

新疆乌鲁木齐市第一中学 2023-2024 学年数学高三第一学期期末联考试题

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right)$ ($x \in \mathbb{R}, \omega > 0$) 的最小正周期为 π ，为了得到函数 $g(x) = \cos \omega x$ 的图象，只要将

$y = f(x)$ 的图象()

- A. 向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度 B. 向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度
- C. 向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度 D. 向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度

2. 在复平面内，复数 $z = \frac{2-i}{i}$ (i 为虚数单位) 对应的点位于 ()

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 已知双曲线 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线为 l ，圆 $C: (x-c)^2 + y^2 = 4$ 与 l 相切于点 A ，若 $\triangle AF_1F_2$ 的

面积为 $2\sqrt{3}$ ，则双曲线 Γ 的离心率为 ()

- A. 2 B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{7}{3}$ D. $\frac{\sqrt{21}}{3}$

4. 下列与 $\frac{9\pi}{4}$ 的终边相同的角的表达式中正确的是()

- A. $2k\pi + 45^\circ (k \in \mathbb{Z})$ B. $k \cdot 360^\circ + \frac{9}{4}\pi (k \in \mathbb{Z})$
- C. $k \cdot 360^\circ - 315^\circ (k \in \mathbb{Z})$ D. $k\pi + \frac{5\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$

5. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F ，准线与 x 轴的交点为 K ，点 P 为抛物线上任意一点 $\angle KPF$ 的平分线与 x 轴交于 $(m, 0)$ ，则 m 的最大值为()

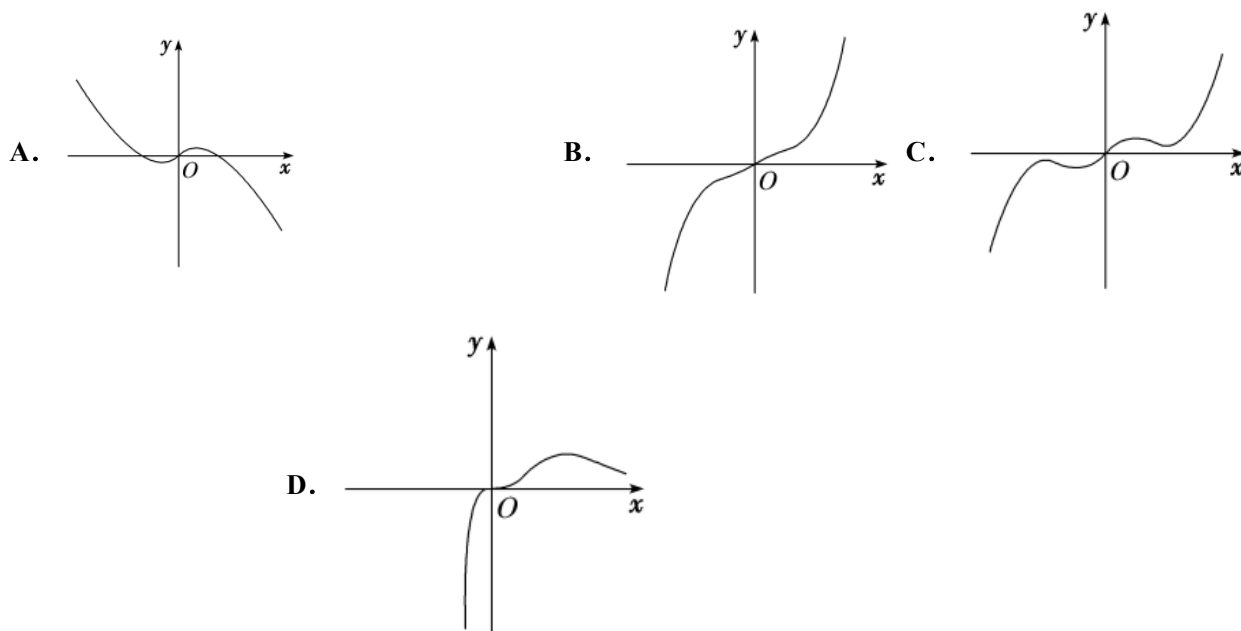
- A. $3 - 2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3} - 3$ C. $2 - \sqrt{3}$ D. $2 - \sqrt{2}$

6. 已知圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一条渐近线对称，则双曲线 C 的离心率为

()

- A. $\sqrt{5}$ B. 5 C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{5}{4}$

7. 函数 $f(x) = \frac{x^3}{3\pi} + \sin x$ 的图象的大致形状是 ()



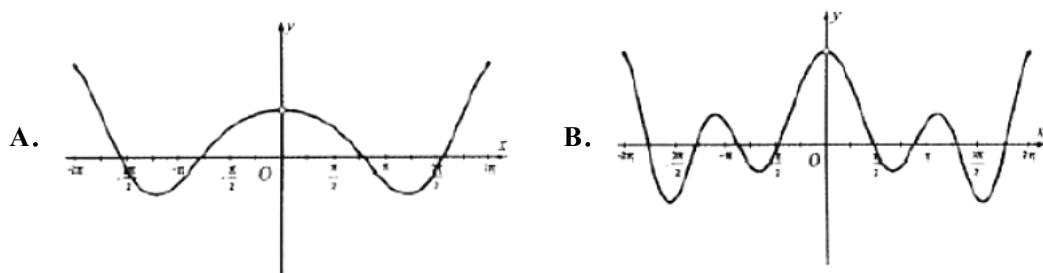
8. 已知角 α 的顶点与坐标原点重合, 始边与 x 轴的非负半轴重合, 若点 $P(2, -1)$ 在角 α 的终边上, 则 $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right) =$ ()

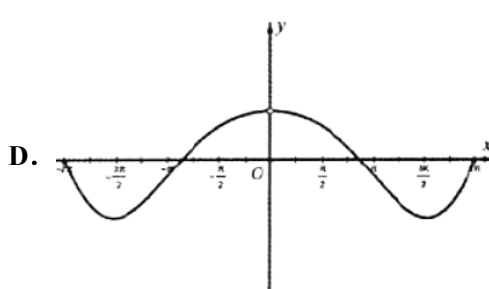
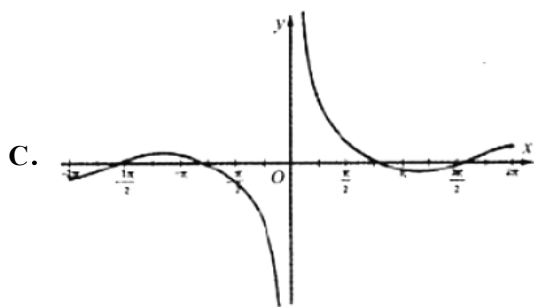
- A. $-\frac{4}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ C. $-\frac{3}{5}$ D. $\frac{3}{5}$

9. 已知直线 $l: y = 2x + 10$ 过双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一个焦点且与其中一条渐近线平行, 则双曲线的方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ B. $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ C. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

10. 函数 $f(x) = \frac{\sin x}{x} + \frac{x^2 \cos x}{20}$ 在 $[-2\pi, 0) \cup (0, 2\pi]$ 上的图象大致为 ()





11. 已知 F 是双曲线 $C: kx^2 + y^2 = 4|k|$ (k 为常数) 的一个焦点, 则点 F 到双曲线 C 的一条渐近线的距离为 ()

- A. $2k$ B. $4k$ C. 4 D. 2

12. 我国古代数学著作《九章算术》有如下问题“今有蒲生一日, 长三尺莞生一日, 长一尺蒲生日自半, 莞生日自倍. 问几何日而长倍?”意思是: “今有蒲草第1天长高3尺, 莞草第1天长高1尺以后, 蒲草每天长高前一天的一半, 莞草每天长高前一天的2倍. 问第几天莞草是蒲草的二倍?”你认为莞草是蒲草的二倍长所需要的天数是 ()

(结果采取“只入不舍”的原则取整数, 相关数据: $\lg 3 \approx 0.4771$, $\lg 2 \approx 0.3010$)

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

二、填空题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。

13. 某部门全部员工参加一项社会公益活动, 按年龄分为 A , B , C 三组, 其人数之比为 $5:3:2$, 现用分层抽样的方法从总体中抽取一个容量为20的样本, 若 C 组中甲、乙二人均被抽到的概率是 $\frac{1}{11}$, 则该部门员工总人数为 _____.

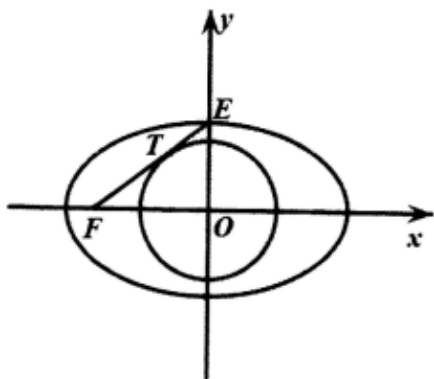
14. 若直线 $kx - y - k + 2 = 0$ 与直线 $x + ky - 2k - 3 = 0$ 交于点 P , 则 OP 长度的最大值为_____.

15. 设 P , A , B , C , D 是表面积为 36π 的球的球面上五点, 四边形 $ABCD$ 为正方形, 则四棱锥 $P-ABCD$ 体积的最大值为_____.

16. 小李参加有关“学习强国”的答题活动, 要从4道题中随机抽取2道作答, 小李会其中的三道题, 则抽到的2道题小李都会的概率为_____.

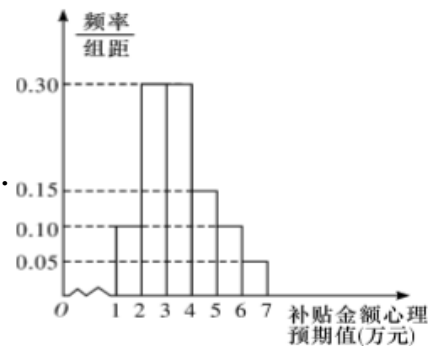
三、解答题: 共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12分) 已知点 E , F 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的上顶点和左焦点, 若 EF 与圆 $x^2 + y^2 = \frac{4}{3}$ 相切于点 T , 且点 T 是线段 EF 靠近点 E 的三等分点.



- (1) 求椭圆 C 的标准方程；
- (2) 直线 $l: y = kx + m$ 与椭圆 C 只有一个公共点 P ，且点 P 在第二象限，过坐标原点 O 且与 l 垂直的直线 l' 与圆 $x^2 + y^2 = 8$ 相交于 A, B 两点，求 $\triangle PAB$ 面积的取值范围.

18. (12 分) 购买一辆某品牌新能源汽车，在行驶三年后，政府将给予适当金额的购车补贴.某调研机构对拟购买该品牌汽车的消费者，就购车补贴金额的心理预期值进行了抽样调查，其样本频率分布直方图如图所示



- (1) 估计拟购买该品牌汽车的消费群体对购车补贴金额的心理预期值的方差（同一组中的数据用该组区间的中点值作代表）；
- (2) 将频率视为概率，从拟购买该品牌汽车的消费群体中随机抽取 4 人，记对购车补贴金额的心理预期值高于 3 万元的人数为 X ，求 X 的分布列和数学期望；
- (3) 统计最近 5 个月该品牌汽车的市场销售量，得其频数分布表如下：

月份	2018.11	2018.12	2019.01	2019.02	2019.03
销售量（万辆）	0.5	0.6	1.0	1.4	1.7

试预计该品牌汽车在 2019 年 4 月份的销售量约为多少万辆？

附：对于一组样本数据 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，其回归直线 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$

的斜率和截距的最小二乘估计分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}$, $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b}\bar{x}$.

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$ ($n \in N^*$), 其前 n 项和为 S_n .

(1) 通过计算 $\frac{a_1}{2^0}$, $\frac{a_2}{2^1}$, $\frac{a_3}{2^2}$, 猜想并证明数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1$, $b_{n+1} = \frac{n}{n+2}b_n$ ($n \in N^*$), $c_n = S_n \left(b_n - \frac{t}{n} \right)$ ($n \in N^*$), 若数列 $\{c_n\}$ 是单调递减数列,

求常数 t 的取值范围.

20. (12 分) 在直角坐标系中, 已知圆 $M: (x-a)^2 + (y-1)^2 = a^2 + 1$, 以原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标

系, 已知直线 $\rho \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2}$ 平分圆 M 的周长.

(1) 求圆 M 的半径和圆 M 的极坐标方程;

(2) 过原点作两条互相垂直的直线 l_1, l_2 , 其中 l_1 与圆 M 交于 O, A 两点, l_2 与圆 M 交于 O, B 两点, 求 $VOAB$ 面积的最大值.

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = |x-a|$ ($a \in R$).

(1) 当 $a = 2$ 时, 若 $f(x) + |3x-2| \geq M$ 恒成立, 求 M 的最大值;

(2) 记 $f(x) \leq |2x+1| - |2x-1|$ 的解集为集合 A , 若 $\left[\frac{1}{2}, 1 \right] \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

22. (10 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $(\sin A - \sin B)^2 = \sin^2 C - \sin A \sin B$.

(I) 求 C ;

(II) 若 $c = 1$, $\triangle ABC$ 的周长是否有最大值? 如果有, 求出这个最大值, 如果没有, 请说明理由.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

由 $f(x)$ 的最小正周期是 π ，得 $\omega = 2$ ，

$$\text{即 } f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

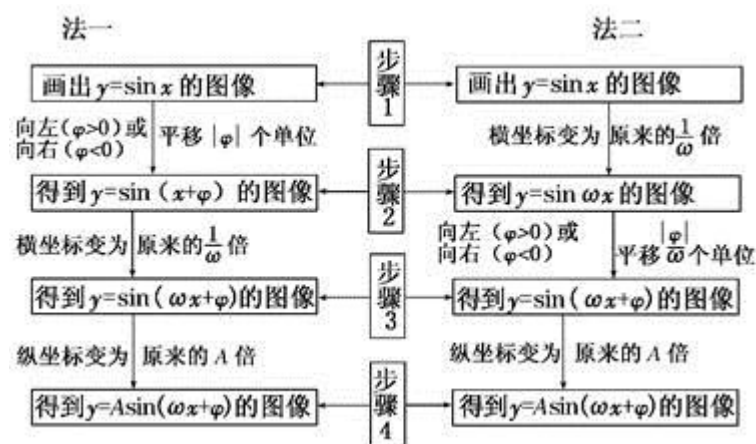
$$= \cos 2\left(x - \frac{\pi}{8}\right),$$

因此它的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位可得到 $g(x) = \cos 2x$ 的图象。故选 A。

考点：函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的图象与性质。

【名师点睛】

三角函数图象变换方法：



2、C

【解析】

化简复数为 $a + bi$ ($a, b \in R$) 的形式，可以确定 z 对应的点位于的象限。

【详解】

$$\text{解：复数 } z = \frac{2-i}{i} = \frac{(2-i)i}{i^2} = -(2i - i^2) = -1 - 2i$$

故复数 z 对应的坐标为 $(-1, -2)$ 位于第三象限

故选：C。

【点睛】

本题考查复数代数形式的运算，复数和复平面内点的对应关系，属于基础题.

3、D

【解析】

由圆 $C:(x-c)^2 + y^2 = 4$ 与 l 相切可知，圆心 $C(c,0)$ 到 l 的距离为 2，即 $b=2$. 又 $S_{\triangle AF_1F_2} = 2S_{\triangle AOF_2} = ab = 2\sqrt{3}$ ，由此求出 a 的值，利用离心率公式，求出 e .

【详解】

由题意得 $b=2$ ， $S_{\triangle AF_1F_2} = ab = 2\sqrt{3}$ ，

$$\therefore a = \sqrt{3}, \therefore e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{21}}{3}.$$

故选：D.

【点睛】

本题考查了双曲线的几何性质，直线与圆相切的性质，离心率的求法，属于中档题.

4、C

【解析】

利用终边相同的角的公式判断即得正确答案.

【详解】

与 $\frac{9\pi}{4}$ 的终边相同的角可以写成 $2k\pi + \frac{9\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$)，但是角度制与弧度制不能混用，所以只有答案 C 正确.

故答案为 C

【点睛】

(1) 本题主要考查终边相同的角的公式，意在考查学生对该知识的掌握水平和分析推理能力.(2) 与 α 终边相同的角

$$\beta = k \cdot 360^\circ + \alpha \quad \text{其中 } k \in \mathbb{Z}.$$

5、A

【解析】

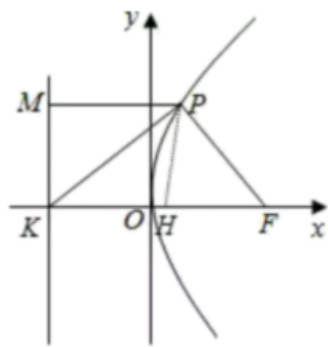
求出抛物线的焦点坐标，利用抛物线的定义，转化求出比值， $\frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + 4x}} = \frac{1-m}{1+m}$ ，

求出等式左边式子的范围，将等式右边代入，从而求解.

【详解】

解：由题意可得，焦点 $F(1, 0)$ ，准线方程为 $x=-1$ ，

过点 P 作 PM 垂直于准线， M 为垂足，



由抛物线的定义可得 $|PF|=|PM|=x+1$,

记 $\angle KPF$ 的平分线与 x 轴交于 $H(m,0)$, $(-1 < m < 1)$

根据角平分线定理可得 $\frac{|PF|}{|PK|} = \frac{|PM|}{|PK|} = \frac{|FH|}{|KH|}$,

$$\therefore \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + 4x}} = \frac{1-m}{1+m},$$

当 $x=0$ 时, $m=0$,

$$\text{当 } x \neq 0 \text{ 时, } \frac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2 + 4x}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{4}{x + \frac{1}{x} + 2}}} \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right),$$

$$\therefore \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \frac{1-m}{1+m} < 1 \Rightarrow 0 < m \leq 3 - 2\sqrt{2},$$

综上: $0 \leq m \leq 3 - 2\sqrt{2}$.

故选: A.

【点睛】

本题主要考查抛物线的定义、性质的简单应用, 直线的斜率公式、利用数形结合进行转化是解决本题的关键. 考查学生的计算能力, 属于中档题.

6、C

【解析】

将圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$, 化为标准方程为, 求得圆心为 $(2, -1)$. 根据圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线

$C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线对称, 则圆心在渐近线上, $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$. 再根据 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2}$ 求解.

【详解】

已知圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$,

所以其标准方程为: $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$,

所以圆心为 $(2, -1)$.

因为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$,

所以其渐近线方程为 $y = \pm \frac{b}{a}x$,

又因为圆 $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ 关于双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线对称,

则圆心在渐近线上,

所以 $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$.

所以 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

故选: C

【点睛】

本题主要考查圆的方程及对称性, 还有双曲线的几何性质, 还考查了运算求解的能力, 属于中档题.

7、B

【解析】

根据函数奇偶性, 可排除 D; 求得 $f'(x)$ 及 $f''(x)$, 由导函数符号可判断 $f(x)$ 在 R 上单调递增, 即可排除 AC 选项.

【详解】

函数 $f(x) = \frac{x^3}{3\pi} + \sin x$

易知 $f(x)$ 为奇函数, 故排除 D.

又 $f'(x) = \frac{x^2}{\pi} + \cos x$, 易知当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 时, $f'(x) > 0$;

又当 $x \in \left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ 时, $f''(x) = \frac{2x}{\pi} - \sin x > 1 - \sin x \geq 0$,

故 $f'(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$ 上单调递增, 所以 $f'(x) > f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$,

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/228073017007006051>