解.

【详解】

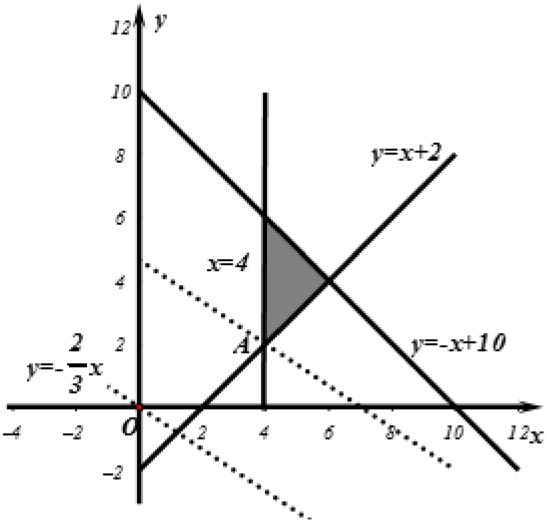
做出满足$\begin{cases} x+y\le 10 \\ x-y\le 2 \\ x\ge 4 \end{cases}$ 的可行域，如下图阴影部分，

根据图象，当目标函数$z=2x+3y$过点A时，取得最小值，

由$\begin{cases} x=4 \\ x-y=2 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=4 \\ y=2 \end{cases}$，即$A(4,2)$，

所以$z=2x+3y$的最小值为14．

故选：D.



【点睛】

本题考查二元一次不等式组表示平面区域，利用数形结合求线性目标函数的最值，属于基础题.

5、C

【解析】

根据函数的奇偶性及函数在$0<x<\frac{\pi}{2}$时的符号，即可求解.

【详解】

由$f(-x)=-\frac{x\cos x}{2^x+2^{-x}}=-f(x)$可知函数$f(x)$为奇函数.

所以函数图象关于原点对称，排除选项A，B；

当$0<x<\frac{\pi}{2}$时，$\cos x>0$，

$\therefore f(x)=\frac{x\cos x}{2^x+2^{-x}}>0$，排除选项*D*，

故选：*C*.

【点睛】

本题主要考查了函数的奇偶性的判定及奇偶函数图像的对称性，属于中档题.

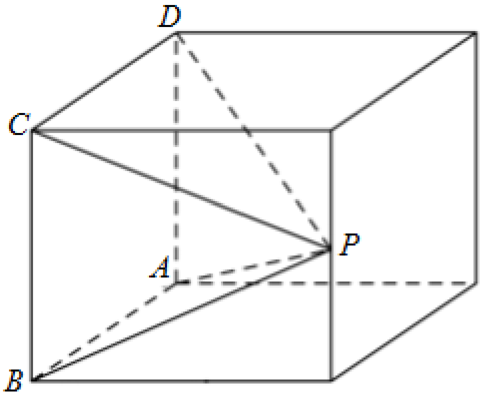
6、A

【解析】

根据三视图，还原空间几何体，即可得该几何体的体积.

【详解】

由该几何体的三视图，还原空间几何体如下图所示：



可知该几何体是底面在左侧的四棱锥，其底面是边长为 4 的正方形，高为 4，

故 $V=\frac{1}{3}\times(4\times4)\times4=\frac{64}{3}$.

故选：A

【点睛】

本题考查了三视图的简单应用，由三视图还原空间几何体，棱锥体积的求法，属于基础题.

7、C

【解析】

$f(x)$ 恰有两个极值点，则 $f'(x)=0$ 恰有两个不同的解，求出 $f'(x)$ 可确定 $x=1$ 是它的一个解，另一个解由方程 $\frac{e^x}{x+2}-t=0$ 确定，令 $g(x)=\frac{e^x}{x+2}(x>0)$ 通过导数判断函数值域求出方程有一个不是 1 的解时 t 应满足的条件.

【详解】

由题意知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}-t\left(\frac{1}{x}+1-\frac{2}{x^2}\right)$

$=\frac{(x-1)\left[e^x-t(x+2)\right]}{x^2}=\frac{(x-1)(x+2)\left(\frac{e^x}{x+2}-t\right)}{x^2}$.

因为 $f(x)$ 恰有两个极值点，所以 $f'(x)=0$ 恰有两个不同的解，显然 $x=1$ 是它的一个解，另一个解由方程 $\frac{e^x}{x+2}-t=0$ 确定，且这个解不等于 1.

令 $g\left(x\right)=\dfrac{e^{x}}{x+2}\left(x>0\right)$，则 $g'\left(x\right)=\dfrac{\left(x+1\right)e^{x}}{\left(x+2\right)^{2}}>0$，所以函数 $g\left(x\right)$ 在 $\left(0,+¥\right)$ 上单调递增，从而 $g\left(x\right)>g\left(0\right)=\dfrac{1}{2}$，

且 $g\left(1\right)=\dfrac{e}{3}$.所以，当 $t>\dfrac{1}{2}$ 且 $t\neq\dfrac{e}{3}$ 时，$f\left(x\right)=\dfrac{e^{x}}{x}-t\left(\ln x+x+\dfrac{2}{x}\right)$ 恰有两个极值点，即实数 t 的取值范围是

$\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{e}{3}\right)\cup\left(\dfrac{e}{3},+\infty\right)$.

故选：C

【点睛】

本题考查利用导数研究函数的单调性与极值，函数与方程的应用，属于中档题.

8、C

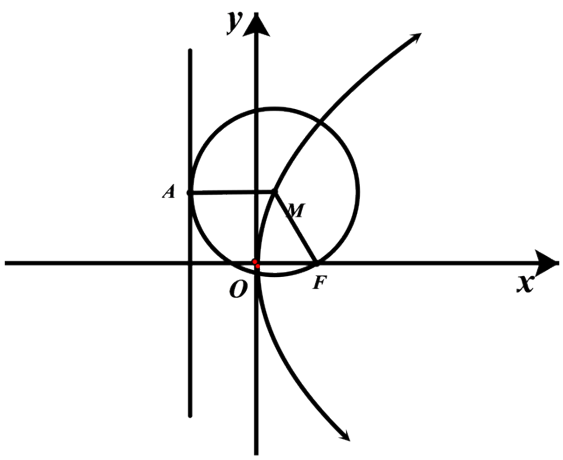
【解析】

根据抛物线方程求得 M 点的坐标，根据 $MA//x$ 轴、$\angle AMF=120°$ 列方程，解方程求得 p 的值.

【详解】

不妨设 M 在第一象限，由于 M 在抛物线上，所以 $M\left(\dfrac{1}{2},\sqrt{p}\right)$，由于以 M 为圆心的圆与 C 的准线相切于点 A，根据抛物线的定义可知，$\left|MA\right|=\left|MF\right|$、$MA//x$ 轴，且 $F\left(\dfrac{p}{2},0\right)$.由于 $\angle AMF=120°$，所以直线 MF 的倾斜角 α 为 $120°$，所以 $k_{MF}=\tan120°=\dfrac{\sqrt{p}-0}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{p}{2}}=-\sqrt{3}$，解得 $p=3$，或 $p=\dfrac{1}{3}$（由于 $\dfrac{1}{2}-\dfrac{p}{2}<0,p>1$，故舍去）.所以抛物线的方程为 $y^{2}=6x$.

故选：C



【点睛】