天津市第二十一中学 2025 届高三上学期期中考试数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知集合 $A=\left\{x \mid \frac{x-2}{x+2} \leq 0\right\}$， $B=\{x \in \mathrm{Z} \mid -1 \leq x \leq 5\}$，则 $A \cap B=$（　）

A．$[-1,2]$　　B．$\{-1,0,1,2\}$

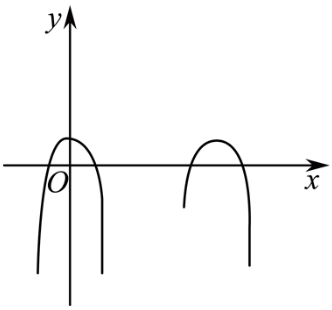
C．$[-1,2)$　　D．$\{-1,0,1\}$

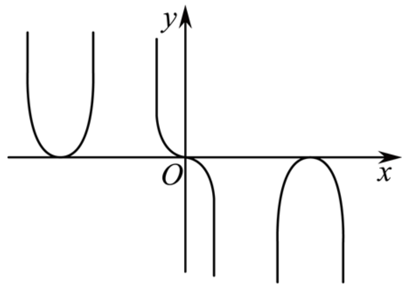
2．设 $a,b \in \mathbf{R}$，则"$2^{a}=2^{b}$"是"$a^{2}=b^{2}$"的（　）

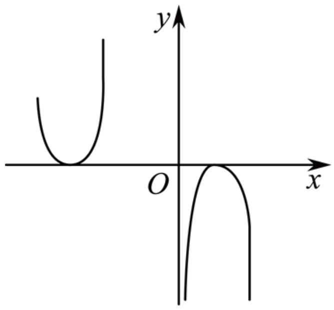
A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

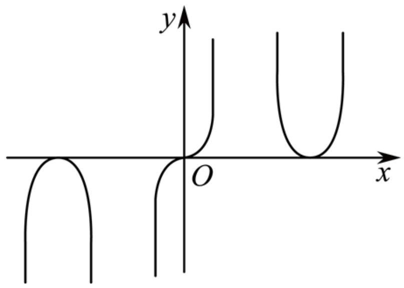
C．充要条件　　D．既不充分也不必要条件

3．函数 $y=\frac{\left(3^{x}-1\right)\ln(\cos x)}{3^{x}+1}$ 的部分图象大致为（　）

A．

B．

C．

D．

4．已知平面 α,β，直线 $l \subset \alpha$，直线 m 不在平面 α 内，下列说法正确的是（　）

A．若 $\alpha /\!/ \beta, m /\!/ l$，则 $m \parallel \beta$　　B．若 $l \perp \beta, m \perp \alpha$，则 $m \parallel \beta$

C．若 $l \perp m, \alpha \perp \beta$，则 $m \perp \alpha$　　D．若 $\alpha \parallel \beta, m \perp \beta$，则 $m \perp l$

5．设 $a=2^{0.3}$，$b=\sin\frac{\pi}{12}$，$c=\ln 2$，则（　）

A．$c<b<a$　　B．$b<c<a$　　C．$a<b<c$　　D．$b<a<c$

6．已知数列$\{a_n\},\{b_n\}$均为等差数列，其前n项和分别为S_n，T_n，满足$(2n+3)S_n=(3n-1)T_n$，则$\dfrac{a_7+a_8+a_9}{b_6+b_{10}}=$（　）

A．2　　B．3　　C．5　　D．6

7．灯笼起源于中国的西汉时期，两千多年来，每逢春节人们便会挂起象征美好团圆意义的红灯笼，营造一种喜庆的氛围.如图1，某球形灯笼的轮廓由三部分组成，上下两部分是两个相同的圆柱的侧面，中间是球面的一部分（除去两个球缺）.如图2，“球缺”是指一个球被平面所截后剩下的部分，截得的圆面叫做球缺的底，垂直于截面的直径被截得的一段叫做球缺的高.已知球缺的体积公式为$V=\dfrac{\pi}{3}(3R-h)h^2$，其中$R$是球的半径，$h$是球缺的高.已知该灯笼的高为40cm，圆柱的高为4cm，圆柱的底面圆直径为24cm，则该灯笼的体积为（取$\pi=3$）（　）

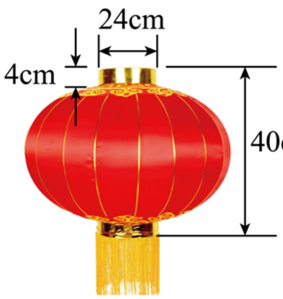


图1

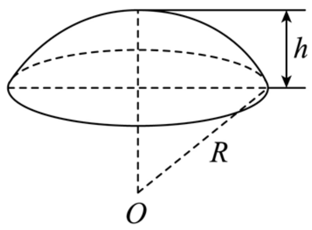


图2

A．33664cm^3　　B．33792cm^3　　C．34674cm^3　　D．35456cm^3

8．函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\ (\omega>0,0<\varphi<\pi)$，其图象的一个最低点是$P\left(\dfrac{\pi}{6},-2\right)$，距离$P$点最近的对称中心为$\left(\dfrac{\pi}{4},0\right)$，则（　）

A．$\omega=3$

B．$x=\dfrac{13\pi}{12}$是函数$f(x)$图象的一条对称轴

C．$x\in\left(-\dfrac{\pi}{6},0\right)$时，函数$f(x)$单调递增

D．$f(x)$的图象向右平移$\phi(\phi>0)$个单位后得到$g(x)$的图象，若$g(x)$是奇函数，则ϕ的最小值是$\dfrac{\pi}{6}$

9．设函数$f(x)$的定义域为$\mathbf{R}$，满足$f(x+2)=\dfrac{1}{2}f(x)$，且当$x\in(0,2]$时，$f(x)=x(x-2)$，若对任意$x\in[m,+\infty)$，都有$f(x)\geq-\dfrac{3}{16}$，则m的取值范围是（　）

A．$[5,+\infty)$　　B．$\left[\frac{9}{2},+\infty\right)$

C．$\left[\frac{21}{4},+\infty\right)$　　D．$\left[\frac{11}{2},+\infty\right)$

二、填空题

10．i 为虚数单位，若复数 $z=\frac{2i+1}{i-2}$，则 $|z|=$_____

11．$e^{\ln 3}+\log_{\sqrt{2}}8+(0.25)^{-\frac{1}{2}}$ 的值为_____.

12．已知函数 $f(x)$ 为偶函数，其图象在点 $(1,f(1))$ 处的切线方程为 $x-2y+1=0$，记 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，则 $f'(-1)=$_____.

13．已知正数 a，b 满足 $\frac{1}{2a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}$，则 $4a^2+ab+b^2$ 的最小值为_____.

14．折扇又名“撒扇”、“纸扇”，是一种用竹木或象牙做扇骨，韧纸或绫绢做扇面的能折叠的扇子，如图 1．其展开几何图是如图 2 的扇形 AOB，其中 $\angle AOB=120°$，$OC=2$，$OA=4$，点 E 在 $\overset{\frown}{CD}$ 上（包含端点），则 $\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{DA}=$________；$\overrightarrow{EA}\cdot\overrightarrow{EB}$ 的取值范围是________.

图1

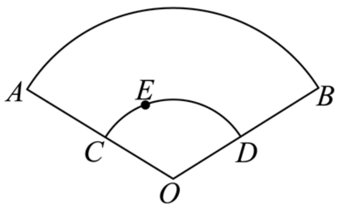


图2

15．已知定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2,0<x\le 2\\ \log_{\frac{1}{2}}\left(2x-\frac{15}{4}\right),x>2\end{cases}$，且满足 $f(-x)=-f(x)$，函数 $g(x)=kx$，若函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 有 7 个零点，则 k 的取值范围为________；若方程 $f(x)=m$（$m>0$）的解为 x_1、x_2、x_3、x_4，则 $x_1+x_2+x_3+x_4$ 的取值范围为________

三、解答题

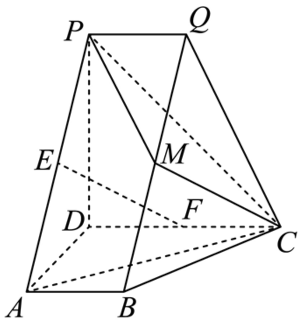
16．在 ΔABC 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c．已知 $a=2\sqrt{2},b=5,c=\sqrt{13}$．

(1)求角 C 的大小；

(2)求 $\sin A$ 的值；

(3)求$\sin(2A+\frac{\pi}{6})$的值.

17．如图，$PD\perp$平面$ABCD, AD\perp CD, AB//CD, PQ//CD$，$AD=CD=DP=2PQ=2AB=2$，点$E,F,M$分别为$AP,CD,BQ$的中点.



(1)求证：$EF//$平面CPM；

(2)求平面QPM与平面CPM夹角的正弦值；

(3)若N为线段CQ上的点，且直线DN与平面QPM所成的角为$\frac{\pi}{6}$，求N到平面CPM的距离.

18．记S_n是等差数列$\{a_n\}$的前n项和，数列$\{b_n\}$是等比数列，且满足$a_3=5$，$S_3=9$，$a_1+b_1=0$，$a_2+b_2=a_3+b_3=a_4-3b_4$.

(1)求数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式；

(2)若$c_n=\frac{nb_n}{a_n\cdot a_{n+1}}$，求数列$\{c_n\}$的前$n$项和；

(3)求证：对于$\forall n\in\mathbf{N}$且$n\geq 2$，$\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_3}+\cdots+\frac{1}{S_n}<\frac{7}{4}$.

19．已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{1}{3}(1-a_n)(n\in\mathbf{N}^*)$．若$2+b_n=3\log_{\frac{1}{4}}a_n$，且数列$\{c_n\}$满足$c_n=a_n\cdot b_n$.

(1)求证：数列$\{b_n\}$是等差数列；

(2)求证：数列$\{c_n\}$的前n项和$T_n<\frac{2}{3}$；

(3)若$c_n\leq\frac{1}{4}(t^2+t-1)$对一切$n\in\mathbf{N}^*$恒成立，求实数$t$的取值范围.

20．已知函数$f(x)=a\ln(x+1)-xe^{x+1}$.

(1)当$a<0$时，求$f(x)$的单调区间；

(2)若函数 $f\left(x\right)$ 存在正零点 x_0，

（i）求 a 的取值范围；

（ii）记 x_1 为 $f\left(x\right)$ 的极值点，证明：$x_0<3x_1$.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
答案	B	A	B	D	B	A	A	C	D	

1．B

【分析】根据条件，求出集合A,B，再利用集合的运算，即可求解.

【详解】由$\frac{x-2}{x+2}\le 0$，得到$-2<x\le 2$，即$A=\{x|-2<x\le 2\}$，

又$B=\{-1,0,1,2,3,4,5\}$，所以$A\cap B=\{-1,0,1,2\}$，

故选：B.

2．A

【分析】分别得出$2^a=2^b$及$a^2=b^2$时的a与b的关系，结合充分条件与必要条件定义即可判断.

【详解】由函数$y=2^x$在$\mathbf{R}$上单调递增，故当$2^a=2^b$时，有$a=b$，

若$a^2=b^2$，则$a=\pm b$，

故"$2^a=2^b$"是"$a^2=b^2$"的充分不必要条件.

故选：A.

3．B

【分析】通过函数的奇偶性可排除AC，通过$x\to 0^+$时函数值的符号可排除D，进而可得结果.

【详解】令$f(x)=\frac{(3^x-1)\ln(\cos x)}{3^x+1}$，其定义域为$\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right),k\in Z$关于原点对称，

$$f(-x)=\frac{(3^{-x}-1)\ln(\cos-x)}{3^{-x}+1}=\frac{(1-3^x)\ln\cos x}{1+3^x}=-f(x),$$

所以函数$f(x)$为奇函数，即图像关于原点对称，故排除AC，

当$x\to 0^+$时，$3^x-1>0$，$3^x+1>0$，$\ln\cos x<0$，即$f(x)<0$，故排除D，

故选：B.

4．D

【分析】由空间中直线与直线、直线与平面、平面与平面位置关系逐一分析四个选项得答案.

【详解】因为$l \subset \alpha$，

对于A，若$\alpha // \beta, m // l$，则m有可能在平面β内，故A错误；

对于B，若$l \perp \beta$，又$l \subset \alpha$，则$\alpha \perp \beta$，又$m \perp \alpha$，所以$m \parallel \beta$或m在平面β内，故B错误；

对于C，若$l \perp m, \alpha \perp \beta$，则$m$有可能与平面$\alpha$相交但不垂直，故C错误；

对于D，若$\alpha \parallel \beta, m \perp \beta$，则$m \perp \alpha$，又$l \subset \alpha$，则$m \perp l$，故D正确.

故选：D

5．B

【分析】根据给定的条件，利用指数、对数函数、正弦函数的性质，借助$1, \frac{1}{2}$进行比较判断选项.

【详解】$a = 2^{0.3} > 2^0 = 1$，$b = \sin\frac{\pi}{12} < \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$，

而$\sqrt{e} < 2 < e$，则$\frac{1}{2} < \ln 2 < 1$，即$\frac{1}{2} < c < 1$，所以$b < c < a$.

故选：B

6．A

【分析】根据题意，利用得出数列的性质和得出数列的求和公式，准确计算，即可求解.

【详解】因为数列$\{a_n\}, \{b_n\}$均为等差数列，可得$a_7 + a_8 + a_9 = 3a_8 = \frac{1}{5} \times 15a_8 = \frac{1}{5}S_{15}$，

且$b_6 + b_{10} = b_1 + b_{15}$，又由$T_{15} = \frac{15(b_1 + b_{15})}{2}$，可得$b_6 + b_{10} = \frac{2}{15}T_{15}$.

因此$\frac{a_7 + a_8 + a_9}{b_6 + b_{10}} = \frac{\frac{1}{5}S_{15}}{\frac{2}{15}T_{15}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{S_{15}}{T_{15}} = \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} = 2$.

故选：A.

7．A

【分析】由勾股定理求出R，则可得h，分别求出两个圆柱的体积、灯笼中间完整的球的体积与球缺的体积即可得..

【详解】该灯笼去掉圆柱部分的高为$40 - 8 = 32\text{cm}$，则$R - h = \frac{32}{2} = 16\text{cm}$，

由圆柱的底面圆直径为24cm，则有$(R - h)^2 + 12^2 = R^2$，

即$16^2 + 12^2 = R^2$，可得$R = 20$，则$h = 4$，

$V = 2V_{\text{圆柱}} + V_{\text{球}} - 2V_{\text{球缺}} = 2 \times 4 \times 12^2 \times \pi + \frac{4}{3} \times \pi \times 20^3 - 2 \times \frac{\pi}{3}(60 - 4) \times 4^2$

$=3456+32000-1792=33664$.

故选：A.

8．C

【分析】由函数的图像的顶点坐标求出A，由周期求出ω，由最低点求出φ的值，可得函数的解析式，再利用三角函数的图像和性质，得出结论.

【详解】解：Q函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0$，$0<\varphi<\pi)$的图象的一个最低点是$P\left(\frac{\pi}{6},-2\right)$，

距离P点最近的对称中心为$\left(\frac{\pi}{4},0\right)$，

$\therefore A=2$，$\frac{1}{4}\times\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$，$\therefore\omega=6$，

$\therefore 6\times\frac{\pi}{6}+\varphi=2k\pi-\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathrm{Z}$，解得$\varphi=2k\pi-\frac{3\pi}{2}$，$k\in\mathrm{Z}$，因为$0<\varphi<\pi$，

令$k=1$，可得$\varphi=\frac{\pi}{2}$，

所以函数$f(x)=2\sin(6x+\frac{\pi}{2})=2\cos 6x$，故A错误；

$f\left(\frac{13\pi}{12}\right)=2\cos\left(6\times\frac{13\pi}{12}\right)=2\cos\frac{\pi}{2}=0$，故函数关于$\left(\frac{13\pi}{12},0\right)$对称，故B错误；

当$x\in\left(-\frac{\pi}{6},0\right)$时，$6x\in(-\pi,0)$，函数$f(x)$单调递增，故C正确；

把$f(x)$的图象向右平移$\phi(\phi>0)$个单位后得到$g(x)=2\cos(6x-6\phi)$的图象，

若$g(x)$是奇函数，则$6\phi=2k\pi+\frac{\pi}{2}$，$k\in\mathrm{N}$，即$\phi=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$，$k\in\mathrm{N}$，

令$k=0$，可得ϕ的最小值是$\frac{\pi}{12}$，故D错误，

故选：C

9．D

【分析】由题设条件画出函数$f\left(x\right)$的简图，由图象分析得出m的取值范围.

【详解】当$x\in\left(0,2\right]$时，$x+2\in\left(2,4\right]$，

则$f\left(x+2\right)=\frac{1}{2}f\left(x\right)=\frac{1}{2}x\left(x-2\right)=\frac{1}{2}\left(x+2-2\right)\left(x+2-4\right)\in\left[-1,0\right]$，

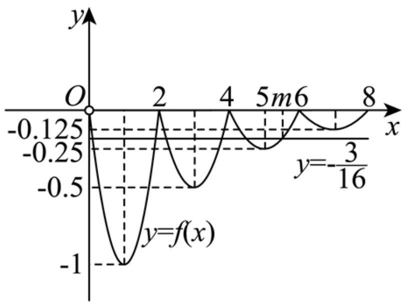
即当$x\in\left(2,4\right]$时，$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\left(x-2\right)\left(x-4\right)\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$，

同理当$x\in\left(4,6\right]$时，$f\left(x\right)=\frac{1}{4}\left(x-4\right)\left(x-6\right)\in\left[-\frac{1}{4},0\right]$；

当$x\in\left(6,8\right]$时，$f\left(x\right)=\frac{1}{8}\left(x-6\right)\left(x-8\right)\in\left[-\frac{1}{8},0\right]$.

以此类推，当$x>6$时，都有$f(x)>-\frac{3}{16}$.

函数$f(x)$和函数$y=-\frac{3}{16}$在$(0,8]$上的图象如下图所示：



由图可知，$f(m)=\frac{1}{4}(m-4)(m-6)=-\frac{3}{16}$，$m\in(5,6)$，解得$m=\frac{11}{2}$，

即对任意$x\in\left[\frac{11}{2},+\infty\right)$，都有$f(x)\geq-\frac{3}{16}$，即$m$的取值范围是$\left[\frac{11}{2},+\infty\right)$.

故选：D.

10．1

【分析】先利用复数除法运算化简复数，然后代入模的运算求解即可.

【详解】因为$z=\frac{2i+1}{i-2}=\frac{(2i+1)(-2-i)}{(i-2)(-2-i)}=\frac{-5i}{5}=-i$，所以$|z|=1$.

故答案为：1

11．11

【分析】进行对数和分数指数幂的运算即可.

【详解】原式$=3+log_{\sqrt{2}}(\sqrt{2})^6+2=3+6+2=11$.

故答案为：11.

12．$-\frac{1}{2}$

【分析】根据导数的几何性质求解即可.

【详解】因为$f(x)$为偶函数，所以$f(x)=f(-x)$，

两边求导，可得$[f(x)]'=[f(-x)]'\Rightarrow f'(x)=f'(-x)\cdot(-x)\Rightarrow f'(x)=-f'(-x)$.

又$f(x)$在$(1,f(1))$处的切线方程为：$x-2y+1=0$，所以$f'(1)=\frac{1}{2}$.

所以$f'(-1)=-f'(1)=-\frac{1}{2}$.