专题 2.2 函数的基本性质的灵活应用

目录

一、考纲要求

1.理解函数的单调性、最大(小)值及其几何意义.

2.会运用基本初等函数的图象分析函数的性质.

3.培养学生数学抽象、逻辑推理、直观想象能力。

1.结合具体函数，了解函数奇偶性的含义；

2.会运用函数的图象理解和研究函数的奇偶性；3.了解函数周期性、最小正周期的含义，会判断、应用简单函数的周期性.

3.培养学生数学抽象、逻辑推理、直观想象、数学运算的素养。

二、考点网络

三、考情分析

考点要求	考题统计	考情分析
（1）集合的概念与表示 （2）集合的基本关系 （3）集合的基本运算	2024 年 I 卷，第 1 题，5 分 2023 年 I 卷，第 1 题，5 分 2023 年 II 卷，第 2 题，5 分 2022 年 I 卷，第 1 题，5 分	高考对集合的考查相对稳定，考查内容、频率、题型、难度均变化不大．重点是集合间的基本运算，主要考查集合的交、并、补运算，常与一元二次不等式解法、一元一次不等式解法、分式不等式解法、指数、对数不等式解法结合.同时适当关注集合与充要条件相结合的解题方法.

四、考点梳理

夯基·必备基础知识梳理

考点 1、函数的单调性

（1）单调函数的定义

一般地，设函数 $f(x)$ 的定义域为 A，区间 $D\subseteq A$：

如果对于 D 内的任意两个自变量的值 x_1， x_2 当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数．

如果对于 D 内的任意两个自变量的值 x_1， x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在区间 D 上是减函数．

①属于定义域 A 内某个区间上；

②任意两个自变量 x_1， x_2 且 $x_1<x_2$；

③都有 $f(x_1)<f(x_2)$ 或 $f(x_1)>f(x_2)$；

④图象特征：在单调区间上增函数的图象从左向右是上升的，减函数的图象从左向右是下降的．

（2）单调性与单调区间

①单调区间的定义：如果函数 $f(x)$ 在区间 D 上是增函数或减函数，那么就说函数 $f(x)$ 在区间 D 上具有单调性， D 称为函数 $f(x)$ 的单调区间．

②函数的单调性是函数在某个区间上的性质．

（3）复合函数的单调性

复合函数的单调性遵从“同增异减”

，即在对应的取值区间上，外层函数是增（减）函数，内层函数是增（减）函数，复合函数是增函数；外层函数是增（减）函数，内层函数是减（增）函数，复合函数是减函数.

考点 2、函数的奇偶性

函数奇偶性的定义及图象特点

奇偶性	定义	图象特点
偶函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做偶函数	关于 y 轴对称
奇函数	如果对于函数 $f(x)$ 的定义域内任意一个 x，都有 $f(-x)=-f(x)$，那么函数 $f(x)$ 就叫做奇函数	关于原点对称

判断 $f(-x)$ 与 $f(x)$ 的关系时，也可以使用如下结论：如果 $f(-x)-f(x)=0$ 或 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=1(f(x)\neq 0)$，则函数 $f(x)$ 为偶函数；如果 $f(-x)+f(x)=0$ 或 $\dfrac{f(-x)}{f(x)}=-1\,(f(x)\neq 0)$，则函数 $f(x)$ 为奇函数.

注意：由函数奇偶性的定义可知，函数具有奇偶性的一个前提条件是：对于定义域内的任意一个 x，$-x$ 也在定义域内(即定义域关于原点对称).

考点 3、函数的对称性

(1)若函数 $y=f(x+a)$ 为偶函数，则函数 $y=f(x)$ 关于 $x=a$ 对称.

(2)若函数 $y=f(x+a)$ 为奇函数，则函数 $y=f(x)$ 关于点 $(a，0)$ 对称.

(3)若 $f(x)=f(2a-x)$，则函数 $f(x)$ 关于 $x=a$ 对称.

(4)若 $f(x)+f(2a-x)=2b$，则函数 $f(x)$ 关于点 $(a，b)$ 对称.

考点 4、函数的周期性

（1）周期函数：

对于函数 $y=f(x)$，如果存在一个非零常数 T，使得当 x 取定义域内的任何值时，都有 $f(x+T)=f(x)$，那么就称函数 $y=f(x)$ 为周期函数，称 T 为这个函数的周期.

（2）最小正周期：

如果在周期函数 $f(x)$ 的所有周期中存在一个最小的正数，那么称这个最小整数叫做 $f(x)$ 的最小正周期.

【解题方法总结】

1、单调性技巧

（1）证明函数单调性的步骤

①取值：设 x_1，x_2 是 $f(x)$ 定义域内一个区间上的任意两个量，且 $x_1<x_2$；

②变形：作差变形(变形方法：因式分解、配方、有理化等)或作商变形；

③定号：判断差的正负或商与1的大小关系；

④得出结论．

（2）函数单调性的判断方法

①定义法：根据增函数、减函数的定义，按照"取值—变形—判断符号—下结论"进行判断．

②图象法：就是画出函数的图象，根据图象的上升或下降趋势，判断函数的单调性．

③直接法：就是对我们所熟悉的函数，如一次函数、二次函数、反比例函数等，直接写出它们的单调区间．

（3）记住几条常用的结论：

①若 $f(x)$ 是增函数，则 $-f(x)$ 为减函数；若 $f(x)$ 是减函数，则 $-f(x)$ 为增函数；

②若 $f(x)$ 和 $g(x)$ 均为增(或减)函数，则在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的公共定义域上 $f(x)+g(x)$ 为增(或减)函数；

③若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为增函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为增函数，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为减函数；

④若 $f(x)>0$ 且 $f(x)$ 为减函数，则函数 $\sqrt{f(x)}$ 为减函数，$\dfrac{1}{f(x)}$ 为增函数．

2、奇偶性技巧

(1)函数具有奇偶性的必要条件是其定义域关于原点对称.

(2)奇偶函数的图象特征.

函数 $f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象关于 y 轴对称；

函数 $f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ 函数 $f(x)$ 的图象关于原点中心对称.

(3)若奇函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 处有意义，则有 $f(0)=0$；

偶函数 $y=f(x)$ 必满足 $f(x)=f(|x|)$．

(4)偶函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上单调性相反；奇函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上单调性相同.

(5)若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称，则函数 $f(x)$ 能表示成一个偶函数与一个奇函数的和的形式.记 $g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$h(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，则 $f(x)=g(x)+h(x)$．

(6)运算函数的奇偶性规律：运算函数是指两个（或多个）函数式通过加、减、乘、除四则运算所得的函数，如 $f(x)+g(x), f(x)-g(x), f(x)\times g(x), f(x)\div g(x)$．

对于运算函数有如下结论：奇±奇=奇；偶±偶=偶；奇±偶=非奇非偶；

奇 $\times(\div)$ 奇=偶；奇 $\times(\div)$ 偶=奇；偶 $\times(\div)$ 偶=偶.

(7)复合函数 $y=f[g(x)]$ 的奇偶性原来：内偶则偶，两奇为奇.

(8)常见奇偶性函数模型

奇函数：①函数 $f(x)=m(\frac{a^x+1}{a^x-1})(x\neq 0)$ 或函数 $f(x)=m(\frac{a^x-1}{a^x+1})$.

②函数 $f(x)=\pm(a^x-a^{-x})$.

③函数 $f(x)=\log_a\frac{x+m}{x-m}=\log_a(1+\frac{2m}{x-m})$ 或函数 $f(x)=\log_a\frac{x-m}{x+m}=\log_a(1-\frac{2m}{x+m})$

④函数 $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}+x)$ 或函数 $f(x)=\log_a(\sqrt{x^2+1}-x)$.

注意：关于①式，可以写成函数 $f(x)=m+\frac{2m}{a^x-1}(x\neq 0)$ 或函数 $f(x)=m-\frac{2m}{a^x+1}(m\in R)$.

偶函数：①函数 $f(x)=\pm(a^x+a^{-x})$.

②函数 $f(x)=\log_a(a^{mx}+1)-\frac{mx}{2}$.

③函数 $f(|x|)$ 类型的一切函数.

④常数函数

3、周期性技巧

函数式满足关系（$x\in R$）	周期
$f(x+T)=f(x)$	T
$f(x+T)=-f(x)$	$2T$
$f(x+T)=\frac{1}{f(x)};f(x+T)=-\frac{1}{f(x)}$	$2T$
$f(x+T)=f(x-T)$	$2T$
$f(x+T)=-f(x-T)$	$4T$
$\begin{cases}f(a+x)=f(a-x)\\f(b+x)=f(b-x)\end{cases}$	$2(b-a)$
$\begin{cases}f(a+x)=f(a-x)\\f(x)\text{为偶函数}\end{cases}$	$2a$
$\begin{cases}f(a+x)=-f(a-x)\\f(b+x)=-f(b-x)\end{cases}$	$2(b-a)$
$\begin{cases}f(a+x)=-f(a-x)\\f(x)\text{为奇函数}\end{cases}$	$2a$
$\begin{cases}f(a+x)=f(a-x)\\f(b+x)=-f(b-x)\end{cases}$	$4(b-a)$
$\begin{cases}f(a+x)=f(a-x)\\f(x)\text{为奇函数}\end{cases}$	$4a$
$\begin{cases}f(a+x)=-f(a-x)\\f(x)\text{为偶函数}\end{cases}$	$4a$

4、函数的的对称性与周期性的关系

（1）若函数 $y=f(x)$ 有两条对称轴 $x=a$， $x=b(a<b)$，则函数 $f(x)$ 是周期函数，且 $T=2(b-a)$；

（2）若函数 $y=f(x)$ 的图象有两个对称中心 $(a,c),(b,c)(a<b)$，则函数 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $T=2(b-a)$；

（3）若函数 $y=f(x)$ 有一条对称轴 $x=a$ 和一个对称中心 $(b,0)(a<b)$，则函数 $y=f(x)$ 是周期函数，且 $T=4(b-a)$.

5、对称性技巧

（1）若函数 $y=f(x)$ 关于直线 $x=a$ 对称，则 $f(a+x)=f(a-x)$.

（2）若函数 $y=f(x)$ 关于点 (a,b) 对称，则 $f(a+x)+f(a-x)=2b$.

（3）函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=f(a-x)$ 关于 y 轴对称，函数 $y=f(a+x)$ 与 $y=-f(a-x)$ 关于原点对称.

提升·必考题型归纳

重难点题型(一) 函数的单调性及其应用

例 1.（2024·河南信阳·模拟预测）下列函数中，在其定义域上单调递减的是（　　）

A. $f(x)=\ln x$　　B. $f(x)=-\tan\pi$　　C. $f(x)=x^3$　　D. $f(x)=\left|e^{-x}\right|$

例 2.（2024·宁夏银川·一模）下列四个函数中，是偶函数且在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递增的函数个数是（　　）

①$y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ ②$y=x^2\sin x$ ③$y=\lg(|x|+1)$④ $y=|\tan x|$

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

【变式训练 1】.（2024·北京西城·三模）下列函数中，既是偶函数又在区间 $(0,+\infty)$ 上单调递减的是（　　）

A. $y=\frac{1}{x}$　　B. $y=x^2$　　C. $y=\cos x$　　D. $y=-\ln|x|$

【变式训练 2】.（2024·广东深圳·三模）函数 $y=\left|-x^2+4x+5\right|$ 的单调递增区间是________.

【解题总结】

函数单调性的判断方法

①定义法：根据增函数、减函数的定义，按照"取值—变形—判断符号—下结论"进行判断.

②图象法：就是画出函数的图象，根据图象的上升或下降趋势，判断函数的单调性.

③直接法：就是对我们所熟悉的函数，如一次函数、二次函数、反比例函数等，直接写出它们的单调区间.

重难点题型(二) 复合函数单调性的判断

例 3．（2024·湖北·二模）已知函数 $f\left(x\right)=\log_5\left(a^x-2\right)$ 在 $\left[1,+\infty\right)$ 上单调递增，则 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(1,+\infty\right)$　　B．$\left[\ln 2,+\infty\right)$　　C．$\left(2,+\infty\right)$　　D．$\left[2,+\infty\right)$

例 4．（2024·江苏无锡·二模）已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\left(1-3a\right)x+a+1, & x<2\\ 2a^x, & x\geq 2\end{cases}$ 满足对任意的 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0$ 成立，则实数 a 的取值范围为________.

【变式训练 3】．（2024·全国·模拟预测）已知函数 $f(x)=\log_a\left(x^3-ax^2+x-2a\right)(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减，则 a 的取值范围是（　　）

A．$\left(0,\dfrac{2}{3}\right]$　　B．$\left[\dfrac{2}{3},1\right)$　　C．$(1,2]$　　D．$[2,+\infty)$

【变式训练 4】．（2024·湖南长沙·三模）已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^3+2x-1, x\leq 1,\\ \sqrt{x+3}, x>1,\end{cases}$ 则不等式 $f\left(x+2\right)<2-f\left(x-4\right)$ 的解集为________.

【解题总结】

讨论复合函数 $y=f[g(x)]$ 的单调性时要注意：既要把握复合过程，又要掌握基本函数的单调性．一般需要先求定义域，再把复杂的函数正确地分解为两个简单的初等函数的复合，然后分别判断它们的单调性，再用复合法则，复合法则如下：

1、若 $u=g(x)$， $y=f(u)$ 在所讨论的区间上都是增函数或都是减函数，则 $y=f[g(x)]$ 为增函数；

2、若 $u=g(x)$， $y=f(u)$ 在所讨论的区间上一个是增函数，另一个是减函数，则 $y=f[g(x)]$ 为减函数．列表如下：

$u=g(x)$	$y=f(u)$	$y=f[g(x)]$
增	增	增
增	减	减
减	增	减
减	减	增

复合函数单调性可简记为“同增异减”，即内外函数的单性相同时递增；单性相异时递减．

重难点题型(三) 利用函数单调性求函数最值

例 5．（2023·陕西渭南·模拟预测）已知函数 $f(x)=a\mathrm{e}^x-\ln x$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递增，则 a 的最小值为________．

例 6．（2022·河南开封·模拟预测）对任意 $x>0$，不等式 $\mathrm{e}^x-\ln(ax)+(1-a)x\ge 0$ 恒成立，则正数 a 的最大值为（　）

A．$\sqrt{\mathrm{e}}$　　B．$\dfrac{1}{\sqrt{e}}$　　C．$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　D．e

【变式训练 5】．（22-23 高三下·重庆沙坪坝·阶段练习）已知正实数 x,y 满足 $\mathrm{e}^{2-3x}+3-3x=\mathrm{e}^{y-1}+y$，则 $\dfrac{y}{x}+\dfrac{1}{y}$ 的最小值为_________．

【变式训练 6】.（2019·江苏·一模）已知函数$f\left(x\right)$是定义在 **R** 上的偶函数，且在$\left[0,+\infty\right)$上单调递增，若$f\left(-3\right)=0$，实数a满足$f\left(2a-5\right)\le 0$，则a的最小值为______.

【解题总结】

若已知函数的单调性，求参数a的取值范围问题，可利用函数单调性，先列出关于参数a的不等式，利用下面的结论求解.

1、若$a>f(x)$在$[m，n]$上恒成立$\Leftrightarrow a>f(x)$在$[m，n]$上的最大值.

2、若$a<f(x)$在$[m，n]$上恒成立$\Leftrightarrow a<f(x)$在$[m，n]$上的最小值.

重难点题型(四) 利用函数单调性求参数的范围

例 7.（2024·全国·模拟预测）函数$f\left(x\right)=\log_a\left(x\left|x-a\right|-1\right)$在[1,2]上单调递增，则实数$a$的取值范围是（　）

A．$\left(2,+\infty\right)$　　B．$\left(0,1\right)\cup\left(2,+\infty\right)$　　C．$\left[4,+\infty\right)$　　D．$\left(0,1\right)\cup\left[4,+\infty\right)$

例 8.（2024·陕西安康·模拟预测）已知函数$f\left(x\right)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4x-4},x\le\dfrac{3}{4}\\ \log_a(4x)-1,x>\dfrac{3}{4}\end{cases}$是R上的单调函数，则实数$a$的取值范围是（　）

A．$\left(0,1\right)$　　B．$\left(1,\sqrt{3}\right]$　　C．$\left(1,\sqrt{3}\right)$　　D．$\left(1,3\right)$

【变式训练 7】.（2024·黑龙江大庆·三模）已知函数$f(x)=\begin{cases}2^x,x\ge 0\\ x^3+1,x<0\end{cases}$，若$f(a)<f(6-a^2)$，则实数$a$的取值范围是（　）

A．$(-\infty,-2)\cup(3,+\infty)$　　B．$(-2,3)$　　C．$(-\infty,-3)\cup(2,+\infty)$

D．$(-3,2)$

【变式训练 8】.（2017·河北石家庄·一模）已知函数 $f(x)=\begin{cases}(4a-3)x+2a-4, x\le t\\ 2x^3-6x, x>t\end{cases}$，无论 t 取何值，函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 总是不单调.则 a 的取值范围是________.

【解题总结】

1、比较函数值大小，应将自变量转化到同一个单调区间内，然后利用函数单调性解决.

2、求复合函数单调区间的一般步骤为：①求函数定义域；②求简单函数单调区间；③求复合函数单调区间(同增异减).

3、利用函数单调性求参数时，通常要把参数视为已知数，依据函数图像或单调性定义，确定函数单调区间，与已知单调区间比较，利用区间端点间关系求参数.同时注意函数定义域的限制，遇到分段函数注意分点左右端点函数值的大小关系.

重难点题型(五) 利用函数单调性的比较大小

例 9．（2024·内蒙古鄂尔多斯·二模）已知定义在 R 上的函数 $f\left(x\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$，记 $a=f\left(0.9^{0.9}\right), b=f\left[\ln\left(\lg 9\right)\right], c=f\left(\frac{1}{\sin 1}\right)$，则（　）

A．$b<a<c$　　　　B．$a<c<b$

C．$c<a<b$　　　　D．$c<b<a$

例 10．（2025·全国·模拟预测）已知：$a=\frac{\ln 7}{\ln 2}$，$b=2.8$，$c=\mathrm{e}^{1.02}$，那么 a,b,c 三者的关系是（　）

A．$a<b<c$　　B．$a<c<b$　　C．$c<b<a$　　D．$b<c<a$