

湖北省武汉武昌区 2022-2023 学年高三下学期第二学段考试数学试题试卷

请考生注意：

1. 请用 2B 铅笔将选择题答案涂填在答题纸相应位置上，请用 0.5 毫米及以上黑色字迹的钢笔或签字笔将主观题的答案写在答题纸相应的答题区内。写在试题卷、草稿纸上均无效。
2. 答题前，认真阅读答题纸上的《注意事项》，按规定答题。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ 的渐近线方程是 ()

- A. $x \pm 2y = 0$ B. $2x \pm y = 0$ C. $4x \pm y = 0$ D. $x \pm 4y = 0$

2. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 3$, $a_1 + a_3 + a_5 = 21$, 则 $a_3 + a_5 + a_7 =$ ()

- A. 21 B. 42 C. 63 D. 84

3. 双曲线 $C: x^2 - 2y^2 = 1$ 的渐近线方程为 ()

- A. $x \pm \sqrt{2}y = 0$ B. $x \pm 2y = 0$

- C. $\sqrt{2}x \pm y = 0$ D. $2x \pm y = 0$

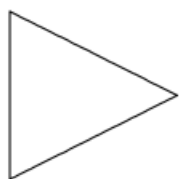
4. 在 $\triangle ABC$ 中, “ $\cos A < \cos B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的 ()

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

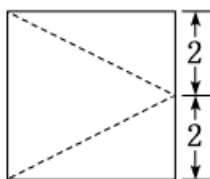
5. 从 5 名学生中选出 4 名分别参加数学, 物理, 化学, 生物四科竞赛, 其中甲不能参加生物竞赛, 则不同的参赛方案种数为

- A. 48 B. 72 C. 90 D. 96

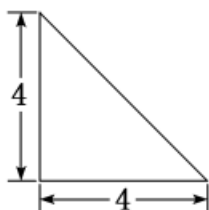
6. 已知某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是 ()



正(主)视图



侧(左)视图



俯视图

- A. $\frac{64}{3}$ B. 64 C. $\frac{32}{3}$ D. 32

7. 若 θ 是第二象限角且 $\sin\theta = \frac{12}{13}$, 则 $\tan(\theta + \frac{\pi}{4}) =$

- A. $-\frac{17}{7}$ B. $-\frac{7}{17}$ C. $\frac{17}{7}$ D. $\frac{7}{17}$

8. 已知盒中有 3 个红球, 3 个黄球, 3 个白球, 且每种颜色的三个球均按 A, B, C 编号, 现从中摸出 3 个球 (除颜色与编号外球没有区别), 则恰好不同时包含字母 A, B, C 的概率为 ()

- A. $\frac{17}{21}$ B. $\frac{19}{28}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{23}{28}$

9. 若 x, y 满足 $\begin{cases} 3x - y - 2 \leq 0 \\ x - y \geq 0 \\ 2x + y \geq 0 \end{cases}$, 且目标函数 $z = ax + 2by (a > 0, b > 0)$ 的最大值为 2, 则 $4^a + 16^b$ 的最小值为 ()

- A. 8 B. 4 C. $2\sqrt{2}$ D. 6

10. 在平面直角坐标系 xOy 中, 将点 $A(1, 2)$ 绕原点 O 逆时针旋转 90° 到点 B , 设直线 OB 与 x 轴正半轴所成的最小正角为 α , 则 $\cos\alpha$ 等于 ()

- A. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $-\frac{2}{5}$

11. 我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数 (即质数) 的和”, 如 $16 = 5 + 11$, $30 = 7 + 23$. 在不超过 20 的素数中, 随机选取两个不同的数, 其和等于 20 的概率是 ()

- A. $\frac{1}{14}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{3}{28}$ D. 以上都不对

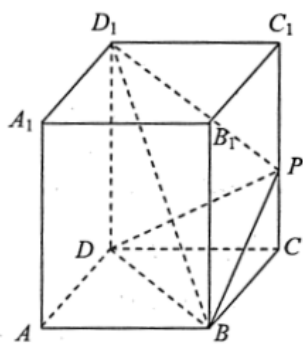
12. 已知复数 z 满足 $i(3 + z) = 1 + i$, 则 z 的虚部为 ()

- A. $-i$ B. i C. -1 D. 1

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

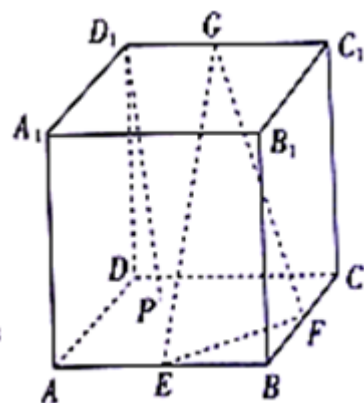
13. 某校为了解学生学习的情况, 采用分层抽样的方法从高一 2400 人、高二 2000 人、高三 n 人中, 抽取 90 人进行问卷调查. 已知高一被抽取的人数为 36, 那么高三被抽取的人数为_____.

14. 如图, 在正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, P 是侧棱 CC_1 上一点, 且 $C_1P = 2PC$. 设三棱锥 $P - D_1DB$ 的体积为 V_1 , 正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V , 则 $\frac{V_1}{V}$ 的值为_____.



15. 已知 $\int_0^2 x^3 dx = n$, 则 $\left(\frac{1}{x} - 2\right)(x+1)^n$ 展开式 x^2 的系数为_____.

16. 如图, 在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AD = DD_1 = 1, AB = \sqrt{3}$, E, F, G 分别为 AB, BC, C_1D_1 的中点, 点 P 在平面 $ABCD$ 内, 若直线 $D_1P \parallel$ 平面 EFG , 则线段 D_1P 长度的最小值是_____.



三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 过点 $P(-1, 0)$ 作倾斜角为 α 的直线与曲线 $C: \begin{cases} x = \sqrt{3} \cos \theta \\ y = \sqrt{2} \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数) 相交于 M, N 两点.

(1) 写出曲线 C 的一般方程;

(2) 求 $|PM| \cdot |PN|$ 的最小值.

18. (12 分) 已知 $a > 0, b > 0, c > 0$.

(1) 求证: $a^4 - a^2b^2 + b^4 \geq \frac{ab(a^4 + b^4)}{a^2 + b^2}$;

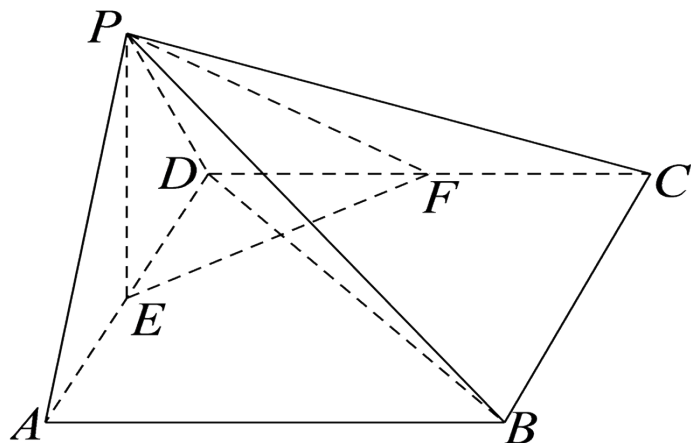
(2) 若 $abc = 1$, 求证: $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab + bc + ac$.

19. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \sqrt{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数). 在以原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴的极坐标系中, 圆 C 的方程为 $\rho = 2\sqrt{5} \sin \theta$.

(1) 写出直线 l 的普通方程和圆 C 的直角坐标方程;

(2) 若点 P 坐标为 $(3, \sqrt{5})$, 圆 C 与直线 l 交于 A, B 两点, 求 $|PA| + |PB|$ 的值.

20. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为菱形, $\triangle PAD$ 为正三角形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, E, F 分别是 AD, CD 的中点.



(1) 证明: $BD \perp$ 平面 PEF

(2) 若 $\angle BAD = 60^\circ$, 求二面角 $B-PD-A$ 的余弦值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - \ln x$.

(1) 若 $f(x) = x - \frac{1}{x} - \ln x$ 在 $x = x_1, x_2$ ($x_1 \neq x_2$) 处导数相等, 证明: $f(x_1) + f(x_2) > 3 - 2\ln 2$;

(2) 若对于任意 $k \in (-\infty, 1)$, 直线 $y = kx + b$ 与曲线 $y = f(x)$ 都有唯一公共点, 求实数 b 的取值范围.

22. (10 分) 设 $P(n, m) = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k \frac{m}{m+k}$, $Q(n, m) = C_{n+m}^n$, 其中 $m, n \in \mathbb{N}^*$.

(1) 当 $m=1$ 时, 求 $P(n, 1) \cdot Q(n, 1)$ 的值;

(2) 对 $\forall m \in \mathbb{N}^+$, 证明: $P(n, m) \cdot Q(n, m)$ 恒为定值.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. A

【解析】

试题分析：渐近线方程是 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$ ，整理后就得到双曲线的渐近线。

解：双曲线 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

其渐近线方程是 $\frac{x^2}{4} - y^2 = 0$

整理得 $x \pm 2y = 0$ 。

故选 A。

点评：本题考查了双曲线的渐进方程，把双曲线的标准方程中的“1”转化成“0”即可求出渐进方程。属于基础题。

2. B

【解析】

由 $a_1 + a_3 + a_5 = 21$ 得 $a_1(1 + q^2 + q^4) = 21 \therefore 1 + q^2 + q^4 = 7 \therefore q^2 = 2 \therefore a_3 + a_5 + a_7 = q^2(a_1 + a_3 + a_5) = 2 \times 21 = 42$ ，选 B。

3. A

【解析】

将双曲线方程化为标准方程为 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ ，其渐近线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{2} = 0$ ，化简整理即得渐近线方程。

【详解】

双曲线 $C: x^2 - 2y^2 = 1$ 得 $x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 1$ ，则其渐近线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{\frac{1}{2}} = 0$ ，

整理得 $x \pm \sqrt{2}y = 0$ 。

故选：A

【点睛】

本题主要考查了双曲线的标准方程，双曲线的简单性质的应用。

4. C

【解析】

由余弦函数的单调性找出 $\cos A < \cos B$ 的等价条件为 $A > B$ ，再利用大角对大边，结合正弦定理可判断出“ $\cos A < \cos B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的充分必要条件。

【详解】

Q 余弦函数 $y = \cos x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上单调递减，且 $0 < A < \pi$ ， $0 < B < \pi$ ，

由 $\cos A < \cos B$ ，可得 $A > B$ ， $\therefore a > b$ ，由正弦定理可得 $\sin A > \sin B$ 。

因此，“ $\cos A < \cos B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的充分必要条件。

故选：C。

【点睛】

本题考查充分必要条件的判定，同时也考查了余弦函数的单调性、大角对大边以及正弦定理的应用，考查推理能力，属于中等题。

5. D

【解析】

因甲不参加生物竞赛，则安排甲参加另外 3 场比赛或甲学生不参加任何比赛

①当甲参加另外 3 场比赛时，共有 $C_3^1 \cdot A_4^3 = 72$ 种选择方案；②当甲学生不参加任何比赛时，共有 $A_4^4 = 24$ 种选择方案。综上所述，所有参赛方案有 $72 + 24 = 96$ 种

故答案为：96

点睛：本题以选择学生参加比赛为载体，考查了分类计数原理、排列数与组合数公式等知识，属于基础题。

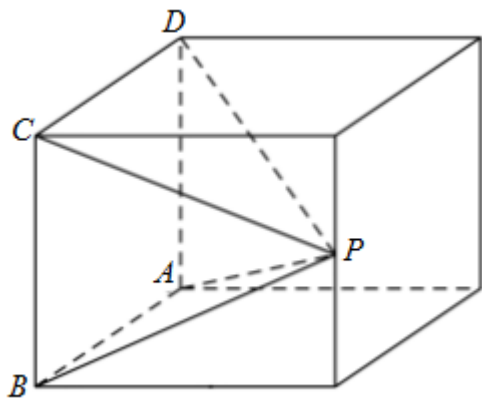
6. A

【解析】

根据三视图，还原空间几何体，即可得该几何体的体积。

【详解】

由该几何体的三视图，还原空间几何体如下图所示：



可知该几何体是底面在左侧的四棱锥，其底面是边长为 4 的正方形，高为 4，

$$\text{故 } V = \frac{1}{3} \times (4 \times 4) \times 4 = \frac{64}{3}.$$

故选：A

【点睛】

本题考查了三视图的简单应用，由三视图还原空间几何体，棱锥体积的求法，属于基础题。

7. B

【解析】

由 θ 是第二象限角且 $\sin\theta = \frac{12}{13}$ 知: $\cos\theta = -\sqrt{1-\sin^2\theta} = -\frac{5}{13}$, $\tan\theta = -\frac{12}{5}$.

所以 $\tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = \frac{\tan\theta + \tan 45^\circ}{1 - \tan\theta \tan 45^\circ} = -\frac{7}{17}$.

8. B

【解析】

首先求出基本事件总数, 则事件“恰好不同时包含字母 A, B, C ”的对立事件为“取出的 3 个球的编号恰好为字母 A, B, C ”, 记事件“恰好不同时包含字母 A, B, C ”为 E , 利用对立事件的概率公式计算可得;

【详解】

解: 从 9 个球中摸出 3 个球, 则基本事件总数为 $C_9^3 = 84$ (个),

则事件“恰好不同时包含字母 A, B, C ”的对立事件为“取出的 3 个球的编号恰好为字母 A, B, C ”

记事件“恰好不同时包含字母 A, B, C ”为 E , 则 $P(E) = 1 - \frac{3^3}{C_9^3} = \frac{19}{28}$.

故选: B

【点睛】

本题考查了古典概型及其概率计算公式, 考查了排列组合的知识, 解答的关键在于正确理解题意, 属于基础题.

9. A

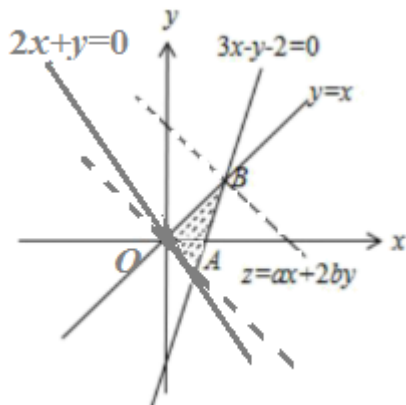
【解析】

作出可行域, 由 $z = ax + 2by (a > 0, b > 0)$, 可得 $y = -\frac{a}{2b}x + \frac{z}{2b}$. 当直线 $y = -\frac{a}{2b}x + \frac{z}{2b}$ 过可行域内的点 $B(1, 1)$ 时,

z 最大, 可得 $a + 2b = 2$. 再由基本不等式可求 $4^a + 16^b$ 的最小值.

【详解】

作出可行域, 如图所示



由 $z = ax + 2by (a > 0, b > 0)$, 可得 $y = -\frac{a}{2b}x + \frac{z}{2b}$.

平移直线 $y = -\frac{a}{2b}x + \frac{z}{2b}$, 当直线过可行域内的点 B 时, $\frac{z}{2b}$ 最大, 即 z 最大, 最大值为 2.

解方程组 $\begin{cases} 3x - y - 2 = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$, 得 $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$, $\therefore B(1, 1)$.

$\therefore a + 2b = 2 (a > 0, b > 0)$.

$\therefore 4^a + 16^b = 4^a + 4^{2b} \geq 2\sqrt{4^a \times 4^{2b}} = 2\sqrt{4^{a+2b}} = 2\sqrt{4^2} = 8$,

当且仅当 $4^a = 4^{2b}$, 即 $\begin{cases} a = 2b \\ a + 2b = 2 \end{cases}$, $\begin{cases} a = 1 \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$ 时, 等号成立.

$\therefore 4^a + 16^b$ 的最小值为 8.

故选: A.

【点睛】

本题考查简单的线性规划, 考查基本不等式, 属于中档题.

10. A

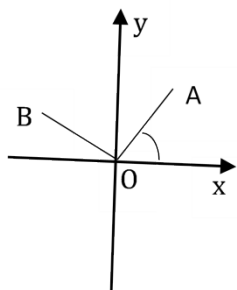
【解析】

设直线 OA 与 x 轴正半轴所成的最小正角为 β , 由任意角的三角函数的定义可以求得 $\sin \beta$ 的值, 依题有

$OA \perp OB$, 则 $\alpha = \beta + 90^\circ$, 利用诱导公式即可得到答案.

【详解】

如图, 设直线 OA 与 x 轴正半轴所成的最小正角为 β



因为点 $A(1, 2)$ 在角 β 的终边上, 所以 $\sin \beta = \frac{2}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

依题有 $OA \perp OB$, 则 $\alpha = \beta + 90^\circ$,

所以 $\cos \alpha = \cos(\beta + 90^\circ) = -\sin \beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$,

故选：A

【点睛】

本题考查三角函数的定义及诱导公式，属于基础题.

11. A

【解析】

首先确定不超过20的素数的个数，根据古典概型概率求解方法计算可得结果.

【详解】

不超过20的素数有2，3，5，7，11，13，17，19，共8个，

从这8个素数中任选2个，有 $C_8^2 = 28$ 种可能；

其中选取的两个数，其和等于20的有(3,17)，(7,13)，共2种情况，

故随机选出两个不同的数，其和等于20的概率 $P = \frac{2}{28} = \frac{1}{14}$.

故选：A.

【点睛】

本题考查古典概型概率问题的求解，属于基础题.

12. C

【解析】

利用复数的四则运算可得 $z = -2 - i$ ，即可得答案.

【详解】

$$\because i(3+z) = 1+i, \therefore 3+z = \frac{1+i}{i} = 1-i,$$

$$\therefore z = -2-i, \therefore \text{复数 } z \text{ 的虚部为 } -1.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查复数的四则运算、虚部概念，考查运算求解能力，属于基础题.

二、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分。

13. 24

【解析】

由分层抽样的知识可得 $\frac{2400}{2400+2000+n} \times 90 = 36$ ，即 $n = 1600$ ，所以高三被抽取的人数为

$$\frac{1600}{2400+2000+1600} \times 90 = 24，应填答案 24。$$

14. $\frac{1}{6}$

【解析】

设正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长 $AB = BC = a$ ，高 $AA_1 = b$ ，再根据柱体、锥体的体积公式计算可得.

【详解】

解：设正四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的底面边长 $AB = BC = a$ ，高 $AA_1 = b$ ，

$$则 V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1} = S_{ABCD} \times AA_1 = a^2b，$$

$$V_{P-D_1DB} = V_{B-D_1DP} = \frac{1}{3} S_{\triangle D_1DP} \cdot BC = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} ab \cdot a = \frac{1}{6} a^2b$$

$$\therefore \frac{V_{P-D_1DB}}{V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}} = \frac{1}{6} 即 \frac{V_1}{V} = \frac{1}{6}$$

故答案为： $\frac{1}{6}$

【点睛】

本题考查柱体、锥体的体积计算，属于基础题.

15. -8

【解析】

先根据定积分求出 n 的值，再用二项展开式公式即可求解.

【详解】

$$因为 \int_0^2 x^3 dx = \left(\frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{4} \times 2^4 = 4$$

所以 $n = 4$

$$(x+1)^4 的通项公式为 T_{r+1} = C_4^r \times 1^{4-r} \cdot x^r = C_4^r x^r$$

$$当 r = 2 时, T_3 = C_4^2 \times 1^{4-2} \cdot x^2 = C_4^2 x^2 = 6x^2$$

$$当 r = 3 时, T_4 = C_4^3 x^3 = 4x^3$$

$$故 \left(\frac{1}{x} - 2 \right) (x+1)^n 展开式中 x^2 的系数为 4 + (-2) \times 6 = -8$$

故答案为： -8

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/226214143105010235>