专题16 极值与最值

【考点预测】

知识点一：极值与最值

1．函数的极值

函数 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义，如果对 x_0 附近的所有点都有 $f(x)<f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数的一个极大值，记作 $y_{极大值}=f(x_0)$．如果对 x_0 附近的所有点都有 $f(x)>f(x_0)$，则称 $f(x_0)$ 是函数的一个极小值，记作 $y_{极小值}=f(x_0)$．极大值与极小值统称为极值，称 x_0 为极值点．

求可导函数 $f(x)$ 极值的一般步骤

（1）先确定函数 $f(x)$ 的定义域；

（2）求导数 $f'(x)$；

（3）求方程 $f'(x)=0$ 的根；

（4）检验 $f'(x)$ 在方程 $f'(x)=0$ 的根的左右两侧的符号，如果在根的左侧附近为正，在右侧附近为负，那么函数 $y=f(x)$ 在这个根处取得极大值;如果在根的左侧附近为负，在右侧附近为正，那么函数 $y=f(x)$ 在这个根处取得极小值.

注①可导函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值的充要条件是：x_0 是导函数的变号零点，即 $f'(x_0)=0$，且在 x_0 左侧与右侧，$f'(x)$ 的符号导号.

② $f'(x_0)=0$ 是 x_0 为极值点的既不充分也不必要条件，如 $f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，但 $x_0=0$ 不是极值点.另外，极值点也可以是不可导的，如函数 $f(x)=|x|$，在极小值点 $x_0=0$ 是不可导的，于是有如下结论：x_0 为可导函数 $f(x)$ 的极值点 $\Rightarrow f'(x_0)=0$；但 $f'(x_0)=0 \not\Rightarrow x_0$ 为 $f(x)$ 的极值点.

2．函数的最值

函数 $y=f(x)$ 最大值为极大值与靠近极小值的端点之间的最大者；函数 $f(x)$ 最小值为极小值与靠近极大值的端点之间的最小者．

导函数为 $f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $(m<x_1<x_2<n)$

（1）当 $a>0$ 时，最大值是 $f(x_1)$ 与 $f(n)$ 中的最大者；最小值是 $f(x_2)$ 与 $f(m)$ 中的最小者．

（2）当 $a<0$ 时，最大值是 $f(x_2)$ 与 $f(m)$ 中的最大者；最小值是 $f(x_1)$ 与 $f(n)$ 中的最小者．

一般地，设 $y=f(x)$ 是定义在 $[m，n]$ 上的函数，$y=f(x)$ 在 $(m，n)$ 内有导数，求函数 $y=f(x)$ 在 $[m，n]$ 上的最大值与最小值可分为两步进行：

（1）求 $y=f(x)$ 在 $(m，n)$ 内的极值（极大值或极小值）；

（2）将 $y=f(x)$ 的各极值与 $f(m)$ 和 $f(n)$ 比较，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值．

注①函数的极值反映函数在一点附近情况，是局部函数值的比较，故极值不一定是最值；函数的最值是对函数在整个区间上函数值比较而言的，故函数的最值可能是极值，也可能是区间端点处的函数值；

②函数的极值点必是开区间的点，不能是区间的端点；

③函数的最值必在极值点或区间端点处取得.

【方法技巧与总结】

（1）若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 D 上存在最小值 $f\left(x\right)_{\min}$ 和最大值 $f\left(x\right)_{\max}$，则

不等式 $f\left(x\right)>a$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f\left(x\right)_{\min}>a$；

不等式 $f\left(x\right)\geq a$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f\left(x\right)_{\min}\geq a$；

不等式 $f\left(x\right)<b$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f\left(x\right)_{\max}<b$；

不等式 $f\left(x\right)\leq b$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f\left(x\right)_{\max}\leq b$；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 D 上不存在最大（小）值，且值域为 $\left(m,\ n\right)$，则

不等式 $f\left(x\right)>a\left(\text{或}f\left(x\right)\geq a\right)$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow m\geq a$.

不等式 $f\left(x\right)<b\left(\text{或}f\left(x\right)\leq b\right)$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow m\leq b$.

（3）若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 D 上存在最小值 $f\left(x\right)_{\min}$ 和最大值 $f\left(x\right)_{\max}$，即 $f\left(x\right)\in\left[m,n\right]$，则对不等式有解问题有以下结论：

不等式 $a<f\left(x\right)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a<f\left(x\right)_{\max}$；

不等式 $a\leq f\left(x\right)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a\leq f\left(x\right)_{\max}$；

不等式 $a>f\left(x\right)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a>f\left(x\right)_{\min}$；

不等式 $a\geq f\left(x\right)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a\geq f\left(x\right)_{\min}$；

（4）若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 D 上不存在最大（小）值，如值域为 $\left(m,\ n\right)$，则对不等式有解问题有以下结论：

不等式 $a<f\left(x\right)\left(\text{或a}\leq f\left(x\right)\right)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a<n$

不等式 $b>f\left(x\right)\left(\text{或b}\geq f\left(x\right)\right)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow b>m$

（5）对于任意的 $x_1\in\left[a,\ b\right]$，总存在 $x_2\in\left[\mathrm{m},\ n\right]$，使得 $f\left(x_1\right)\leq g\left(x_2\right)\Leftrightarrow f\left(x_1\right)_{\max}\leq g\left(x_2\right)_{\max}$；

（6）对于任意的 $x_1\in\left[a,\ b\right]$，总存在 $x_2\in\left[\mathrm{m},\ n\right]$，使得 $f\left(x_1\right)\geq g\left(x_2\right)\Leftrightarrow f\left(x_1\right)_{\min}\geq g\left(x_2\right)_{\min}$；

（7）若存在 $x_1\in\left[a,\ b\right]$，对于任意的 $x_2\in\left[\mathrm{m},\ n\right]$，使得 $f\left(x_1\right)\leq g\left(x_2\right)\Leftrightarrow f\left(x_1\right)_{\min}\leq g\left(x_2\right)_{\min}$；

（8）若存在 $x_1\in\left[a,\ b\right]$，对于任意的 $x_2\in\left[\mathrm{m},\ n\right]$，使得 $f\left(x_1\right)\geq g\left(x_2\right)\Leftrightarrow f\left(x_1\right)_{\max}\geq g\left(x_2\right)_{\max}$；

（9）对于任意的 $x_1\in\left[a,\ b\right]$，$x_2\in\left[\mathrm{m},\ n\right]$ 使得 $f\left(x_1\right)\leq g\left(x_2\right)\Leftrightarrow f\left(x_1\right)_{\max}\leq g\left(x_2\right)_{\min}$；

（10）对于任意的 $x_1\in\left[a,\ b\right]$，$x_2\in\left[\mathrm{m},\ n\right]$ 使得 $f\left(x_1\right)\geq g\left(x_2\right)\Leftrightarrow f\left(x_1\right)_{\min}\geq g\left(x_2\right)_{\max}$；

（11）若存在 $x_1\in[a,\ b]$，总存在 $x_2\in[\mathrm{m},\ n]$，使得 $f(x_1)\le g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)_{\min}\le g(x_2)_{\max}$

（12）若存在 $x_1\in[a,\ b]$，总存在 $x_2\in[\mathrm{m},\ n]$，使得 $f(x_1)\ge g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)_{\max}\ge g(x_2)_{\min}$.

【题型归纳目录】

【典例例题】

题型一：求函数的极值与极值点

例 1．（2023·江西·上饶市第一中学模拟预测（文））已知函数 $f(x)=\mathbf{e}^x-a(x-1)(a\in\mathbf{R})$.

当 $a=1$ 时，求函数 $y=f(x)$ 的极值；

例 2．（2023·湖北·襄阳四中模拟预测）设 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin x$.

(1)求 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的极值；

(2)若对 $\forall x_1,x_2\in[0,\pi]$， $x_1\ne x_2$， 都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}+a>0$ 成立，求实数 a 的取值范围.

例 3．（2023·天津市咸水沽第一中学模拟预测）已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln(ax)}{x}-\mathrm{e}\ln x(\mathrm{e}=2.71828$ ……自然对数底数）.

(1)当 $a=\mathrm{e}$ 时，求函数 f（x）的单调区间；

(2)当 $a>\mathrm{e}$ 时，

（i）证明：$f(x)$ 存在唯一的极值点：

（ii）证明：$f(x)<(a-1)\mathrm{e}$

例 4．（2023·江西师大附中三模（理））已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}-\sin x$，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．

(1)判断函数 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是否存在极值，若存在，请判断是极大值还是极小值；若不存在，说明理由；

(2)求证：函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\pi)$ 上只有两个零点．

例 5．（2023·江苏苏州·模拟预测）函数 $f(x)=x-\sin x-\cos x$．

(1)求函数 $f(x)$ 在 $\left(-\pi,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的极值；

(2)证明：$F(x)=f(x)-\ln x$ 有两个零点．

【方法技巧与总结】

1．因此，在求函数极值问题中，一定要检验方程 $f'(x)=0$ 根左右的符号，更要注意变号后极大值与极小值是否与已知有矛盾．

2．原函数出现极值时，导函数正处于零点，归纳起来一句话：原极导零．这个零点必须穿越 x 轴，否则不是极值点．判断口诀：从左往右找穿越（导函数与 x 轴的交点）；上坡低头找极小，下坡抬头找极大．

题型二：根据极值、极值点求参数

例 6．（2023·四川·绵阳中学实验学校模拟预测（文））若函数 $f\left(x\right)=x^3-ax^2-bx+a^2$ 在 $x=1$ 处有极值 10，则 $a-b=$（　　）

A．6　　B．-15　　C．-6 或 15　　D．6 或 -15

例 7．（2023·江苏南通·模拟预测）已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-a\right)\left(x-b\right)\mathrm{e}^x$ 在 $x=a$ 处取极小值，且 $f\left(x\right)$

的极大值为4，则$b=$（　　）

A．-1　　B．2　　C．-3　　D．4

例8．（2023·四川绵阳·二模（文））若$x=2$是函数$f\left(x\right)=x^2+2\left(a-2\right)x-4a\ln x$的极大值点，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,-2\right)$　　B．$\left(-2,+\infty\right)$　　C．$\left(2,+\infty\right)$　　D．$\left(-2,2\right)$

例9．（2023·河南·模拟预测（文））已知函数$f\left(x\right)=\ln x-ax^2$的极值为$-\frac{1}{2}$，则$a=$（　　）

A．e　　B．$\frac{1}{2}$e　　C．$\frac{1}{2}$　　D．$\frac{1}{4}$

例10．（2023·河南·高三阶段练习（文））若函数$f\left(x\right)=\left(x^2+ax+2\right)\cdot \mathrm{e}^x$在R上无极值，则实数$a$的取值范围（　　）

A．$\left(-2,2\right)$　　B．$\left(-2\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$

C．$\left[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}\right]$　　D．$\left[-2,2\right]$

例11．（2023·四川省南充高级中学高三阶段练习（理））已知函数$f(x)=x^3-3mx^2+nx+m^2$在$x=-1$处取得极值0，则$m+n=$（　　）

A．2　　B．7　　C．2或7　　D．3或9

例12．（2023·全国·高三专题练习）函数$f(x)=\frac{e^x}{x}-a(x-\ln x)$在$(0,1)$内有极值，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,e)$　　B．$(0,e)$　　C．$(e,+\infty)$　　D．$[e,+\infty)$

例13．（2023·陕西·西北工业大学附属中学模拟预测（理））已知函数$f\left(x\right)=\left[ax^2-\left(4a+1\right)x+4a+3\right]\mathrm{e}^x$，若$x=2$是$f\left(x\right)$的极小值点，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]$　　B．$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C．$\left(-\infty,0\right)$　　D．$\left(-1,+\infty\right)$

例14．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+x$在区间$\left(\frac{1}{2},3\right)$上既有极大值又有极小值，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$\left(2,+\infty\right)$　　B．$\left[2,+\infty\right)$　　C．$\left(2,\frac{5}{2}\right)$　　D．$\left(2,\frac{10}{3}\right)$

例15．（2023·全国·高三专题练习）函数$f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\left(m+1\right)x^2+2\left(m-1\right)x$在$\left(0,4\right)$上无极值，则$m=$______.

例16．（2023·吉林长春·模拟预测（文））已知函数$f\left(x\right)=ax+\sin x$，$x\in\left(0,\pi\right)$.

(1)当$a=1$时，过$(0,1)$做函数$f(x)$的切线，求切线方程；

(2)若函数$f(x)$存在极值，求极值的取值范围.

例 17.（2023·北京市第十二中学三模）已知函数$f(x)=\ln x+\frac{a}{x},a\in\mathbf{R}$.

(1)当$a=1$时，求函数$f(x)$的单调递增区间；

(2)设函数$g(x)=\frac{f(x)-1}{x}$，若$g(x)$在$\left[1,\mathrm{e}^2\right]$上存在极值，求$a$的取值范围.

例 18.（2023·天津·耀华中学二模）已知函数$f(x)=\frac{ae^x}{x}+\ln x-x(a>0)$.

(1)若$a=1$，求函数$f(x)$的单调区间；

(2)若$f(x)$存在两个极小值点x_1,x_2，求实数a的取值范围.

例 19.（2023·河北·石家庄二中模拟预测）已知函数$f(x)=-x^3+ax^2+bx$.

(1)当$a=0,b=1$时，证明：当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)<\ln x$；

(2)若$b=a^2$，函数$f(x)$在区间$(1,2)$上存在极大值，求a的取值范围.

题型三：求函数的最值（不含参）

例 20.（2023·江苏徐州·模拟预测）函数$f(x)=|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$的最小值为____________.

例 21.（2023·全国·高三专题练习）函数$f(x)=\frac{x\mathrm{e}^x-\ln x}{x+1}$的最小值为______.

例 22.（2023·四川·模拟预测（文））对任意$a\in\mathbf{R}$，存在$b\in(0,+\infty)$，使得$a+1=\mathrm{e}\ln b$，则$b-a$的最小值为_________.

例 23.（2023·河南郑州·三模（文））$f(x)=e^x-x$在区间$[-1,1]$上的最小值是（　　）

A．$1+\frac{1}{e}$　　B．1　　C．$e+1$　　D．$e-1$

例 24．（2023·全国·高三专题练习）函数 $y=(x+1)e^{x+1},x\in[-3,4]$ 的最大值为（　　）

A．$2e^{-2}$　　B．$5e^{5}$　　C．$4e^{5}$　　D．$-e^{-1}$

例 25．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=1-ax\cos x\left(a\neq 0\right)$.

（1）当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(0,f\left(0\right)\right)$ 处的切线方程；

（2）求函数 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 的最小值.

例 26．（2023·山东·临沭县教育和体育局高二期中）已知函数 $f(x)=x^3+bx^2-x+a,x=1$ 是 $f(x)$ 的一个极值点.

(1)求 b 的值；

(2)当 $x\in[-2,2]$ 时，求函数 $f(x)$ 的最大值.

题型四：求函数的最值（含参）

例 27．（2023·北京通州·高二期中）已知函数 $f\left(x\right)=x^3-3x^2-9x+2$.

(1)求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

(2)求函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,a\right]$ 上的最小值.

例 28．（2023·河南·高二阶段练习（理））已知函数 $f(x)=x-m\ln x-m$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性；

(2)若函数 $f(x)$ 有最小值 $g(m)$，证明：$g(m)\ \leq\frac{1}{\mathrm{e}}$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立.

例 29．（2023·江苏·高二单元测试）已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-ax^2$．

（1）讨论 $f\left(x\right)$ 的单调性；

（2）当 $a>0$ 时，求 $f\left(x\right)$ 在区间 $[1,2]$ 上的最大值．

题型五：根据最值求参数

例 30．（2023·河北·模拟预测）已知 $a>0$，函数 $g\left(x\right)=x+\dfrac{1+a}{x}-2$ 在 $\left[2,+\infty\right)$ 上的最小值为 1，则 $a=$ __________．

例 31．（2023·山西运城·模拟预测（理））已知函数 $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-2x+1$，若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left(2a-2,2a+3\right)$ 上存在最小值.则实数 a 的取值范围是________．

例 32．（2023·浙江湖州·高三期末）若函数 $f\left(x\right)=\left(x^2+2x+1+a\right)\mathrm{e}^{x+2}$ 存在最小值，则实数 a 的取值范围是___________．

例 33．（2023·陕西·模拟预测（理））若函数 $f(x)=x^3-3x-1$ 在区间 $(a-2,2a+3)$ 上有最大值，则实数 a 的取值范围是_________．

题型六：函数单调性、极值、最值得综合应用

例 34．（2023·全国·高三专题练习（理））已知函数 f（x）＝ex＋ax·sin$x$．

(1)求 y＝f（x）在 x＝0 处的切线方程；

(2)当 a＝－2 时，设函数 g（x）＝$\dfrac{f(x)}{x}$，若 x_0 是 g（x）在（0，π）上的一个极值点，求证：x_0 是函数 g（x）在（0，π）上的唯一极小值点，且 e－2<g（x_0）<e－$\sqrt{2}$．

例 35．（2023·四川泸州·三模（文））已知函数 $f\left(x\right)=-\dfrac{1}{3}x^3+ax$，$a\in\mathrm{R}$．

(1)讨论函数 $f\left(x\right)$ 的单调性；

(2)若 $g\left(x\right)=f\left(x\right)\cdot e^x$ 有且只有一个极值点，求 a 的取值范围．

例 36．（2023·广东·深圳市光明区高级中学模拟预测）已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^{x}-ax+\sin x-1$.

(1)当 $a=2$ 时，求函数 $f(x)$ 的极值点；

(2)当 $1\leq a<2$ 时，试讨论函数 $f(x)$ 的零点个数.

例 37．（2023·北京市十一学校高三阶段练习）已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-1\right)\mathrm{e}^{ax}-\frac{1}{2}ax^{2}+\left(a-1\right)x$

(1)当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

(2)判断函数 $f\left(x\right)$ 的极值点的个数，并说明理由.

例 38．（2023·重庆巴蜀中学高三阶段练习）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}(x-3)-\ln x-\frac{2}{x}$.

(1)求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)证明：$f(x)$ 存在唯一极大值点 x_0，且 $-2\mathrm{e}-2<f\left(x_0\right)<-\frac{7}{2}$.

例 39．（2023·全国·模拟预测（文））已知函数 $f\left(x\right)=\left(x-2\right)\ln x-x-1$.

(1)证明：$f\left(x\right)$ 存在唯一的极值点；

(2)m 为整数，$f\left(x\right)>m$，求 m 的最大值.

题型七：不等式恒成立与存在性问题

例 40．（2023·辽宁·二模）若关于 x 的不等式 $x+\ln x+1\leq ax\mathrm{e}^{x}$ 恒成立，则实数 a 的取值范围为____________.

例 41．（2023·北京·景山学校模拟预测）已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x+ax+2$.

(1)当 $a=0$ 时，求 $f\left(x\right)$ 的极值；

(2)若对任意的 $x\in\left[1,\mathrm{e}^{2}\right]$，$f\left(x\right)\le 0$ 恒成立，求实数 a 的取值范围．

例 42．（2023·新疆克拉玛依·三模（文））已知函数 $f\left(x\right)=x\ln x$，$g\left(x\right)=-x^{2}+ax-3\left(a\in R\right)$．

(1)求函数 $f(x)$ 的单调递增区间；

(2)若对任意 $x\in\left(0,+\infty\right)$，不等式 $f\left(x\right)\geq\frac{1}{2}g\left(x\right)$ 恒成立，求 a 的取值范围.

例 43．（2023·陕西·西北工业大学附属中学模拟预测（文））已知函数 $f\left(x\right)=2^{-x+1}+x^{2}-2x+1+\left(x-1\right)\ln 2$．

(1)求函数 $f\left(x\right)$ 的单调区间；

(2)若对 $\forall x_{1}$、$x_{2}\in\left[0,2\right]$，使 $\left|f\left(x_{1}\right)-f\left(x_{2}\right)\right|\leq 2-\frac{1}{a}$ 恒成立，求 a 的取值范围.

例 44.（2023·内蒙古赤峰·三模（文））已知函数 $f\left(x\right)=x\left(\ln x+1\right)$.

(1)求 $f\left(x\right)$ 的最小值；

(2)若 $f\left(x\right)\ldots -x^{2}+\left(m+1\right)x-2$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

【方法技巧与总结】

在不等式恒成立或不等式有解条件下求参数的取值范围，一般利用等价转化的思想其转化为函数的最值或值域问题加以求解，可采用分离参数或不分离参数法直接移项构造辅助函数.

【过关测试】

一、单选题

1．（2023·全国·哈师大附中模拟预测（文））已知 x_{0} 是函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x-2\sin x\cos x$ 的一个极值点，则 $\tan^{2}x_{0}$

的值是（　　）

A．1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．$\frac{3}{7}$　　D．$\frac{5}{7}$

2．（2023·宁夏·吴忠中学三模（理））下列函数中，既是奇函数又存在极值的是（　　）

A．$y=x$　　B．$y=\ln(-x)$　　C．$y=x+e^x$　　D．$y=x+\frac{4}{x}$

3．（2023·河南新乡·二模（文））已知$a>0$，函数$f(x)=a^2x-\frac{1}{3}x^3$的极小值为$-\frac{4}{3}$，则$a=$（　　）

A．$\sqrt[3]{4}$　　B．1　　C．$\sqrt[3]{2}$　　D．$\sqrt{2}$

4．（2023·内蒙古包头·一模（理））设$m\neq 0$，若$x=m$为函数$f(x)=m(x-m)^2(x-n)$的极小值点，则（　　）

A．$m>n$　　B．$m<n$　　C．$\frac{n}{m}<1$　　D．$\frac{n}{m}>1$

5．（2023·河南·模拟预测（文））当$x=m$时，函数$f(x)=x^3-x^2+3x-2\ln x$取得最小值，则$m=$（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．1　　C．$\frac{3}{2}$　　D．2

6．（2023·四川凉山·三模（理））函数$f(x)=\frac{a}{2}x^2-\sin x$，若$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上有最小值，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$(0,+\infty)$　　B．$(0,1)$　　C．$(-\infty,0)$　　D．$(-1,0)$

7．（2016·天津市红桥区教师发展中心高三学业考试）已知函数$f(x)=(x^2-4)(x-a)$，a为实数，$f'(-1)=0$，则$f(x)$在$[-2,2]$上的最大值是（　　）

A．$\frac{9}{2}$　　B．1　　C．$\frac{3}{5}$　　D．$-\frac{50}{27}$

8．（2023·宁夏·高三阶段练习（文））若函数$f(x)=\frac{x^2+2x-a}{e^x}$在区间$(a,a+1)$上存在最小值，则实数$a$的取值范围为（　　）

A．$(-\infty,-1)$　　B．$(-2,-1)$

C．$\left(-\infty,\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$　　D．$\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2},-1\right)$

二、多选题

9．（2023·重庆·三模）已知函数$f(x)=\frac{x^2+x+1}{e^x}$（e为自然对数的底数，$e\approx 2.72$），则关于函数$f(x)$，下列结论正确的是（　　）

A．有2个零点　　B．有2个极值点　　C．在$(0,1)$单调递增　　D．最小值为1

10．（2023·湖北·宜城市第一中学高三阶段练习）已知 $f\left(x\right)=\frac{\left|x\right|}{\mathrm{e}^{x}}$．则下列说法正确的有（　　）

A．函数 $y=f\left(x\right)$ 有唯一零点 $x=0$

B．函数 $y=f\left(x\right)$ 的单调递减区间为 $\left(-\infty,0\right)\cup\left(1,+\infty\right)$

C．函数 $y=f\left(x\right)$ 有极大值 $\frac{1}{\mathrm{e}}$

D．若关于 x 的方程 $f\left(x\right)=a$ 有三个不同的根．则实数 a 的取值范围是 $\left(0,\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$

11．（2023·福建省德化第一中学模拟预测）设函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为R， $x_0\left(x_0\neq 0\right)$ 是 $f\left(x\right)$ 的极大值点，以下结论一定正确的是（　　）

A． $\forall x\in R$， $f\left(x\right)\geq f\left(x_0\right)$

B． $-x_0$ 是 $f\left(-x\right)$ 的极大值点

C． $-x_0$ 是 $-f\left(x\right)$ 的极小值点

D． $-x_0$ 是 $-f\left(-x\right)$ 的极小值点

12．（2023·全国·模拟预测）已知函数 $f\left(x\right)=\left(a-\mathrm{e}x\right)\mathrm{e}^{-x}+x\mathrm{e}^{x}$ 的图象关于直线 $x=\frac{1}{2}$ 对称，则下列说法正确的是（　　）

A． $a=\mathrm{e}$

B． $f\left(x\right)$ 在 $\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 上单调递增

C． $x=\frac{1}{2}$ 为 $f\left(x\right)$ 的极小值点

D． $f\left(x\right)$ 仅有两个零点

三、填空题

13．（2023·全国·高三专题练习）函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}\left(m+1\right)x^2+2\left(m-1\right)x$ 在 $\left(0,4\right)$ 上无极值，则 m＝______.

14．（2023·天津河西·二模）若函数 $f(x)=x^3+ax^2-x-9$ 在 $x=-1$ 处取得极值，则 $f\left(2\right)=$____________.

15．（2023·湖南·长郡中学高三阶段练习）函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{x}+\ln\left|x\right|$ 的极值点为____________.

16．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x,x\geq a,\\4x^3-3x,x<a,\end{cases}$ 则下列命题正确的有：____________.

①若 $f\left(x\right)$ 有两个极值点，则 $a=0$ 或 $\frac{1}{2}<a<1$

②若 $f\left(x\right)$ 有极小值点，则 $a>\frac{1}{2}$

③若 $f\left(x\right)$ 有极大值点，则 $a>-\frac{1}{2}$

④使 $f\left(x\right)$ 连续的 a 有 3 个取值

四、解答题

17．（2023·四川省叙永第一中学校高三阶段练习（文））已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=1$ 与 $x=-\frac{2}{3}$ 时，都取得极值．

(1)求 a，b 的值；

(2)若 $f(-1)=\frac{3}{2}$，求 $f(x)$ 的单调增区间和极值．

18．（2023·河南郑州·高三阶段练习（文））已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1-x}{x^2+a}$．

(1)若 $a=0$，求曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线方程；

(2)若 $f\left(x\right)$ 在 $x=-1$ 处取得极值，求 $f\left(x\right)$ 的单调区间及其最大值与最小值．

19．（2023·陕西·武功县普集高级中学高三期末（文））已知函数 $f\left(x\right)=\ln x-\frac{a}{x}$.

(1)若 $a=-3$，求函数 $f\left(x\right)$ 的极值；

(2)若函数 $f\left(x\right)$ 在 $\left[e,e^3\right]$ 上单调递增，求 a 的取值范围.

20．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)=\frac{2}{3}x^3+x^2+ax+1$ 在 $\left(-1,0\right)$ 上有两个极值点，x_1,x_2，且 $x_1<x_2$．

(1)求实数 a 的取值范围；

(2)证明：当 $-\frac{1}{2}<x<0$ 时，$f\left(x\right)>\frac{11}{12}$．

21．（2023·北京·人大附中三模）设函数 $f\left(x\right)=\left[ax^{2}-\left(4a+1\right)x+4a+3\right]\mathrm{e}^{x}$．

(1)若曲线 $y=f\left(x\right)$ 在点 $\left(1,f\left(1\right)\right)$ 处的切线与 x 轴平行，求 a；

(2)若 $f\left(x\right)$ 在 $x=2$ 处取得极大值，求 a 的取值范围.

22．（2023·浙江嘉兴·模拟预测）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^{x}+ax^{2}-\mathrm{e},a\in\mathbf{R}$．（注： $\mathrm{e}=2.71828\cdots$ 是自然对数的底数）

(1)当 $a=1$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(2)若 $f(x)$ 只有一个极值点，求实数 a 的取值范围；

(3)若存在 $b\in\mathbf{R}$，对与任意的 $x\in\mathbf{R}$，使得 $f\left(x\right)\geq b$ 恒成立，求 $\boldsymbol{a-b}$ 的最小值.

专题16 极值与最值

【考点预测】

知识点一：极值与最值

1．函数的极值

函数$f(x)$在点x_0附近有定义，如果对x_0附近的所有点都有$f(x)<f(x_0)$，则称$f(x_0)$是函数的一个极大值，记作$y_{极大值}=f(x_0)$．如果对x_0附近的所有点都有$f(x)>f(x_0)$，则称$f(x_0)$是函数的一个极小值，记作$y_{极小值}=f(x_0)$．极大值与极小值统称为极值，称x_0为极值点．

求可导函数$f(x)$极值的一般步骤

（1）先确定函数$f(x)$的定义域；

（2）求导数$f'(x)$；

（3）求方程$f'(x)=0$的根；

（4）检验$f'(x)$在方程$f'(x)=0$的根的左右两侧的符号，如果在根的左侧附近为正，在右侧附近为负，那么函数$y=f(x)$在这个根处取得极大值；如果在根的左侧附近为负，在右侧附近为正，那么函数$y=f(x)$在这个根处取得极小值.

注①可导函数$f(x)$在点x_0处取得极值的充要条件是：x_0是导函数的变号零点，即$f'(x_0)=0$，且在x_0左侧与右侧，$f'(x)$的符号导号.

②$f'(x_0)=0$是x_0为极值点的既不充分也不必要条件，如$f(x)=x^3$，$f'(0)=0$，但$x_0=0$不是极值点.另外，极值点也可以是不可导的，如函数$f(x)=|x|$，在极小值点$x_0=0$是不可导的，于是有如下结论：x_0为可导函数$f(x)$的极值点$\Rightarrow f'(x_0)=0$；但$f'(x_0)=0 \not\Rightarrow x_0$为$f(x)$的极值点.

2．函数的最值

函数$y=f(x)$最大值为极大值与靠近极小值的端点之间的最大者；函数$f(x)$最小值为极小值与靠近极大值的端点之间的最小者．

导函数为$f(x)=ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $(m<x_1<x_2<n)$

（1）当$a>0$时，最大值是$f(x_1)$与$f(n)$中的最大者；最小值是$f(x_2)$与$f(m)$中的最小者．

（2）当$a<0$时，最大值是$f(x_2)$与$f(m)$中的最大者；最小值是$f(x_1)$与$f(n)$中的最小者．

一般地，设$y=f(x)$是定义在$[m，n]$上的函数，$y=f(x)$在$(m，n)$内有导数，求函数

$y=f(x)$ 在 $[m，n]$ 上的最大值与最小值可分为两步进行：

（1）求 $y=f(x)$ 在 $(m，n)$ 内的极值（极大值或极小值）；

（2）将 $y=f(x)$ 的各极值与 $f(m)$ 和 $f(n)$ 比较，其中最大的一个为最大值，最小的一个为最小值.

注①函数的极值反映函数在一点附近情况，是局部函数值的比较，故极值不一定是最值；函数的最值是对函数在整个区间上函数值比较而言的，故函数的最值可能是极值，也可能是区间端点处的函数值；

②函数的极值点必是开区间的点，不能是区间的端点；

③函数的最值必在极值点或区间端点处取得.

【方法技巧与总结】

（1）若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 D 上存在最小值 $f\left(x\right)_{\min}$ 和最大值 $f\left(x\right)_{\max}$，则

不等式 $f\left(x\right)>a$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f\left(x\right)_{\min}>a$；

不等式 $f\left(x\right)\geq a$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f\left(x\right)_{\min}\geq a$；

不等式 $f\left(x\right)<b$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f\left(x\right)_{\max}<b$；

不等式 $f\left(x\right)\leq b$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow f\left(x\right)_{\max}\leq b$；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 D 上不存在最大（小）值，且值域为 $\left(m,\ n\right)$，则

不等式 $f\left(x\right)>a\left(\text{或}f\left(x\right)\geq a\right)$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow m\geq a$.

不等式 $f\left(x\right)<b\left(\text{或}f\left(x\right)\leq b\right)$ 在区间 D 上恒成立 $\Leftrightarrow m\leq b$.

（3）若函数 $f\left(x\right)$ 在区间D上存在最小值 $f\left(x\right)_{\min}$ 和最大值 $f\left(x\right)_{\max}$，即 $f\left(x\right)\in\left[m,n\right]$，则对不等式有解问题有以下结论：

不等式 $a<f\left(x\right)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a<f\left(x\right)_{\max}$；

不等式 $a\leq f\left(x\right)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a\leq f\left(x\right)_{\max}$；

不等式 $a>f\left(x\right)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a>f\left(x\right)_{\min}$；

不等式 $a\geq f\left(x\right)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a\geq f\left(x\right)_{\min}$；

（4）若函数 $f\left(x\right)$ 在区间 D 上不存在最大（小）值，如值域为 $\left(m,\ n\right)$，则对不等式有解问题有以下结论：

不等式 $a<f\left(x\right)\left(\text{或a}\leq f\left(x\right)\right)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow a<n$

不等式 $b>f\left(x\right)\left(\text{或b}\geq f\left(x\right)\right)$ 在区间 D 上有解 $\Leftrightarrow b>m$

（5）对于任意的$x_1\in[a,\ b]$，总存在$x_2\in[\mathrm{m},\ n]$，使得

$f(x_1)\le g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)_{\max}\le g(x_2)_{\max}$；

（6）对于任意的$x_1\in[a,\ b]$，总存在$x_2\in[\mathrm{m},\ n]$，使得

$f(x_1)\ge g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)_{\min}\ge g(x_2)_{\min}$；

（7）若存在$x_1\in[a,\ b]$，对于任意的$x_2\in[\mathrm{m},\ n]$，使得

$f(x_1)\le g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)_{\min}\le g(x_2)_{\min}$；

（8）若存在$x_1\in[a,\ b]$，对于任意的$x_2\in[\mathrm{m},\ n]$，使得

$f(x_1)\ge g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)_{\max}\ge g(x_2)_{\max}$；

（9）对于任意的$x_1\in[a,\ b]$，$x_2\in[\mathrm{m},\ n]$使得

$f(x_1)\le g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)_{\max}\le g(x_2)_{\min}$；

（10）对于任意的$x_1\in[a,\ b]$，$x_2\in[\mathrm{m},\ n]$使得

$f(x_1)\ge g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)_{\min}\ge g(x_2)_{\max}$；

（11）若存在$x_1\in[a,\ b]$，总存在$x_2\in[\mathrm{m},\ n]$，使得

$f(x_1)\le g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)_{\min}\le g(x_2)_{\max}$

（12）若存在$x_1\in[a,\ b]$，总存在$x_2\in[\mathrm{m},\ n]$，使得

$f(x_1)\ge g(x_2)\Leftrightarrow f(x_1)_{\max}\ge g(x_2)_{\min}$.

【题型归纳目录】

题型一：求函数的极值与极值点

题型二：根据极值、极值点求参数

题型三：求函数的最值（不含参）

题型四：求函数的最值（含参）

题型五：根据最值求参数

题型六：函数单调性、极值、最值得综合应用

题型七：不等式恒成立与存在性问题

【典例例题】

题型一：求函数的极值与极值点

例1．（2023·江西·上饶市第一中学模拟预测（文））已知函数$f(x)=\mathbf{e}^x-a(x-1)(a\in\mathbf{R})$.

当$a=1$时，求函数$y=f(x)$的极值；

【解析】

由题知，当$a=1$时，$f(x)=e^x-(x-1)$，$x\in\mathbf{R}$

∴$f'(x)=e^x-1$，令$f'(x)=0$，$x=0$.

∴$x\in(-\infty,0)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

$x\in(0,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增.

∴$x=0$是$f(x)$的极小值点，∴$f(x)$的极小值为$f(0)=2$，无极大值.

例2.（2023·湖北·襄阳四中模拟预测）设$f(x)=e^x\sin x$.

(1)求$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的极值；

(2)若对$\forall x_1,x_2\in[0,\pi]$，$x_1\neq x_2$，都有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}+a>0$成立，求实数$a$的取值范围.

答案：(1)极小值为$-\dfrac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$，极大值为$\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$

(2)$\left[\dfrac{e^{\pi}}{2\pi},+\infty\right)$

【解析】

分析：

（1）直接求导计算即可.

（2）将问题转化为$f(x_2)+ax_2^2>f(x_1)+ax_1^2$，构造新函数$g(x)=f(x)+ax^2$在$[0,\pi]$上单调递增即可，然后参变分离或者分类讨论都可以.

(1)

由$f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)\le 0$，$x\in[-\pi,\pi]$

得$f(x)$的单调减区间是$\left[-\pi,-\dfrac{\pi}{4}\right]$，$\left[\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$，

同理，$f(x)$的单调增区间是$\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$.

故$f(x)$的极小值为$f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2e^{\frac{\pi}{4}}}$，极大值为$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}$.

(2)

由对称性，不妨设$0\le x_1<x_2\le\pi$，

则$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}+a>0$即为$f(x_2)+ax_2^2>f(x_1)+ax_1^2$.

设$g(x)=f(x)+ax^2$，则$g(x)$在$[0,\pi]$上单调递增，

故$g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+2ax\ge 0$在$[0,\pi]$上恒成立.

方法一：（含参讨论）

设$h(x)=g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+2ax\ge 0$，

则$h(0)=1>0$，$h(\pi)=-e^{\pi}+2a\pi\ge 0$，解得$a\ge\dfrac{e^{\pi}}{2\pi}$.

$h'(x)=2(e^x\cos x+a)$，$h'(0)=2(a+1)>0$，$h'(\pi)=2(a-e^{\pi})$.

①当$a\ge e^{\pi}$时，$[h'(x)]'=2e^x(\cos x-\sin x)$，

故，当$x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$时，$[h'(x)]'=2e^x(\cos x-\sin x)\ge 0$，$h'(x)$递增；

当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$ 时，$\left[h'(x)\right]'=2e^x(\cos x-\sin x)\le 0$，$h'(x)$ 递减；

此时，$h'(x)\ge\min\{h'(0),h'(\pi)\}=h'(\pi)=2(a-e^{\pi})\ge 0$，$h(x)=g'(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，

故 $h(x)=g'(x)\ge g'(0)=1>0$，符合条件.

②当 $\dfrac{e^{\pi}}{2\pi}\le a<e^{\pi}$ 时，同①，当 $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ 时，$h'(x)$ 递增；当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{4},\pi\right]$ 时，$h'(x)$ 递减；

$\because h'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)>h'(0)=2(a+1)>0$，$h'(\pi)=2(a-e^{\pi})<0$，

$\therefore$ 由连续函数零点存在性定理及单调性知，$\exists x_0\in\left(\dfrac{\pi}{4},\pi\right)$，$h'(x_0)=0$.

于是，当 $x\in[0,x_0)$ 时，$h'(x)>0$，$h(x)=g'(x)$ 单调递增；

当 $x\in(x_0,\pi]$ 时，$h'(x)<0$，$h(x)=g'(x)$ 单调递减.

$\because h(0)=1>0$，$h(\pi)=-e^{\pi}+2a\pi\ge 0$，$\therefore g'(x)=h(x)\ge\min\{h(0),h(\pi)\}\ge 0$，符合条件.

综上，实数 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{e^{\pi}}{2\pi},+\infty\right)$.

方法二：（参变分离）

由对称性，不妨设 $0\le x_1<x_2\le\pi$，

则 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1^2-x_2^2}+a>0$ 即为 $f(x_2)+ax_2^2>f(x_1)+ax_1^2$.

设 $g(x)=f(x)+ax^2$，则 $g(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上单调递增，

故 $g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+2ax\ge 0$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立.

$\because g'(0)=1>0$，$\therefore$，$g'(x)=e^x(\sin x+\cos x)+2ax\ge 0$ 在 $[0,\pi]$ 上恒成立

$\Leftrightarrow -2a\le\dfrac{e^x(\sin x+\cos x)}{x}$，$\forall x\in(0,\pi]$.

设 $h(x)=\dfrac{e^x(\sin x+\cos x)}{x}$，$x\in(0,\pi]$，则 $h'(x)=\dfrac{e^x(2x\cos x-\sin x-\cos x)}{x^2}$，$x\in(0,\pi]$.

设 $\varphi(x)=2x-\tan x-1$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$，

则 $\varphi'(x)=2-\dfrac{1}{\cos^2 x}$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$.

由 $\varphi'(x)>0$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$，得 $\varphi(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$，$\left(\dfrac{3\pi}{4},\pi\right]$ 上单调递增；

由 $\varphi'(x)<0$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$，得 $\varphi(x)$ 在 $\left(\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{4}\right]$ 上单调递减.

故 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时 $\varphi(x)\le\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\pi}{2}-2<0$；

$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$ 时 $\varphi(x)\ge\varphi\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{3\pi}{2}>0$.

从而，$\varphi(x)\cos x=2x\cos x-\sin x-\cos x<0$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$，

又 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 时，$2x\cos x-\sin x-\cos x=-1<0$，故 $h'(x)=\dfrac{e^x(2x\cos x-\sin x-\cos x)}{x^2}<0$，

$x\in(0,\pi]$，

$h(x)=\dfrac{e^{x}(\sin x+\cos x)}{x}$， $x\in(0,\pi]$ 单调递减， $h(x)_{\min}=h(\pi)=-\dfrac{e^{\pi}}{\pi}$， $x\in(0,\pi]$.

于是， $-2a\le-\dfrac{e^{\pi}}{\pi}\Leftrightarrow a\ge\dfrac{e^{\pi}}{2\pi}$.综上，实数 a 的取值范围是 $\left[\dfrac{e^{\pi}}{2\pi},+\infty\right)$.

例3.（2023·天津市咸水沽第一中学模拟预测）已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln(ax)}{x}-\mathrm{e}\ln x(\mathrm{e}=2.71828\ldots\ldots$ 自然对数底数）.

(1)当 $a=\mathrm{e}$ 时，求函数 f（x）的单调区间；

(2)当 $a>\mathrm{e}$ 时，

（i）证明：$f(x)$ 存在唯一的极值点：

（ii）证明：$f(x)<(a-1)\mathrm{e}$

答案：(1)函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$，单调递减区间为 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$

(2)证明见详解

【解析】

分析：

（1）求导，利用导数判断函数单调性；（2）利用导数判断单调性，利用零点存在性定理判断零点，进而确定极值点，利用零点代换结合函数最值处理极值的范围.

(1)

$f'(x)=\dfrac{1-\ln(ax)-\mathrm{e}x}{x^{2}}$， 构建 $\varphi(x)=1-\ln(ax)-\mathrm{e}x$

当 $a=\mathrm{e}$ 时，则 $\varphi(x)=1-\ln(\mathrm{e}x)-\mathrm{e}x$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，且 $\varphi(\dfrac{1}{\mathrm{e}})=0$

当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 时， $\varphi(x)>0$， 当 $x\in\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$ 时， $\varphi(x)<0$

则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left(0,\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$，单调递减区间为 $\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}},+\infty\right)$

(2)

（i）由（1）可知：当 $a>\mathrm{e}$ 时， $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

$\varphi(\dfrac{1}{\mathrm{e}})=1-\ln a<0,\varphi(\dfrac{1}{a})=1-\dfrac{\mathrm{e}}{a}>0$

∴ $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内存在唯一的零点 $x_0\in\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$

当 $x\in(0,x_0)$ 时， $\varphi(x)>0$， 当 $x\in(x_0,+\infty)$ 时， $\varphi(x)<0$

则函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0,x_0)$，单调递减区间为 $(x_0,+\infty)$

∴ $f(x)$ 存在唯一的极值点 x_0

（ii）由（i）可知： $f(x)\le f(x_0)=\dfrac{\ln(ax_0)}{x_0}-\mathrm{e}\ln x_0$

∵ $1-\ln(ax_0)-\mathrm{e}x_0=0$， 即 $1-\mathrm{e}x_0=\ln(ax_0)$

$f(x_0)=\dfrac{\ln(ax_0)}{x_0}-\mathrm{e}\ln x_0=\dfrac{1}{x_0}-\mathrm{e}\ln x_0-\mathrm{e}$， 且 $x_0\in\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$

∵ $g(x)=\dfrac{1}{x}-\mathrm{e}\ln x-\mathrm{e}$ 在 $\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ 单调递减

则 $g(x)<g\left(\dfrac{1}{a}\right)=a+\mathrm{e}\ln a-\mathrm{e}$

构建 $h(x)=(\mathrm{e}-1)x-\mathrm{e}\ln x(x>\mathrm{e})$， 则 $h'(x)=\dfrac{(\mathrm{e}-1)x-\mathrm{e}}{x}>0$ 当 $x>\mathrm{e}$ 时恒成立

则 $h(x)$ 在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 上单调递增，则 $h(x)\geq h(\mathrm{e})=\mathrm{e}(\mathrm{e}-2)>0$

则 $\mathrm{e}(x-1)>x+\mathrm{e}\ln x-\mathrm{e}(x>\mathrm{e})$，即 $(a-1)\mathrm{e}>a+\mathrm{e}\ln a-\mathrm{e}$

$\therefore f(x)<(a-1)\mathrm{e}$

例 4．（2023·江西师大附中三模（理））已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}-\sin x$，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数．

(1)判断函数 $g(x)$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上是否存在极值，若存在，请判断是极大值还是极小值；若不存在，说明理由；

(2)求证：函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,\pi)$ 上只有两个零点．

答案：(1)存在；极小值

(2)证明见解析

【解析】

分析：

（1）转化为判断导函数是否存在变号零点，对 $g'(x)$ 求导后，判断 $g'(x)$ 的单调性，结合零点存在性定理可得结果；

（2）当 $x<0$ 时，利用单调性得 $f(x)<0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 无零点；当 $x=0$ 时，$f(x)=0$；当 $0<x<\pi$ 时，利用导数得到单调性，结合零点存在性定理可得 $f(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上只有一个零点．由此可证结论正确．

(1)

由 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}-\sin x$，可得 $g(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}-\cos x=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}-\cos x$，

则 $g'(x)=\dfrac{-\mathrm{e}^x-(1-x)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}+\sin x=\dfrac{x-2}{\mathrm{e}^x}+\sin x, x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，

令 $h(x)=\dfrac{x-2}{\mathrm{e}^x}+\sin x$，其中 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，可得 $h'(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-(x-2)\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x)^2}+\cos x=\dfrac{3-x}{\mathrm{e}^x}+\cos x>0$，

所以 $h(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，即 $g'(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，

因为 $g'(0)=-2<0, g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\frac{\pi}{2}-2}{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}}+1>0$，所以存在 $x_0\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $g'(x_0)=0$，

当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减；当 $x\in\left(x_0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，

所以当 $x=x_0$ 时，函数 $g(x)$ 取得极小值．

(2)

由 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}-\sin x$，当 $x<0$ 时，$\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}>1$，所以 $f'(x)=g(x)=\dfrac{1-x}{\mathrm{e}^x}-\cos x>0$，

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上为增函数，所以 $f(x)<f(0)=0$，

此时函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上没有零点；

当 $x=0$ 时，可得 $f(0)=\dfrac{0}{\mathrm{e}^0}-\sin 0=0$，所以 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的一个零点；

当 $0<x<\pi$ 时，由 $f(x)=\dfrac{x}{\mathrm{e}^x}-\sin x=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\left(x-\mathrm{e}^x\sin x\right)$，

令 $m(x)=x-\mathrm{e}^x\sin x, x\in(0,\pi)$，

可得 $m'(x)=1-\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)$，令 $\varphi(x)=1-\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)$

则 $\varphi'(x)=-\mathrm{e}^x(\sin x+\cos x)-\mathrm{e}^x(\cos x-\sin x)=-2\mathrm{e}^x\cos x$，

当 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，可得 $\varphi'(x)=-2\mathrm{e}^x\cos x<0$；

当 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，可得 $\varphi'(x)=-2e^{x}\cos x>0$，

即 $m'(x)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 上单调递增，

又因为 $m'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1-e^{\frac{\pi}{2}}<0, m'(\pi)=1+e^{\pi}>0$，所以存在 $x_1\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 使得 $m'\left(x_1\right)=0$，

当 $x\in\left(0,x_1\right)$ 时，$m'(x)<0$；当 $x\in\left(x_1,\pi\right)$ 时，$m'(x)>0$，

又因为 $m\left(x_1\right)<m(0)=0, m(\pi)=\pi>0$，

所以存在 $x_2\in\left(x_1,\pi\right)$ 使得 $m\left(x_2\right)=0$，即 x_2 是函数 $f(x)$ 的一个零点.

综上可得，函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,\pi)$ 上有且仅有两个零点.

【点睛】

关键点点睛：第二问中，分段讨论并利用导数和零点存在性定理求解是解题关键.

例 5.（2023·江苏苏州·模拟预测）函数 $f(x)=x-\sin x-\cos x$.

(1)求函数 $f(x)$ 在 $\left(-\pi,\frac{\pi}{2}\right)$ 上的极值；

(2)证明：$F(x)=f(x)-\ln x$ 有两个零点.

答案：(1)极大值，$1-\frac{\pi}{2}$；极小值，-1；

(2)详见解析.

【解析】

分析：

（1）由题可得 $f'(x)=1-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$，进而可得；

（2）当 $x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ 时，利用导数可得函数的最小值，进而可得函数有两个零点，当 $x\in[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$，$x\in[\frac{7\pi}{4},+\infty)$ 时，利用导数可得 $F(x)>0$，即得.

(1)

$\because f(x)=x-\sin x-\cos x$，

$\therefore f'\left(x\right)=1-\cos x+\sin x=1-\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$，$x\in\left(-\pi,\frac{\pi}{2}\right)$，

由 $f'(x)=0$，可得 $x=-\frac{\pi}{2}$，或 $x=0$，

$\therefore x\in\left(-\pi,-\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)>0, f\left(x\right)$ 单调递增，$x\in\left(-\frac{\pi}{2},0\right)$，$f'(x)<0, f\left(x\right)$ 单调递减，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f'(x)>0, f\left(x\right)$ 单调递增，

$\therefore x=-\frac{\pi}{2}$ 时，函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-\frac{\pi}{2})=1-\frac{\pi}{2}$，$x=0$ 时，函数 $f(x)$ 有极小值 $f(0)=-1$；

(2)

$\because F(x)=f(x)-\ln x=x-\sin x-\cos x-\ln x, x>0$，

$\therefore h\left(x\right)=F'(x)=1-\cos x+\sin x-\frac{1}{x}, x>0$，

$\therefore h'\left(x\right)=\sin x+\cos x+\frac{1}{x^2}=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1}{x^2}$，

当 $x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ 时，$h'\left(x\right)>0, h\left(x\right)$ 单调递增，即 $F'(x)$ 单调递增，

又 $F'(\frac{\pi}{4})=1-\frac{4}{\pi}<0, F'(\frac{\pi}{2})=2-\frac{2}{\pi}>0$，

故存在 $x_0\in\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$， $F'(x_0)=0$，

所以 $x\in(0,x_0),F'(x)<0,F(x)$ 单调递减， $x\in\left(x_0,\frac{3\pi}{4}\right),F'(x)<0,F(x)$ 单调递增，

$\therefore$ $x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ 时，函数 $F(x)_{\min}=F(x_0)<F(1)=1-\sin 1-\cos 1<0$，

$F(\mathrm{e}^{-2})=\mathrm{e}^{-2}-\sin \mathrm{e}^{-2}-\cos \mathrm{e}^{-2}+2>0$， $F(\frac{3\pi}{4})=\frac{3\pi}{4}-\ln\frac{3\pi}{4}>0$，

故 $x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ 时， $F(x)=f(x)-\ln x$ 有两个零点，

当 $x\in[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$ 时，

$\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\le 0,F(x)=x-\sin x-\cos x-\ln x=x-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\ln x\ge x-\ln x$，

对于函数 $\varphi(x)=x-\ln x$， 则 $\varphi'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$， 又 $\varphi(1)=0$，

$\therefore$ $x\in[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4})$， $\varphi(x)>\varphi(1)=0$， 即 $F(x)>0$， 此时函数 $F(x)=f(x)-\ln x$ 没有零点，

当 $x\in[\frac{7\pi}{4},+\infty)$ 时， $F(x)=x-\sin x-\cos x-\ln x=x-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\ln x\ge x-\sqrt{2}-\ln x$，

由上可知 $F(x)\ge\frac{7\pi}{4}-\sqrt{2}-\ln\frac{7\pi}{4}>0$，故当 $x\in[\frac{7\pi}{4},+\infty)$ 时，函数 $F(x)=f(x)-\ln x$ 没有零点，

综上，函数 $F(x)=f(x)-\ln x$ 有两个零点.

【点睛】

利用导数研究零点问题：

（1）确定零点的个数问题：可利用数形结合的办法判断交点个数，如果函数较为复杂，可用导数知识确定极值点和单调区间从而确定其大致图象；

（2）方程的有解问题就是判断是否存在零点的问题，可参变分离，转化为求函数的值域问题处理.可以通过构造函数的方法，把问题转化为研究构造的函数的零点问题；

（3）利用导数研究函数零点或方程根，通常有三种思路：①利用最值或极值研究；②利用数形结合思想研究；③构造辅助函数研究.

【方法技巧与总结】

1．因此，在求函数极值问题中，一定要检验方程 $f'(x)=0$ 根左右的符号，更要注意变号后极大值与极小值是否与已知有矛盾.

2．原函数出现极值时，导函数正处于零点，归纳起来一句话：原极导零．这个零点必须穿越 x 轴，否则不是极值点．判断口诀：从左往右找穿越（导函数与 x 轴的交点）；上坡低头找极小，下坡抬头找极大.

题型二：根据极值、极值点求参数

例 6．（2023·四川·绵阳中学实验学校模拟预测（文））若函数 $f(x)=x^3-ax^2-bx+a^2$ 在 $x=1$ 处有极值 10，则 $a-b=$（　　）

A．6　　B．-15　　C．-6 或 15　　D．6 或 -15

答案：B

【解析】

分析：

先求出函数的导函数 $f'(x)$ ，然后根据在 $x=1$ 时 $f(x)$ 有极值 10，得到 $\begin{cases}3-2a-b=0\\1-a-b+a^2=0\end{cases}$

，求出满足条件的a,b，然后验证在$x=1$时$f(x)$是否有极值，即可求出$\boldsymbol{a-b}$

【详解】

Q $f\left(x\right)=x^3-ax^2-bx+a^2$，$\therefore f'(x)=3x^2-2ax-b$

又$x=1$时$f(x)$有极值10

$\therefore \begin{cases} 3-2a-b=0 \\ 1-a-b+a^2=0 \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=-4 \\ b=11 \end{cases}$或$\begin{cases} a=3 \\ b=-3 \end{cases}$

当$a=3,b=-3$时，$f'(x)=3x^2-6x+3=3(x-1)^2\geq 0$

此时$f(x)$在$x=1$处无极值，不符合题意

经检验，$a=-4,b=11$时满足题意

$\therefore a-b=-15$

故选：B

例7．（2023·江苏南通·模拟预测）已知函数$f\left(x\right)=\left(x-a\right)\left(x-b\right)\mathrm{e}^x$在$x=a$处取极小值，且$f\left(x\right)$的极大值为4，则$b=$（　　）

A．-1　　　　B．2　　　　C．-3　　　　D．4

答案：B

【解析】

分析：

对$f\left(x\right)$求导，由函数$f\left(x\right)=\left(x-a\right)\left(x-b\right)\mathrm{e}^x$在$x=a$处取极小值，所以$f¢\left(a\right)=0$，所以$a=b$，$\therefore f\left(x\right)=\left(x-a\right)^2\mathrm{e}^x$，对$f\left(x\right)$求导，求单调区间及极大值，由$f\left(x\right)$的极大值为4，列方程得解.

【详解】

解：$f\left(x\right)=\left(x-a\right)\left(x-b\right)\mathrm{e}^x=\left(x^2-ax-bx+ab\right)\mathrm{e}^x$，所以

$f'\left(x\right)=\left(2x-a-b\right)\mathrm{e}^x+\left(x^2-ax-bx+ab\right)\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\left[x^2+\left(2-a-b\right)x+ab-a-b\right]$

因为函数$f\left(x\right)=\left(x-a\right)\left(x-b\right)\mathrm{e}^x$在$x=a$处取极小值，所以

$f'\left(a\right)=\mathrm{e}^a\left[a^2+\left(2-a-b\right)a+ab-a-b\right]=\mathrm{e}^a\left(a-b\right)=0$，所以$a=b$，$\therefore f\left(x\right)=\left(x-a\right)^2\mathrm{e}^x$，

$f'\left(x\right)=\mathrm{e}^x\left[x^2+\left(2-2a\right)x+a^2-2a\right]=\mathrm{e}^x\left(x-a\right)\left[x-\left(a-2\right)\right]$，

令$f'\left(x\right)=0$，得$x=a$或$x=a-2$，当$x\in\left(-\infty，a-2\right)$时，$f'\left(x\right)>0$，所以$f\left(x\right)$在$\left(-\infty，a-2\right)$单调递增，当$x\in\left(a-2，a\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，所以$f\left(x\right)$在$\left(a-2，a\right)$单调递增，当$x\in\left(a，+\infty\right)$时，$f'\left(x\right)>0$，所以$f\left(x\right)$在$\left(a,+\infty\right)$单调递增，所以$f\left(x\right)$在$x=a-2$处有极大值为$f\left(a-2\right)=4\mathrm{e}^{a-2}=4$，解得$a=2$，所以$b=2$.

故选：B

例8．（2023·四川绵阳·二模（文））若$x=2$是函数$f\left(x\right)=x^2+2\left(a-2\right)x-4a\ln x$的极大值点，则实数$a$的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,-2\right)$　　　　B．$\left(-2,+\infty\right)$　　　　C．$\left(2,+\infty\right)$　　　　D．$\left(-2,2\right)$

答案：A

【解析】

分析：

求出$f'\left(x\right)$，分$a\geq 0$，$a<-2$，$-2<a<0$，$a=-2$分别讨论出函数的单调区间，从而可得其极值情况，从而得出答案.

【详解】

$$f'\left(x\right)=2x+2\left(a-2\right)-\frac{4a}{x}=\frac{2x^2+2\left(a-2\right)x-4a}{x}=\frac{2\left(x-2\right)\left(x+a\right)}{x}，\quad\left(x>0\right)$$

若$a\geq 0$时，当$x>2$时，$f'\left(x\right)>0$；当$0<x<2$时，$f'\left(x\right)<0$；

则$f\left(x\right)$在$\left(0,2\right)$上单调递减；在$\left(2,+\infty\right)$上单调递增.

所以当$x=2$时，$f\left(x\right)$取得极小值，与条件不符合,故满足题意.

当$a<-2$时，由$f'\left(x\right)>0$可得$0<x<2$或$x>-a$；由$f'\left(x\right)<0$可得$2<x<-a$

所以在$\left(0,2\right)$上单调递增；在$\left(2,-a\right)$上单调递减，在$\left(-a,+\infty\right)$上单调递增.

所以当$x=2$时，$f\left(x\right)$取得极大值，满足条件.

当$-2<a<0$时，由$f'\left(x\right)>0$可得$0<x<-a$或$x>2$；由$f'\left(x\right)<0$可得$-a<x<2$

所以在$\left(0,-a\right)$上单调递增；在$\left(-a,2\right)$上单调递减，在$\left(2,+\infty\right)$上单调递增.

所以当$x=2$时，$f\left(x\right)$取得极小值，不满足条件.

当$a=-2$时，$f'\left(x\right)\geq 0$在$\left(0,+\infty\right)$上恒成立，即$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增.

此时$f\left(x\right)$无极值.

综上所述：$a<-2$满足条件

故选：A

例 9．（2023·河南·模拟预测（文））已知函数$f\left(x\right)=\ln x-ax^2$的极值为$-\frac{1}{2}$，则$a=$（　　）

A．e　　　　B．$\frac{1}{2}$e　　　　C．$\frac{1}{2}$　　　　D．$\frac{1}{4}$

答案：C

【解析】

分析：

求导得到导函数，考虑$a\leq 0$和$a>0$两种情况，根据函数的单调性得到极值，计算得到答案.

【详解】

函数$f\left(x\right)$的定义域为$\left(0,+\infty\right)$，$f'\left(x\right)=\frac{1}{x}-2ax=\frac{1-2ax^2}{x}$，

当$a\leq 0$时，$f'\left(x\right)>0$，所以$f\left(x\right)$在$\left(0,+\infty\right)$上单调递增，$f\left(x\right)$无极值，不符合题意；

当$a>0$时，$f'\left(x\right)=-\frac{2a\left(x^2-\frac{1}{2a}\right)}{x}$，

当$x\in\left(0,\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)$时，$f'\left(x\right)>0$，当$x\in\left(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty\right)$时，$f'\left(x\right)<0$，

所以$f\left(x\right)$在$\left(0,\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)$上单调递增，在$\left(\sqrt{\frac{1}{2a}},+\infty\right)$上单调递减，

则$f\left(x\right)_{极大值}=f\left(\sqrt{\frac{1}{2a}}\right)=-\frac{1}{2}\ln\left(2a\right)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$，解得$a=\frac{1}{2}$.

故选：C.

例 10．（2023·河南·高三阶段练习（文））若函数$f\left(x\right)=\left(x^2+ax+2\right)\cdot e^x$在R上无极值，则实数$a$的取值范围（　　）

A．$\left(-2,2\right)$　　　　B．$\left(-2\sqrt{3},2\sqrt{3}\right)$

C．$\left[-2\sqrt{3},2\sqrt{3}\right]$　　　　D．$\left[-2,2\right]$

答案：D

【解析】

分析：

求$f'\left(x\right)=\left[x^2+\left(a+2\right)x+a+2\right]\cdot e^x$，由分析可得$y=x^2+\left(a+2\right)x+a+2\geq 0$恒成立，利用$\Delta\leq 0$即可求得实数$a$的取值范围.

【详解】

由$f\left(x\right)=\left(x^2+ax+2\right)\cdot e^x$可得

$f'(x)=(2x+a)\cdot e^x+(x^2+ax+2)\cdot e^x=\left[x^2+(a+2)x+a+2\right]\cdot e^x$，

$e^x>0$ 恒成立， $y=x^2+(a+2)x+a+2$ 为开口向上的抛物线，

若函数 $f(x)=(x^2+ax+2)\cdot e^x$ 在 R 上无极值，

则 $y=x^2+(a+2)x+a+2\ge 0$ 恒成立，所以 $\Delta=(a+2)^2-4(a+2)\le 0$，

解得： $-2\le a\le 2$，

所以实数 a 的取值范围为 $[-2,2]$，

故选：D.

例 11．（2023·四川省南充高级中学高三阶段练习（理））已知函数 $f(x)=x^3-3mx^2+nx+m^2$ 在 $x=-1$ 处取得极值 0，则 $m+n=$（　　）

A． 2　　　　B． 7　　　　C． 2 或 7　　　　D． 3 或 9

答案：B

【解析】

分析：

求导得到导函数，根据题意得到 $f'(-1)=0$ 且 $f(-1)=0$，解得答案并验证即可.

【详解】

$f(x)=x^3-3mx^2+nx+m^2$， $f'(x)=3x^2-6mx+n$，

根据题意： $f'(-1)=3+6m+n=0$， $f(-1)=-1-3m-n+m^2=0$，

解得 $\begin{cases}m=-1\\n=3\end{cases}$ 或 $\begin{cases}m=-2\\n=9\end{cases}$，

当 $\begin{cases}m=-1\\n=3\end{cases}$ 时， $f'(x)=3x^2+6x+3=3(x+1)^2\ge 0$， 函数单调递增，无极值点，舍去.

当 $\begin{cases}m=-2\\n=9\end{cases}$ 时， $f'(x)=3x^2+12x+9=3(x+1)(x+4)$，

在 $x\in(-\infty,-4)$ 和 $x\in(-1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$， 函数单调递增；

在 $x\in(-4,-1)$ 时， $f'(x)<0$， 函数单调递减，故函数在 $x=-1$ 出有极小值，满足条件.

综上所述： $m+n=9-2=7$.

故选：B.

例 12．（2023·全国·高三专题练习）函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}-a(x-\ln x)$ 在 $(0,1)$ 内有极值，则实数 a 的取值范围是（　　）

A． $(-\infty,e)$　　　　B． $(0,e)$　　　　C． $(e,+\infty)$　　　　D． $[e,+\infty)$

答案：C

【解析】

分析：

由可导函数在开区间内有极值的充要条件即可作答.

【详解】

由 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}-a(x-\ln x)$ 得， $f'(x)=e^x(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2})-a(1-\dfrac{1}{x})=(1-\dfrac{1}{x})(\dfrac{e^x}{x}-a)$，

因函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}-a(x-\ln x)$ 在 $(0,1)$ 内有极值，则 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)=0\Leftrightarrow a=\dfrac{e^x}{x}$ 有解，

即在 $x\in(0,1)$ 时，函数 $g(x)=\dfrac{e^x}{x}$ 与直线 $y=a$ 有公共点，

而 $g'(x)=\dfrac{e^x}{x}(1-\dfrac{1}{x})<0$，即 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减， $\forall x\in(0,1),g(x)>g(1)=e$，则 $a>e$，显然在 $a=\dfrac{e^x}{x}$ 零点左右两侧 $f'(x)$ 异号，

所以实数 a 的取值范围是 $(e,+\infty)$.

故选：C

【点睛】

结论点睛：可导函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处取得极值的充要条件是 $f'(x_0)=0$，且在 x_0 左侧与右侧 $f'(x)$ 的符号不同.

例 13．（2023·陕西·西北工业大学附属中学模拟预测（理））已知函数 $f\left(x\right)=\left[ax^2-\left(4a+1\right)x+4a+3\right]\mathrm{e}^x$，若 $x=2$ 是 $f\left(x\right)$ 的极小值点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\infty,\frac{2}{3}\right]$　　　　B．$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$　　　　C．$\left(-\infty,0\right)$　　　　D．$\left(-1,+\infty\right)$

答案：B

【解析】

分析：

根据导函数的正负，对 a 分类讨论，判断极值点，即可求解.

【详解】

由 $f\left(x\right)=\left[ax^2-\left(4a+1\right)x+4a+3\right]\mathrm{e}^x$ 得 $f'(x)=\left(ax-1\right)\left(x-2\right)\mathrm{e}^x$，令 $f'(x)=\left(ax-1\right)\left(x-2\right)\mathrm{e}^x>0\Rightarrow\left(ax-1\right)\left(x-2\right)>0$，

若 $a<0$，则 $\left(ax-1\right)\left(x-2\right)>0\Rightarrow\frac{1}{a}<x<2$，此时在 $\frac{1}{a}<x<2$ 单调递增，在 $x>2,x<\frac{1}{a}$ 单调递减，这与 $x=2$ 是 $f\left(x\right)$ 的极小值点矛盾，故舍去.

若 $a=0$，可知 $x=2$ 是 $f\left(x\right)$ 的极大值点，故不符合题意.

若 $\frac{1}{2}>a>0$，$\left(ax-1\right)\left(x-2\right)>0\Rightarrow x<2,x>\frac{1}{a}$，此时 $f(x)$ 在 $x<2,x>\frac{1}{a}$ 单调递增，在 $2<x<\frac{1}{a}$ 单调递减，可知 $x=2$ 是 $f\left(x\right)$ 的极大值点，故不符合题意.

当 $a>\frac{1}{2}$，，$\left(ax-1\right)\left(x-2\right)>0\Rightarrow x>2,x<\frac{1}{a}$，此时 $f(x)$ 在 $x>2,x<\frac{1}{a}$ 单调递增，在 $2>x>\frac{1}{a}$ 单调递减，可知 $x=2$ 是 $f\left(x\right)$ 的极小值点，符合题意.

若 $a=\frac{1}{2}$，$f(x)$ 在定义域内单调递增，无极值，不符合题意，舍去.

综上可知：$a>\frac{1}{2}$

故选：B

例 14．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+x$ 在区间 $\left(\frac{1}{2},3\right)$ 上既有极大值又有极小值，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(2,+\infty\right)$　　　　B．$\left[2,+\infty\right)$　　　　C．$\left(2,\frac{5}{2}\right)$　　　　D．$\left(2,\frac{10}{3}\right)$

答案：C

【解析】

分析：

把题意转化为 $f'\left(x\right)=0$ 在 $\left(\frac{1}{2},3\right)$ 内应有两个不同的异号实数根，利用零点存在定理列不等式组即可求得.

【详解】

函数 $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+x$，导函数 $f'\left(x\right)=x^2-ax+1$.

因为 $f\left(x\right)$ 在 $\left(\frac{1}{2},3\right)$ 上既有极大值又有极小值，所以 $f'\left(x\right)=0$ 在 $\left(\frac{1}{2},3\right)$

内应有两个不同的异号实数根.

$$\begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right)>0 \\ f'(3)>0 \\ \frac{1}{2}<\frac{a}{2}<3 \\ f'\left(\frac{a}{2}\right)<0 \end{cases}$$，解得：$2<a<\frac{5}{2}$，实数 a 的取值范围 $\left(2,\frac{5}{2}\right)$.

故选：C.

例 15．(2023·全国·高三专题练习）函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(m+1)x^2+2(m-1)x$ 在 $(0,4)$ 上无极值，则 m=______.

答案：3

【解析】

分析：

把题意转化为 $f'(x)=x^2-(m+1)x+2(m-1)$ 在 $(0,4)$ 上恒有 $f'(x)\geq 0$，对 m 分类讨论，求出 m 的范围.

【详解】

函数 $f(x)$ 在 $(0,4)$ 上无极值即导函数 $f'(x)$ 在 $(0,4)$ 上无根.

$f'(x)=x^2-(m+1)x+2(m-1)$ 在 $(0,4)$ 上恒有 $f'(x)\geq 0$ ①；

而 $f'(x)=x^2-(m+1)x+2(m-1)=(x-2)[x-(m+1)]$，

当 $m-1>2$ 时，①式解为 $x\leq 2$ 或 $x\geq m-1$；显然 $x\in(0,4)$ 时，①式不成立；

当 $m-1<2$ 时，①式解为 $x\leqslant m-1$ 或 $x>2$；显然 $x\in(0,4)$ 时，①式不成立；

当 $m-1=2$ 时，①式解为 $x=2$，$m=3$.

故答案为：3.

例 16．(2023·吉林长春·模拟预测（文））已知函数 $f(x)=ax+\sin x$，$x\in(0,\pi)$.

(1)当 $a=1$ 时，过 $(0,1)$ 做函数 $f(x)$ 的切线，求切线方程；

(2)若函数 $f(x)$ 存在极值，求极值的取值范围.

答案：(1) $y=x+1$

(2) $(0,\pi)$

【解析】

分析：

（1）设切点，再根据导数的几何意义求解即可；

（2）求导分析导函数为 0 时的情况，设极值点为 x_0 得到 $a=-\cos x_0$，代入极值再构造函数 $h(x)=-x\cos x+\sin x$，求导分析单调性与取值范围即可

(1)

由题，当 $a=1$ 时，$f(x)=x+\sin x$，$f'(x)=1+\cos x$，

设切点为 $(x_0,x_0+\sin x_0)$，则 $f'(x_0)=1+\cos x_0$，

故切线方程为 $y-x_0-\sin x_0=(1+\cos x_0)(x-x_0)$，

又切线过 $(0,1)$，故 $1-x_0-\sin x_0=-x_0(1+\cos x_0)$，即 $\sin x_0-x_0\cos x_0-1=0$，

设 $g(x)=\sin x-x\cos x-1$，$x\in(0,\pi)$，则 $g'(x)=x\sin x>0$，

故 $g(x)$ 为增函数.又 $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}-1=0$，

故 $\sin x_0-x_0\cos x_0-1=0$ 有唯一解 $x_0=\frac{\pi}{2}$，

故切点为$\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}+1\right)$，斜率为 1，故切线方程为$y-\left(\frac{\pi}{2}+1\right)=x-\frac{\pi}{2}$，即$y=x+1$；

(2)

因为$f'(x)=a+\cos x$，$x\in(0,\pi)$为减函数，故若函数$f(x)$存在极值，

则$f'(x)=0$在区间$x\in(0,\pi)$上有唯一零点设为x_0，

则$a+\cos x_0=0$，即$a=-\cos x_0$，

故极值$f(x_0)=ax_0+\sin x_0=-x_0\cos x_0+\sin x_0$，

设$h(x)=-x\cos x+\sin x$，$x\in(0,\pi)$，则$h'(x)=x\sin x>0$，

故$h(x)$为增函数，故$h(0)<h(x)<h(\pi)$，故$0<h(x)<\pi$，即$f(x_0)\in(0,\pi)$，

故极值的取值范围$(0,\pi)$

【点睛】

本题主要考查了过点的切线问题，同时也考查了利用导数研究函数的极值问题，需要根据题意设极值点，得到极值点满足的关系，再代入极值构造函数分析，属于难题

例 17.（2023·北京市第十二中学三模）已知函数$f(x)=\ln x+\frac{a}{x},a\in\mathbf{R}$.

(1)当$a=1$时，求函数$f(x)$的单调递增区间；

(2)设函数$g(x)=\frac{f(x)-1}{x}$，若$g(x)$在$\left[1,\mathrm{e}^2\right]$上存在极值，求 a 的取值范围.

答案：(1)减区间为$(0,1)$，增区间为$(1,+\infty)$.

(2)$\left(0,\frac{\mathrm{e}}{2}\right)$

【解析】

分析：

（1）当$a=1$时，求得$f'(x)=\frac{x-1}{x^2}$，结合导数的符号，即可求得函数$f(x)$的单调区间；

（2）求得$g'(x)=\frac{2x-x\ln x-2a}{x^3}$，设$h(x)=2x-x\ln x-2a$，得到$h'(x)=1-\ln x$，求得$h(x)$的单调性，结合$h(1)=2-2a,h(e)=e-2a,h(e^2)=-2a$，根据题意，列出不等式组$\begin{cases}h(e)>0\\h(1)<0\end{cases}$或$\begin{cases}h(1)\geq 0\\h(e^2)<0\end{cases}$，即可求解.

(1)

解：当$a=1$时，函数$f(x)=\ln x+\frac{1}{x}$，其定义域为$(0,+\infty)$，

可得$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$，

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

所以函数$f(x)$的单调递减区间为$(0,1)$，单调递增区间为$(1,+\infty)$.

(2)

解：由$g(x)=\frac{f(x)-1}{x}=\frac{\ln x}{x}+\frac{a}{x^2}-\frac{1}{x},x\in[1,e^2]$，

可得$g'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}-\frac{2a}{x^3}=\frac{2x-x\ln x-2a}{x^3}$，

设$h(x)=2x-x\ln x-2a$，则$h'(x)=2-(1+\ln x)=1-\ln x$，

令$h'(x)=0$，即$1-\ln x=0$，解得$x=e$，

当 $x\in[1,\mathrm{e})$ 时，$h'(x)>0$；当 $x\in(\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 时，$h'(x)<0$，

所以 $h(x)$ 在区间 $[1,\mathrm{e})$ 上单调递增，在区间 $(\mathrm{e},\mathrm{e}^2]$ 上，单调递减，

且 $h(1)=2-2a,h(\mathrm{e})=\mathrm{e}-2a,h(\mathrm{e}^2)=-2a$，

显然 $h(1)>h(\mathrm{e}^2)$，

若 $g(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上存在极值，则满足 $\begin{cases}h(\mathrm{e})>0\\h(1)<0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}h(1)\geq 0\\h(\mathrm{e}^2)<0\end{cases}$，解得 $0<a<\frac{\mathrm{e}}{2}$，

综上可得，当 $0<a<\frac{\mathrm{e}}{2}$ 时，$g(x)$ 在 $[1,\mathrm{e}^2]$ 上存在极值，

所以实数 a 的取值范围为 $\left(0,\frac{\mathrm{e}}{2}\right)$.

例 18．（2023·天津·耀华中学二模）已知函数 $f(x)=\frac{ae^x}{x}+\ln x-x(a>0)$.

(1)若 $a=1$，求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(2)若 $f(x)$ 存在两个极小值点 x_1,x_2，求实数 a 的取值范围.

答案：(1)递减区间为 $(0,1)$，递增区间为 $(1,+\infty)$

(2) $(0,\frac{1}{\mathrm{e}})$

【解析】

分析：

（1）当 $a=1$ 时，求得 $f'(x)=\frac{(x-1)(\mathrm{e}^x-x)}{x^2}$，令 $m(x)=\mathrm{e}^x-x$，利用导数求得 $m(x)>0$，进而求得函数的单调区间；

（2）求得 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)(a-\frac{x}{e^x})}{x^2}$，令 $u(x)=\frac{x}{\mathrm{e}^x}$，结合单调性得到 $u(x)\leq\frac{1}{\mathrm{e}}$，进而得到 $0<\frac{x}{\mathrm{e}^x}\leq\frac{1}{\mathrm{e}}$，分 $a\geq\frac{1}{\mathrm{e}}$ 和 $0<a<\frac{1}{\mathrm{e}}$，两种情况分类讨论，结合单调性与极值点的概念，即可求解.

(1)

解：当 $a=1$ 时，函数 $f(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{x}+\ln x-x$，

可得 $f'(x)=\frac{e^x(x-1)}{x^2}+\frac{1}{x}-1=\frac{(x-1)(e^x-x)}{x^2}$，

令 $m(x)=e^x-x,x\in(0,+\infty)$，可得 $m'(x)=\mathrm{e}^x-1>0$，所以函数 $m(x)$ 单调递增，

因为 $m(x)>m(0)=1$，所以 $m(x)>0$，

当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，

即函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$，单调递增区间为 $(1,+\infty)$.

(2)

解：由函数 $f(x)=\frac{ae^x}{x}+\ln x-x,x\in(0,+\infty)$，

可得 $f'(x)=\frac{(ae^x-x)(x-1)}{x^2}=\frac{e^x(x-1)(a-\frac{x}{e^x})}{x^2},x>0$，

令$u(x)=\frac{x}{e^x}$，可得$u'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，

所以函数$u(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$u(x)\le\frac{1}{e}$，

当$x>0$时，可得$e^x>1$，所以$0<\frac{x}{e^x}\le\frac{1}{e}$，

①当$a\ge\frac{1}{e}$时，$a-\frac{x}{e^x}\ge0$，此时当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

所以函数$f(x)$的极小值为$f(1)=ae-1$，无极大值；

②当$0<a<\frac{1}{e}$时，$u(a)=\frac{a}{e^a}<\frac{a}{e^0}=a,u(1)=\frac{1}{e}>a$，

又由$u(x)$在$(a,1)$上单调递增，所以$f'(x)$在$(a,1)$上有唯一的零点x_1，且$\frac{x_1}{e^{x_1}}=a$，

因为当$x>e$时，令$g(x)=2\ln x-x$，可得$g'(x)=\frac{2}{x}-1=\frac{2-x}{x}<0$，

又因为$g(e)=2-e<0$，所以$g(x)<0$，即$2\ln x<x$，所以$2\ln\frac{1}{a}<\frac{1}{a}$，

所以$u(\ln\frac{1}{a^2})=\frac{\ln\frac{1}{a^2}}{e^{\ln\frac{1}{a^2}}}=a\cdot\frac{2\ln\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}}<a$，$u(1)=\frac{1}{e}>a$，

因为$u(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减，所以$f'(x)$在$(0,\ln\frac{1}{a^2})$上有唯一的零点x_2，且$\frac{x_2}{e^{x_2}}=a$，

所以当$x\in(0,x_1)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(x_1,1)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增；

当$x\in(1,x_2)$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调递减；

当$x\in(x_2,+\infty)$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调递增，

所以函数$f(x)$有两个极小值点，故实数a的取值范围为$(0,\frac{1}{e})$.

例19.（2023·河北·石家庄二中模拟预测）已知函数$f(x)=-x^3+ax^2+bx$.

(1)当$a=0,b=1$时，证明：当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)<\ln x$；

(2)若$b=a^2$，函数$f(x)$在区间$(1,2)$上存在极大值，求a的取值范围.

答案：(1)证明见解析

(2)$(-6,-3)\cup(1,2)$

【解析】

分析：

（1）利用导数求出$f(x)$得出$f(x)<f(1)=0$，根据$g(x)=\ln x$的单调性得$g(x)>\ln1$，可得答案；

（2）求出$f'(x)$，分$a=0$、$a>0$、$a<0$讨论$f(x)$单调性可得答案.

(1)

由题意得$f(x)=-x^3+x$，则$f'(x)=-3x^2+1$，当$x>1$时，$f'(x)<0$，

$f(x)$在$x\in(1,+\infty)$上是减函数，∴$f(x)<f(1)=0$，设$g(x)=\ln x$，$g(x)$在$x\in(1,+\infty)$上是增函数，

∴$g(x)>\ln1=0$，∴当$x\in(1,+\infty)$时，$f(x)<\ln x$.

(2)