

2024 届云南省丽江市玉龙县第一中学全国高考招生统一考试高考数学试题模拟试题(4)

注意事项

1. 考生要认真填写考场号和座位序号。
2. 试题所有答案必须填涂或书写在答题卡上,在试卷上作答无效。第一部分必须用 2B 铅笔作答;第二部分必须用黑色字迹的签字笔作答。
3. 考试结束后,考生须将试卷和答题卡放在桌面上,待监考员收回。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 $a > 0$, 若对任意 $m \in (0, +\infty)$, 关于 x 的不等式 $(x-1)e^x - \frac{ax}{e} < m - \ln(m+1) - 1$ (e 为自然对数的底数) 至少有 2 个正整数解, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $\left[e, \frac{e^3+e}{2}\right]$ B. $\left[\frac{e^3+e}{2}, +\infty\right)$ C. $\left(0, \frac{e^3+e}{2}\right]$ D. $\left(\frac{e^3+e}{2}, +\infty\right)$

2. 下列命题为真命题的个数是 () (其中 π, e 为无理数)

① $\sqrt{e} > \frac{3}{2}$; ② $\ln \pi < \frac{2}{3}$; ③ $\ln 3 < \frac{3}{e}$.

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

3. 已知集合 $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $B = \{x | x^2 - x + 2 > 0\}$, 则 $A \cap B =$ ()

- A. $\{-1, 0\}$ B. $\{0, 1\}$ C. $\{-1, 0, 1\}$ D. $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

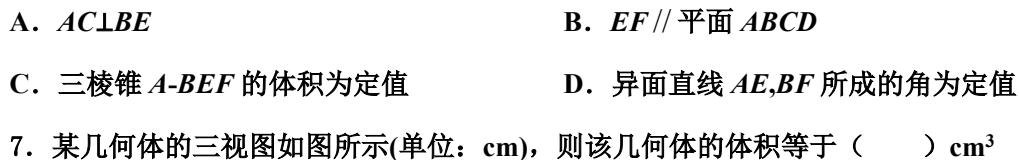
4. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a \cos B + b \sin A = c$. 若 $a = 2$, $\triangle ABC$ 的面积为 $3(\sqrt{2} - 1)$, 则 $b + c =$ ()

- A. 5 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. 16

5. 已知函数 $f(x) = \cos^2 x + \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$, 则 $f(x)$ 的最小值为 ()

- A. $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $1 - \frac{\sqrt{2}}{4}$

6. 如图所示, 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 1, 线段 B_1D_1 上有两个动点 E, F 且 $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则下列结论中错误的是 ()



9. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $4b \cos B \sin C = \sqrt{3}c$, 则 $B =$ ()

10. 过抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 的直线与抛物线交于 A 、 B 两点, 且 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{FB}$, 抛物线的准线 l 与 x

轴交于 C ， $\triangle ACF$ 的面积为 $8\sqrt{2}$ ，则 $|AB| = (\quad)$

- A. 6 B. 9 C. $9\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{2}$

11. 已知实数 x, y 满足线性约束条件 $\begin{cases} x \geq 1 \\ x + y \geq 0 \\ x - y + 2 \geq 0 \end{cases}$ ，则 $\frac{y+1}{x}$ 的取值范围为 $(\quad)$

- A. $(-2, -1]$ B. $(-1, 4]$ C. $[-2, 4)$ D. $[0, 4]$

12. 已知 $a > 0$, $f(x) = ax^2 - x + 1 (x > 0)$, $A = \{x | f(x) \leq x\}$, $B = \{x | f(f(x)) \leq f(x) \leq x\}$ ，若 $A = B \neq \emptyset$ 则实数 a 的取值范围是 $(\quad)$

- A. $(0, 1]$ B. $(0, \frac{3}{4}]$ C. $[\frac{3}{4}, 1]$ D. $[1, +\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $\left(2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^8$ 展开式的第 5 项的系数为_____.

14. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 棱长为 2，点 P 是上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 内一动点，若三棱锥 $P - ABC$ 的外接球表面积恰为 $\frac{41\pi}{4}$ ，则此时点 P 构成的图形面积为_____.

15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，若以 $N(0, 2)$ 为圆心且与椭圆 C 有公共点的圆的最大半径为 $\sqrt{26}$ ，此时椭圆 C 的方程是_____.

16. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数， $a_1 = 1$ ，且 $a_2 + a_6 = a_8$ ，若 $p - q = 10$ ，则 $a_p - a_q =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 中， $BC = 2$ ， $B = 45^\circ$ ， D 是 AB 上一点。

(1) 若 $S_{\triangle BCD} = 1$ ，求 CD 的长；

(2) 若 $A = 30^\circ$ ， $BD = 3AD$ ，求 $\frac{\sin \angle ACD}{\sin \angle DCB}$ 的值。

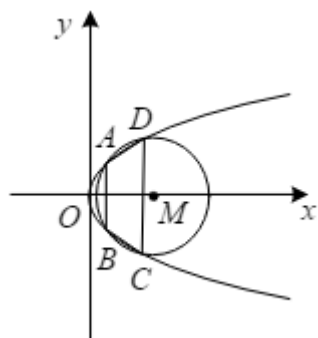
18. (12 分) $\triangle ABC$ 的内角 A ， B ， C 的对边分别是 a ， b ， c ，已知 $(a - b)^2 = c^2 - ab$ 。

(1) 求角 C ；

(2) 若 $4c \cos\left(A + \frac{\pi}{2}\right) + b \sin C = 0$ ， $a = 1$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

19. (12 分) 如图，已知抛物线 $E: y^2 = 4x$ 与圆 $M: (x - 3)^2 + y^2 = r^2$ ($r > 0$) 相交于 A ， B ， C ， D

四个点，

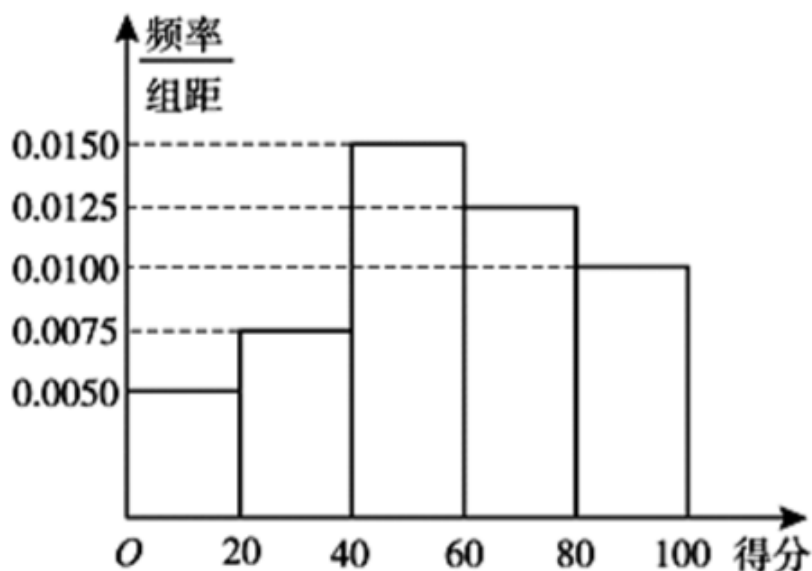


- (1) 求 r 的取值范围；
- (2) 设四边形 $ABCD$ 的面积为 S ，当 S 最大时，求直线 AD 与直线 BC 的交点 P 的坐标.

20. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，直线 l_1 的倾斜角为 30° ，且经过点 $A(2,1)$ 。以坐标原点 O 为极点， x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，直线 $l_2: \rho \cos \theta = 3$ ，从原点 O 作射线交 l_2 于点 M ，点 N 为射线 OM 上的点，满足 $|OM| \cdot |ON| = 12$ ，记点 N 的轨迹为曲线 C 。

- (I) 求出直线 l_1 的参数方程和曲线 C 的直角坐标方程；
- (II) 设直线 l_1 与曲线 C 交于 P, Q 两点，求 $|AP| \cdot |AQ|$ 的值.

21. (12 分) 为了加强环保知识的宣传，某学校组织了垃圾分类知识竞赛活动.活动设置了四个箱子，分别写有“厨余垃圾”、“有害垃圾”、“可回收物”、“其它垃圾”；另有卡片若干张，每张卡片上写有一种垃圾的名称.每位参赛选手从所有卡片中随机抽取 20 张，按照自己的判断将每张卡片放入对应的箱子中.按规则，每正确投放一张卡片得 5 分，投放错误得 0 分.比如将写有“废电池”的卡片放入写有“有害垃圾”的箱子，得 5 分，放入其它箱子，得 0 分.从所有参赛选手中随机抽取 20 人，将他们的得分按照 $[0,20]$ 、 $(20,40]$ 、 $(40,60]$ 、 $(60,80]$ 、 $(80,100]$ 分组，绘成频率分布直方图如图：

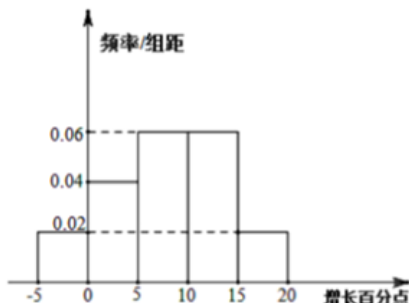
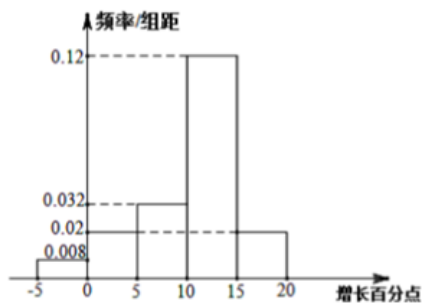


- (1) 分别求出所抽取的 20 人中得分落在组 $[0,20]$ 和 $(20,40]$ 内的人数；
- (2) 从所抽取的 20 人中得分落在组 $[0,40]$ 的选手中随机选取 3 名选手，以 X 表示这 3 名选手中得分不超过 20 分的人数，求 X 的分布列和数学期望.

22. (10 分) 新型冠状病毒肺炎疫情发生以来, 电子购物平台成为人们的热门选择. 为提高市场销售业绩, 某公司设计了一套产品促销方案, 并在某地区部分营销网点进行试点. 运作一年后, 对“采用促销”和“没有采用促销”的营销网点各选取了 50 个, 对比上一年度的销售情况, 分别统计了它们的年销售总额, 并按年销售总额增长的百分点分成 5 组: $[-5,0), [0,5), [5,10), [10,15), [15,20]$, 分别统计后制成如图所示的频率分布直方图, 并规定年销售总额增长 10 个百分点及以上的营销网点为“精英店”.

“采用促销”的销售网点

“没有采用促销”的销售网点



- (1) 请你根据题中信息填充下面的列联表, 并判断是否有的把握认为“精英店与采用促销活动有关”;

	采用促销	没有采用促销	合计
精英店			
非精英店			

合计	50	50	100
----	----	----	-----

(2) 某“精英店”为了创造更大的利润，通过分析上一年度的售价 x_i (单位：元)和日销量 y_i (单位：件) ($i = 1, 2, \dots, 10$) 的一组数据后决定选择 $y = a + bx^2$ 作为回归模型进行拟合.具体数据如下表，表中的 $w_i = x_i^2$ ：

$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{w}$	$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (w_i - \bar{w})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^{10} (w_i - \bar{w})(y_i - \bar{y})$
45.8	395.5	2413.5	4.6	21.6	- 2.3	-7.2

- ①根据上表数据计算 a, b 的值；
- ②已知该公司成本为 10 元/件，促销费用平均 5 元/件，根据所求出的回归模型，分析售价 x 定为多少时日利润 z 可以达到最大.

附①：
$$K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$$

$P(K^2 \geq k)$	0.100	0.050	0.010	0.001
k	2.706	3.841	6.635	10.828

附②：对应一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), (u_3, v_3), \dots, (u_n, v_n)$ ，其回归直线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距的最小二乘法估计分

别为
$$\beta = \frac{\sum_{i=1}^{10} (v_i - \bar{v})(u_i - \bar{u})}{\sum_{i=1}^{10} (u_i - \bar{u})^2}, \alpha = \bar{v} - \beta \bar{u}.$$

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、 B

【解析】

构造函数 $f(m) = m - \ln(m+1) - 1$ ($m > 0$), 求导可得 $f(m)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(m) > f(0) = -1$, 问题转化为 $(x-1)e^x - \frac{ax}{e} < -1$, 即 $(x-1)e^x \leq \frac{ax}{e} - 1$ 至少有 2 个正整数解, 构造函数 $g(x) = (x-1)e^x$, $h(x) = \frac{ax}{e} - 1$, 通过导数研究单调性, 由 $g(0) = h(0)$ 可知, 要使得 $g(x) \leq h(x)$ 至少有 2 个正整数解, 只需 $g(2) \leq h(2)$ 即可, 代入可求得结果.

【详解】

构造函数 $f(m) = m - \ln(m+1) - 1$ ($m > 0$), 则 $f'(m) = 1 - \frac{1}{m+1} = \frac{m}{m+1}$ ($m > 0$), 所以 $f(m)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(m) > f(0) = -1$, 故问题转化为至少存在两个正整数 x , 使得 $(x-1)e^x \leq \frac{ax}{e} - 1$ 成立, 设 $g(x) = (x-1)e^x$, $h(x) = \frac{ax}{e} - 1$, 则 $g'(x) = xe^x$, 当 $x > 0$ 时 $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增; 当 $x > 0$ 时, $h(x)$ 单调递增. $g(2) \leq h(2)$, 整理得 $a \geq \frac{e^3 + e}{2}$.

故选:B.

【点睛】

本题考查导数在判断函数单调性中的应用, 考查不等式成立问题中求解参数问题, 考查学生分析问题的能力和逻辑推理能力, 难度较难.

2、C

【解析】

对于①中, 根据指数幂的运算性质和不等式的性质, 可判定值正确的; 对于②中, 构造新函数

$f(x) = \ln x - \frac{2}{3}$, $x > 0$, 利用导数得到函数为单调递增函数, 进而得到 $f(\pi) > f(e)$, 即可判定是错误的; 对于③中, 构造新函数 $f(x) = e \ln x - x$, $x > 0$, 利用导数求得函数的最大值为 $f(e) = 0$, 进而得到 $f(3) < 0$, 即可判定是正确的.

【详解】

由题意, 对于①中, 由 $(\sqrt{e})^2 = e$, $(\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4} = 2.25$, 可得 $e > 2.25$, 根据不等式的性质, 可得 $\sqrt{e} > \frac{3}{2}$ 成立, 所以是正确的;

对于②中, 设函数 $f(x) = \ln x - \frac{2}{3}$, $x > 0$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, 所以函数为单调递增函数,

因为 $\pi > e$, 则 $f(\pi) > f(e)$

又由 $f(e) = \ln e - \frac{2}{3} = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} > 0$, 所以 $f(\pi) > 0$, 即 $\ln \pi > \frac{2}{3}$, 所以②不正确;

对于③中, 设函数 $f(x) = e \ln x - x, x > 0$, 则 $f'(x) = \frac{e}{x} - 1 = \frac{e-x}{x}$,

当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增,

当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减,

所以当 $x = e$ 时, 函数取得最大值, 最大值为 $f(e) = e \ln e - e = 0$,

所以 $f(3) = e \ln 3 - 3 < 0$, 即 $e \ln 3 < 3$, 即 $\ln 3 < \frac{3}{e}$, 所以是正确的.

故选: C.

【点睛】

本题主要考查了不等式的性质, 以及导数在函数中的综合应用, 其中解答中根据题意, 合理构造新函数, 利用导数求得函数的单调性和最值是解答的关键, 着重考查了构造思想, 以及推理与运算能力, 属于中档试题.

3、D

【解析】

先求出集合 B , 再与集合 A 求交集即可.

【详解】

由已知, $x^2 - x + 2 = (x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0$, 故 $B = R$, 所以 $A \cap B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.

故选: D.

【点睛】

本题考查集合的交集运算, 考查学生的基本运算能力, 是一道容易题.

4、C

【解析】

根据正弦定理边化角以及三角函数公式可得 $A = \frac{\pi}{4}$, 再根据面积公式可求得 $bc = 6(2 - \sqrt{2})$, 再代入余弦定理求解即可.

【详解】

$\triangle ABC$ 中, $a \cos B + b \sin A = c$, 由正弦定理得 $\sin A \cos B + \sin B \sin A = \sin C$,

又 $\sin C = \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$,

$\therefore \sin B \sin A = \cos A \sin B$, 又 $\sin B \neq 0$, $\therefore \sin A = \cos A$, $\therefore \tan A = 1$, 又 $A \in (0, \pi)$,

$\therefore A = \frac{\pi}{4}$. $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{\sqrt{2}}{4} bc = 3(\sqrt{2} - 1)$,

$\therefore bc = 6(2 - \sqrt{2})$, $\therefore a = 2$, $\therefore$ 由余弦定理可得 $a^2 = (b + c)^2 - 2bc - 2bc \cos A$,

$$\therefore (b+c)^2 = 4 + (2+\sqrt{2})bc = 4 + (2+\sqrt{2}) \times 6(2-\sqrt{2}) = 16, \text{ 可得 } b+c=4.$$

故选：C

【点睛】

本题主要考查了解三角形中正余弦定理与面积公式的运用,属于中档题.

5、C

【解析】

利用三角恒等变换化简三角函数为标准正弦型三角函数，即可容易求得最小值.

【详解】

$$\begin{aligned} \text{由于 } f(x) &= \cos^2 x + \sin^2 \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1 + \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos \left(2x + \frac{\pi}{2} \right)}{2} \\ &= 1 + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{2} \\ &= 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right), \end{aligned}$$

$$\text{故其最小值为: } 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查利用降幂扩角公式、辅助角公式化简三角函数，以及求三角函数的最值，属综合基础题.

6、D

【解析】

A. 通过线面的垂直关系可证真假；B. 根据线面平行可证真假；C. 根据三棱锥的体积计算的公式可证真假；D. 根据列举特殊情况可证真假.

【详解】

A. 因为 $AC \perp BD, AC \perp DD_1, DD_1 \cap BD = D$ ，所以 $AC \perp$ 平面 BDD_1B_1 ，

又因为 $BE \subset$ 平面 BDD_1B_1 ，所以 $AC \perp BE$ ，故正确；

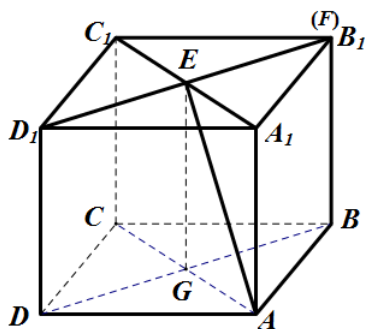
B. 因为 $D_1B_1 \parallel DB$ ，所以 $EF \parallel DB$ ，且 $EF \not\subset$ 平面 $ABCD$ ， $DB \subset$ 平面 $ABCD$ ，

所以 $EF \parallel$ 平面 $ABCD$ ，故正确；

C. 因为 $S_{\triangle BEF} = \frac{1}{2} \times EF \times BB_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ 为定值，A 到平面 BDD_1B_1 的距离为 $h = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

所以 $V_{A-BEF} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle BEF} \cdot h = \frac{1}{12}$ 为定值，故正确；

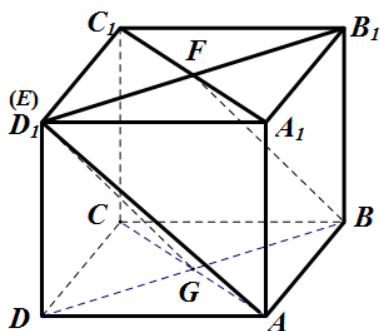
D. 当 $A_1C_1 \perp B_1D_1 = E$ ， $AC \cap BD = G$ ，取 F 为 B_1 ，如下图所示：



因为 $BF \parallel EG$ ，所以异面直线 AE, BF 所成角为 $\angle AEG$ ，

$$\text{且 } \tan \angle AEG = \frac{AG}{GE} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

当 $A_1C_1 \perp B_1D_1 = F$ ， $AC \cap BD = G$ ，取 E 为 D_1 ，如下图所示：



因为 $D_1F \parallel GB, D_1F = GB$ ，所以四边形 D_1GBF 是平行四边形，所以 $BF \parallel D_1G$ ，

$$\text{所以异面直线 } AE, BF \text{ 所成角为 } \angle AEG, \text{ 且 } \tan \angle AEG = \frac{AG}{GE} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

由此可知：异面直线 AE, BF 所成角不是定值，故错误。

故选：D.

【点睛】

本题考查立体几何中的综合应用，涉及到线面垂直与线面平行的证明、异面直线所成角以及三棱锥体积的计算，难度较难.注意求解异面直线所成角时，将直线平移至同一平面内.

7、D

【解析】

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/228060043040006117>