关于空间问题的基本理论

第七章 空间问题的基本理论

在空间问题中，应力、形变和位移等基本知函数共有15个，且均为x,y,z的函数。

空间问题的基本方程，边界条件，以及按位移求解和按应力求解的方法，都是与平面问题相似的。因此，许多问题可以从平面问题推广得到。

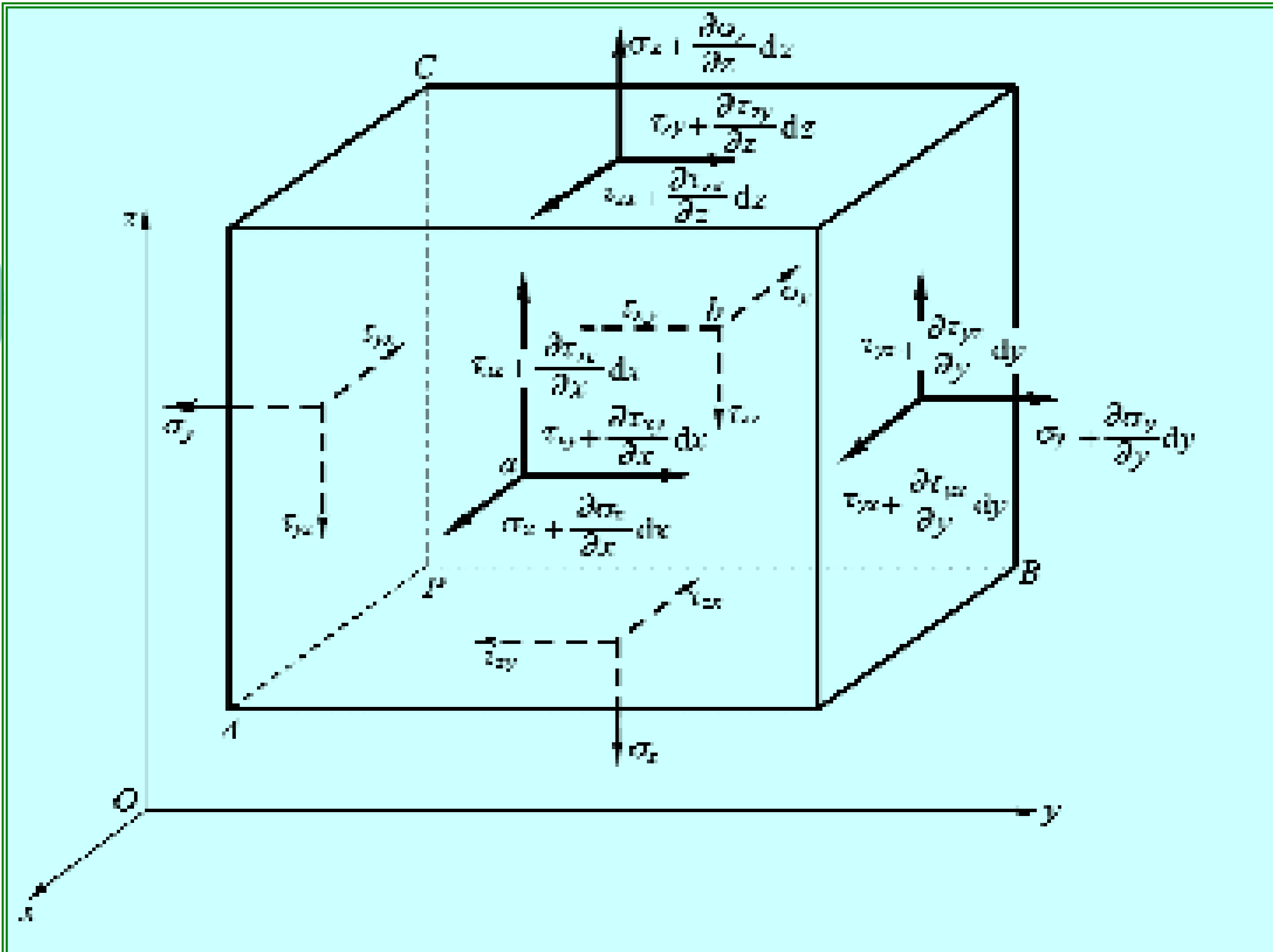
§7-1 平微分方程

取出微小的平行六面体，$\mathrm{d}v=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，

考虑其**平衡条件**：

$$\sum F_x=0,\quad \sum F_y=0,\quad \sum F_z=0; \qquad \text{(a)}$$

$$\sum M_x=0,\quad \sum M_y=0,\quad \sum M_z=0. \qquad \text{(b)}$$


C
A
B
P
O
y
a
b

由x轴向投影的*平衡微分方程* $\sum F_x = 0$，得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0. \quad (x, y, z) \quad (c)$$

因 x , y , z轴互相垂直，均为定向，量纲均为L，所以x , y , z 坐标具有对等性，其方程也必然具有*对等性*。所以式(a)的其余两式可通过式(c)的坐标轮换得到。

由三个力矩方程得到三个*切应力互等定理*，

$$\sum M_x = 0\,,\quad \tau_{yz} = \tau_{zy}\,。\qquad (x, y, z)$$

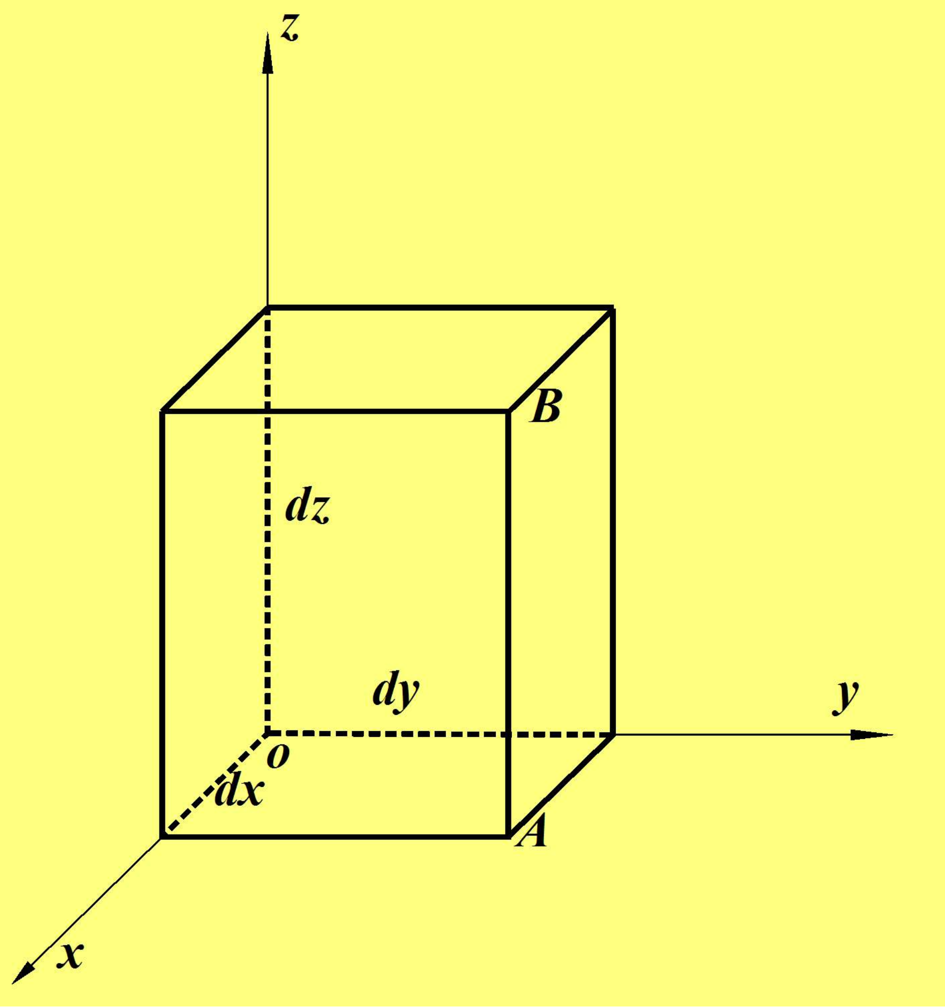
(d)

空间问题的平衡微分方程精确到三阶

微量 (dxdydz)。

思考题

在图中，若点o的x向正应力分量为σ_x，试表示点A，B的正应力分量。



§7-2 物体内任一点的应力

在空间问题中，同样需要解决：由直角坐标的应力分量 $\sigma_x \cdots \tau_{yz} \cdots$，来求出斜面(法线 n') 上的应力。

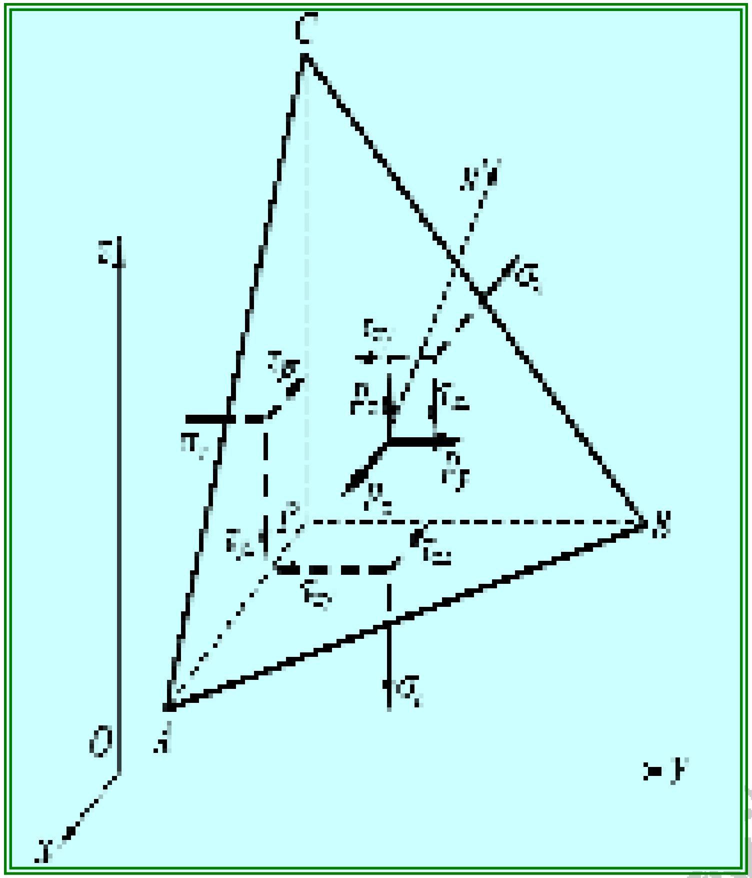
斜面全应力***p***可表示为两种分量形式:

p沿坐标向分量:

$$\boldsymbol{p}=(p_x,p_y,p_z)$$

p沿法向和切向分量:

$$\boldsymbol{p}=(\sigma_n,\tau_n)$$



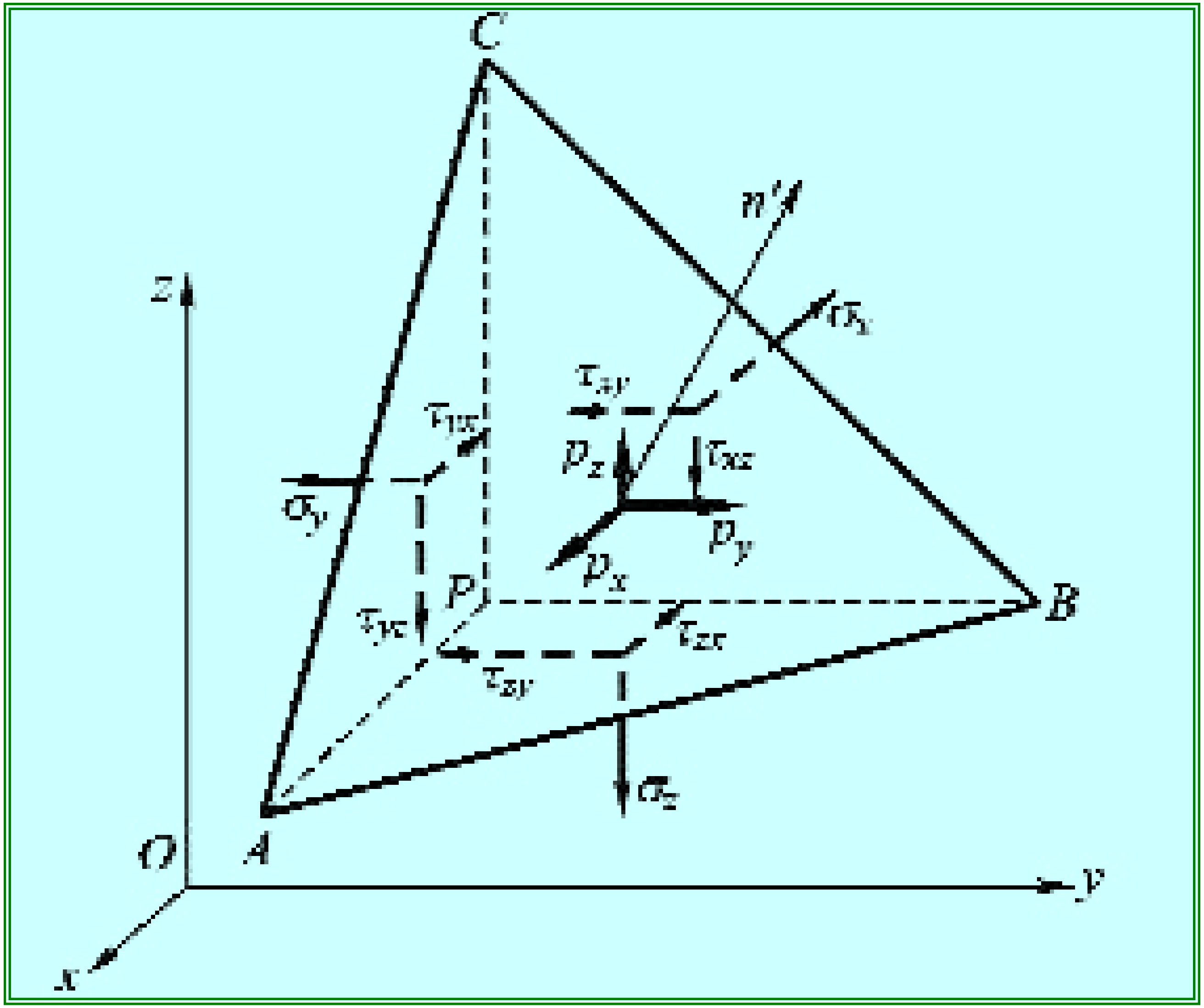
$p_x p_y p_z$

1. 求 $\boldsymbol{p}=(p_x, p_y, p_z)$

取出如图的包含斜面的微分四面体，斜面面积为ds, 则x面，y面和z面的面积分别为$l$ds, $m$ds, $n$ds。

由四面体的平衡条件$\sum F_x=0(x,y,z)$，得出坐标向的应力分量，

$$p_x = l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}. \qquad (x,y,z) \qquad (a)$$



C
n
z
σx
τxy
τyx
pz
τxz
σy
py
px
P
B
τyz
τzx
τzy
σz
O
A
y
x

$\sigma_n \tau_n$

2. 求 $\boldsymbol{p}=(\sigma_n,\tau_n)$

将 $\boldsymbol{p}=(p_x,p_y,p_z)$ 向法向 n' 投影，即得

$$\sigma_n = lp_x + mp_y + np_z$$

$$= l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2mn\tau_{yz} + 2nl\tau_{zx} + 2lm\tau_{xy}. \quad (b)$$

$$\because \quad p^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2,$$

$$\therefore \quad \tau_n^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - \sigma_n^2 \quad . \qquad (c)$$

从式(b)、(c)可见,当六个坐标面上的应力分量确定之后，任一斜面上的应力也就完全确定了。

3. 在 s_σ 上的应力边界条件

设在 s_σ 边界上，给定了面力分量 $\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z$，则可将微分四面体移动到边界点上，并使斜面与边界重合。这时，斜面应力分量 (p_x, p_y, p_z) 应代之为面力分量 $(\bar{f}_x, \bar{f}_y, \bar{f}_z)$，从而得出空间问题的应力边界条件:

$$(l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx})_s = \bar{f}_x \quad . \ (x, y, z) \quad (\text{在} S_\sigma \text{上}) \quad (d)$$

注意:

式(b), (c) 用于V内任一点，表示斜面应力与坐标面应力之间的关系；

式(d)只用于s_σ边界点上，表示边界面上的面力与坐标面的应力之间的关系，所以必须将边界面方程代入式(d)。

§7-3 主应力 最大与最小的应力

1. 假设n'面(l, m, n)为主面，则此斜面上

$$\tau_n = 0 \quad , \quad p = \sigma_n = \sigma.$$

斜面上沿坐标向的应力分量为

$$p_x = l\sigma, \quad p_y = m\sigma, \quad p_z = n\sigma.$$

代入p_x, p_y, p_z，得到

$$\left.\begin{aligned} & l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} = l\sigma, \\ & m\sigma_y + n\tau_{zy} + l\tau_{xy} = m\sigma, \\ & n\sigma_z + l\tau_{xz} + m\tau_{yz} = n\sigma。 \end{aligned}\right\} \qquad (a)$$

考虑方向余弦关系式,有

$$l^2+m^2+n^2=1. \qquad (b)$$

式(a) , (b)是求主应力及其方向余弦的方程。

2. 求主应力σ

将式(*a*)改写为

$$\left.\begin{aligned}(\sigma_x-\sigma)l+\tau_{yx}m+\tau_{zx}n=0,\\ \tau_{xy}l+(\sigma_y-\sigma)m+\tau_{zy}n=0,\\ \tau_{xz}l+\tau_{yz}m+(\sigma_z-\sigma)n=0。\end{aligned}\right\}$$

上式是求解l, m, n的齐次代数方程。由于l, m, n不全为0，所以其系数行列式必须为零，得

$$\begin{vmatrix} \sigma_x-\sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y-\sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z-\sigma \end{vmatrix}=0,$$

展开，即得求主应力的方程,

$$\sigma^3-(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z)\sigma^2+$$

$$(\sigma_y\sigma_z+\sigma_z\sigma_x+\sigma_x\sigma_y-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2-\tau_{xy}^2)\sigma-$$

$$(\sigma_x\sigma_y\sigma_z-\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2+2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy})=0. \qquad (c)$$

3. 应力主向

设主应力 σ_1 的主向为 l_1, m_1, n_1。代入式 (a) 中的前两式，整理后得

$$\left.\begin{aligned}&\tau_{yx}\frac{m_1}{l_1}+\tau_{zx}\frac{n_1}{l_1}+(\sigma_x-\sigma_1)=0,\\&(\sigma_y-\sigma_1)\frac{m_1}{l_1}+\tau_{zy}\frac{n_1}{l_1}+\tau_{xy}=0。\end{aligned}\right\}\qquad(d)$$

由上两式解出 $\frac{m_1}{l_1},\frac{n_1}{l_1}$ 。然后由式(b)得出

$$l_1=\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{m_1}{l_1})^2+(\frac{n_1}{l_1})^2}}. \qquad (e)$$

再求出m_1及n_1。

4. 一点至少存在着三个互相垂直的主应力

$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$（证明见书上）。

5. 应力不变量

若从式(c) 求出三个主应力 $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$，则式(c)也可以用根式方程表示为，

$$(\sigma-\sigma_1)(\sigma-\sigma_2)(\sigma_3-\sigma)=0. \qquad (f)$$

因式(c) 和(f)是等价的方程，故 σ 的各幂次系数应相等，从而得出

$$\left.\begin{aligned}
&\Theta_1=\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z,\\
&\Theta_2=\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1=\sigma_y\sigma_z+\\
&\sigma_z\sigma_x+\sigma_x\sigma_y-\tau_{yz}^2-\tau_{zx}^2-\tau_{xy}^2,\\
&\Theta_3=\sigma_1\sigma_2\sigma_3=\sigma_x\sigma_y\sigma_z-\\
&\sigma_x\tau_{yz}^2-\sigma_y\tau_{zx}^2-\sigma_z\tau_{xy}^2+2\tau_{yz}\tau_{zx}\tau_{xy}.
\end{aligned}\right\}\qquad\text{(g)}$$

式(g)中的各式，左边是不随坐标选择而变的； 而右边各项虽与坐标的选择有关，但其和也应与坐标选择无关。

∴分别称 $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ 为第一、二、三应力不变量。这些不变量常用于塑性力学之中。

6. 关于一点应力状态的结论：

(1) 六个坐标面上的应力分量完全确定一点的应力状态。只要六个坐标面上的应力分量确定了，则通过此点的任何面上的应力也完全确定并可求出。

(2) 一点存在着三个互相垂直的应力主面及主应力。

(3) 三个主应力包含了此点的最大和最小正应力。

（4）一点存在三个应力不变量$\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$.

（5）最大和最小切应力为$\pm\dfrac{\sigma_1-\sigma_3}{2}$（设$\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3$），作用于通过中间主应力、并且“平分最大和最小正应力的夹角”的平面上。

思考题

1. 试考虑：对于平面问题若$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$，则此点所有的正应力均为 σ，切应力均为0，即存在无数多的主应力。

2. 试考虑：对于空间问题若$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma$，则此点所有的正应力均为$\sigma$，切应力均为0，即存在无数多的主应力。

§7-4 几何方程及物理方程

空间问题的几何方程，可以从平面问题推广得出：

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}. \qquad (x, y, z; u, v, w)(a)$$

从几何方程同样可得出形变与位移之间的关系：

(1) 若位移确定，则形变完全确定。

从数学上看，由位移函数求导数是完全确定的，故形变完全确定。

(2) 若形变确定，则位移不完全确定。

∵由形变求位移，要通过积分，会出现待定的函数。若 $\varepsilon_x=\gamma_{yz}=0\ (x,y,z)$，还存在对应的位移分量为

$$u=u_0+\omega_y z-\omega_z y. \qquad (x,y,z;u,v,w) \qquad (b)$$

u_0,v_0,w_0 —沿 x , y , z 向的刚体平移；

$\omega_x,\omega_y,\omega_z$ —绕 x , y , z 轴的刚体转动角度。

若在 s_u 边界上给定了约束位移分量 $\bar{u},\bar{v},\bar{w}$，则**空间问题的位移边界条件为**

$$(u)_s = \bar{u}。\qquad (u,v,w) \qquad (c)$$

体积应变定义为

$$\theta = \frac{dv' - dv}{dv}$$

$$= \frac{(\mathrm{d}x+\varepsilon_x \mathrm{d}x)(\mathrm{d}y+\varepsilon_y \mathrm{d}y)(\mathrm{d}z+\varepsilon_z \mathrm{d}z)-\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$$

$$=(1+\varepsilon_x)(1+\varepsilon_y)(1+\varepsilon_z)-1 \ = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \quad (d)$$

其中由于小变形假定，略去形变的二、三次幂。