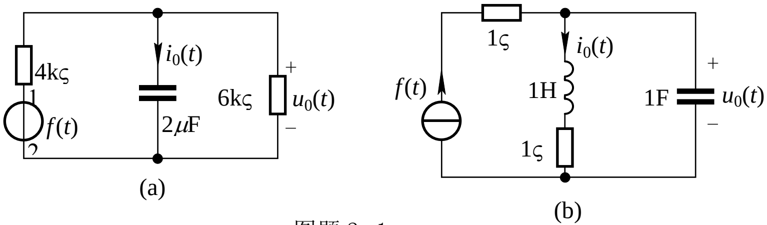
第二章　连续系统的时域分析习题解答

2-1　图题 2-1 所示各电路中，激励为 $f(t)$，响应为 $i_0(t)$和 $u_0(t)$。试列写各响应关于激励微分算子方程。



图题 2-1

解：

(a) $(\frac{1}{4}+0.002p+\frac{1}{6})u_0(t)=\frac{f(t)}{4}\Rightarrow(3p+625)u_0(t)=375f(t)$;

$i_0=2\times10^{-6}pu_0\Rightarrow(3p+625)i_0=7.5\times10^{-4}pf$;

(b) $u_0(t)=\dfrac{f}{\frac{1}{1+p}+p}=\dfrac{p+1}{p^2+p+1}f$,　$i_0=\dfrac{u_0}{p+1}=\dfrac{1}{p^2+p+1}f$,

$\Rightarrow(p^2+p+1)u_0=(p+1)f$;　$(p^2+p+1)i_0=f$.

2-2　求图题 2-1 各电路中响应 $i_0(t)$和 $u_0(t)$对激励 $f(t)$的传输算子 $H(p)$。

解：(a) $H_{uf}(p)=\dfrac{u_0(t)}{f(t)}=\dfrac{375}{3p+625}$; $H_{if}(p)=\dfrac{i_0(t)}{f(t)}=\dfrac{7.5\times10^{-4}p}{3p+625}$;

(b) $H_{uf}(p)=\dfrac{u_0(t)}{f(t)}=\dfrac{p+1}{p^2+p+1}$; $H_{if}(p)=\dfrac{i_0(t)}{f(t)}=\dfrac{p^2+p}{p^2+p+1}$.

2-3　给定如下传输算子 $H(p)$，试写出它们对应的微分方程。

(1) $H(p)=\dfrac{p}{p+3}$;　　(2) $H(p)=\dfrac{p+3}{p+3}$;

(3) $H(p)=\dfrac{p+3}{2p+3}$;　　(4) $H(p)=\dfrac{p(p+3)}{(p+1)(p+2)}$.

解：(1) $\dfrac{dy}{dt}+3y=\dfrac{df}{dt}$;　　(2) $\dfrac{dy}{dt}+3y=\dfrac{df}{dt}+3f$;

(3) $2\dfrac{dy}{dt}+3y=\dfrac{df}{dt}+3f$;　　(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+2y=\dfrac{d^2f}{dt^2}+3\dfrac{df}{dt}$.

2-4　已知连续系统的输入输出算子方程及 0_- 初始条件为：

(1) $y(t)=\dfrac{2p+4}{(p+1)(p+3)}f(t)$, $y(0_-)=2$, $y'(0_-)=1$;

(2) $y(t)=\dfrac{-(2p+1)}{p(p^2+4p+8)}f(t)$, $y(0_-)=0$, $y'(0_-)=1$, $y''(0_-)=0$;

(3) $y(t)=\dfrac{3p+1}{p(p+2)^2}f(t)$, $y(0_-)=y'(0_-)=0$, $y''(0_-)=4$.

试求系统的零输入响应 $y_x(t)(t \geq 0)$。

解：(1) $p_1=-1,\ p_2=-3,\ y(t)=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-3t}$,

$$\begin{cases}2=A_1+A_2\\1=-A_1-3A_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=3.5\\A_2=-1.5\end{cases}\Rightarrow y(t)=3.5\mathrm{e}^{-t}-1.5\mathrm{e}^{-3t},\ t\geq 0;$$

(2) $p_1=0,\ p_{2,3}=-2\pm \mathrm{j}2,\ y(t)=A_1+A_2\mathrm{e}^{-2t}\cos(2t+A_3)$,

$$\begin{cases}0=A_1+A_2\cos A_3\\1=-2A_2(\cos A_3+\sin A_3)\\0=4A_2 2\cos A_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=0\\A_2=0.5\\A_3=-90^\circ\end{cases}\Rightarrow y(t)=0.5\mathrm{e}^{-2t}\sin 2t,\ t\geq 0.$$

(3) $p_1=0,\ p_{2,3}=-2,\ y(t)=A_1+(A_2t+A_3)\mathrm{e}^{-2t}$,

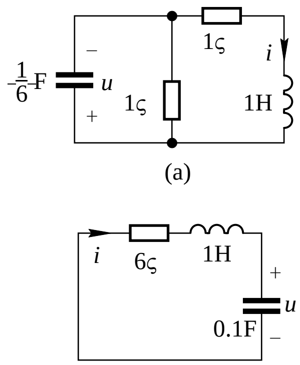
$$\begin{cases}0=A_1+A_3\\0=A_2-2A_3\\4=-4A_2+4A_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=1\\A_2=-2\\A_3=-1\end{cases}\Rightarrow y(t)=1-(2t+1)\mathrm{e}^{-2t},\ t\geq 0.$$

2-5 已知图题 2-5 各电路零输入响应分别为：

(a) $u_x(t)=6\mathrm{e}^{-3t}-4\mathrm{e}^{-4t}\mathrm{V},\ t\geq 0$;

(b) $u_x(t)=2\mathrm{e}^{-3t}\cos t+6\mathrm{e}^{-3t}\sin t\mathrm{V},\ t\geq 0$.

求 $u(0_-)$、$i(0_-)$。



图题 2-5

解：(a) $u(0_-)=u_x(0_+)=6-4=2\mathrm{V}$;

$$i(0_-)=i_x(0_+)=\frac{1}{6}(-18+16)+\frac{2}{1}=\frac{5}{3}\mathrm{A}$$

(b) $u_x(0_-)=u_x(0_+)=2+0=2\mathrm{V}$;

$$i(0_-)=i_x(0_+)=0.1(-6+6)=0.$$

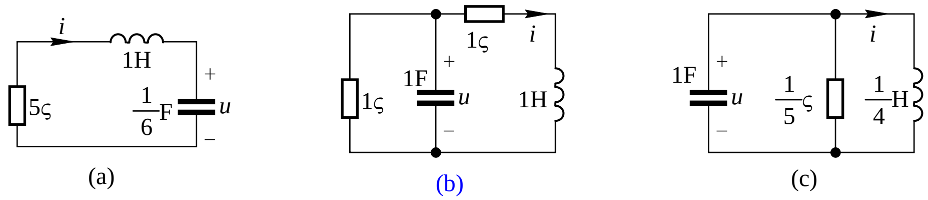
2-6 图题 2-6 所示各电路：

(a) 已知 $i(0_-)=0$，$u(0_-)=5\mathrm{V}$，求 $u_x(t)$；

(b) 已知 $u(0_-)=4\mathrm{V}$，$i(0_-)=0$，求 $i_x(t)$；

(c) 已知 $i(0_-)=0$，$u(0_-)=3\mathrm{V}$，求 $u_x(t)$.

解：$(a)\ |\mathbf{Z}(p)|=0\Rightarrow 5+p+\dfrac{6}{p}=0\Rightarrow p^2+5p+6=0$



图题 2-6

$$\Rightarrow p_1=-2,\ p_2=-3 \Rightarrow u_x(t)=A_1\mathrm{e}^{-2t}+A_2\mathrm{e}^{-3t}$$

$$u_x(0_-)=5\mathrm{V},\ \ u_x'(0_-)=\frac{i(0_-)}{C}=0 \Rightarrow \begin{cases}5=A_1+A_2\\ 0=-2A_1-3A_2\end{cases}$$

$$\Rightarrow A_1=15,\ \ A_2=-10,\ \ u_x(t)=15\mathrm{e}^{-2t}-10\mathrm{e}^{-3t}\mathrm{V},\ t\geq 0_-.$$

$$\text{(b)}\ |\mathbf{Y}(p)|=0 \Rightarrow \frac{1}{1}+p+\frac{1}{1+p}=0 \Rightarrow p^2+2p+2=0$$

$$\Rightarrow p_1=-1+j1,\ p_2=-1-j1 \Rightarrow i_x(t)=A_1\mathrm{e}^{-t}\cos(t+A_2)$$

$$i_x(0_-)=0,\ \ i_x'(0_-)=-1\times 0+4=4 \Rightarrow \begin{cases}0=A_1\cos A_2\\ 4=-A_1\cos A_2-A_1\sin A_2\end{cases}$$

$$\Rightarrow A_1=4,\ \ A_2=-\pi/2,\ \ i_x(t)=4\mathrm{e}^{-t}\sin t\ \mathrm{A},\ t\geq 0_-.$$

(c) 同理：$p+5+\dfrac{4}{p}=0 \Rightarrow p^2+5p+4=0,\ p_1=-1,\ p_2=-4,$

$$u_x=A_1\mathrm{e}^{-t}+A_2\mathrm{e}^{-4t},\ \ u_x(0_-)=3\mathrm{V},\ \ u_x'(0_-)=-5\times 3+0=-15,$$

$$A_1=-1,\ A_2=4,\ \ u_x=4\mathrm{e}^{-4t}-\mathrm{e}^{-t}\mathrm{V},\ t\geq 0_-.$$

2-7 已知三个连续系统的传输算子 $H(p)$ 分别为：

$$(1)\ \frac{2p+4}{(p+1)(p+3)};\qquad (2)\ \frac{-(2p+1)}{p(p^2+4p+8)};\qquad (3)\ \frac{3p+1}{p(p+2)^2}.$$

试求各系统的单位冲激响应 $h(t)$。

解：(1) $H(p)=\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{p+3} \Rightarrow h(t)=(\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$；

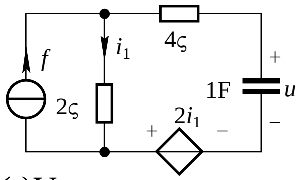
$$(2)\ H(p)=-\frac{\frac{1}{8}}{p}+\frac{Ap+B}{p^2+4p+8}=\frac{(A-\frac{1}{8})p^2+(B-\frac{1}{2})p-1}{p(p^2+4p+8)} \Rightarrow A=\frac{1}{8},B=-1.5$$

$$\Rightarrow H(p)=-\frac{\frac{1}{8}}{p}+\frac{\frac{1}{8}(p+2)-0.875\times 2}{(p+2)^2+2^2}$$

$$\Rightarrow h(t)=(-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\mathrm{e}^{-2t}\cos 2t-0.875\mathrm{e}^{-2t}\sin 2t)\varepsilon(t);$$

$$(3)\ H(p)=\frac{\frac{1}{4}}{p}+\frac{2.5}{(p+2)^2}-\frac{\frac{1}{4}}{p+2} \Rightarrow h(t)=(\frac{1}{4}+\frac{5}{2}t\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t).$$

2-8 求图题 2-8 所示各电路中关于 $u(t)$ 的冲激响应 $h(t)$。

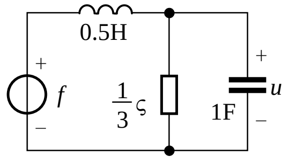


(a)

解：(a) $\begin{cases}f-i_1=pu\\ 2i_1+2i_1-u-4pu=0\end{cases} \Rightarrow 8pu+u=4f$

$$\Rightarrow H(p)=\frac{u}{f}=\frac{4}{8p+1}=\frac{0.5}{p+0.125} \Rightarrow h(t)=0.5\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\varepsilon(t)\mathrm{V}.$$

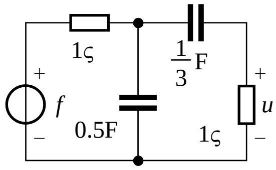
$$(b)\ H(p)=\frac{\dfrac{1}{0.5p}}{\dfrac{1}{0.5p}+3+p}=\frac{2}{p^2+3p+2}=\frac{2}{p+1}-\frac{2}{p+2}$$



(b)

$$\Rightarrow h(t)=(2\mathrm{e}^{-t}-2\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)\mathrm{V}.$$

$$(c)\ H(p)=\frac{1}{1+\dfrac{3}{p}}\times\frac{\dfrac{1}{1}}{\dfrac{1}{1}+0.5p+\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{p}}}=\frac{2p}{p^2+7p+6}$$



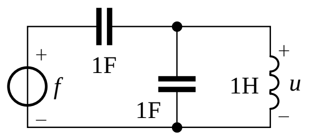
$$=\frac{-0.4}{p+1}+\frac{2.4}{p+6}\quad\Rightarrow\quad h(t)=(2.4\mathrm{e}^{-6t}-0.4\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)\mathrm{V}.$$

(c)

图题 2-8

2-9 求图题 2-9 所示各电路关于 $u(t)$的冲激响应 $h(t)$与阶跃响应 $g(t)$。

解：(a) $H(p)=\dfrac{p}{p+p+\dfrac{1}{p}}=\dfrac{p^2}{2p^2+1}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\dfrac{1}{4}\sqrt{2}(\dfrac{1}{\sqrt{2}})}{p^2+\dfrac{1}{2}}$

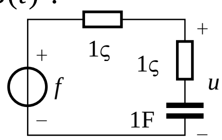


(a)

$$\Rightarrow h(t)=\frac{1}{2}\delta(t)-\frac{\sqrt{2}}{4}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\varepsilon(t),$$

$$g(t)=\int_{0_-}^{t}h(\tau)d\tau=\frac{1}{2}\varepsilon(t)+\frac{2}{4}\left[\cos\frac{\tau}{\sqrt{2}}\right]\Bigg|_{0_-}^{t}\varepsilon(t)=\frac{1}{2}\cos\frac{t}{\sqrt{2}}\varepsilon(t)\ .$$

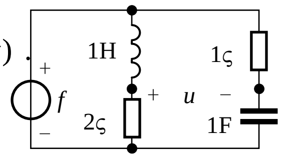
$$(b)\ H(p)=\frac{\dfrac{1}{p}+1}{\dfrac{1}{p}+2}=\frac{p+1}{2p+1}=\frac{1}{2}+\frac{\dfrac{1}{4}}{p+\dfrac{1}{2}}\Rightarrow h(t)=\frac{1}{2}\delta(t)+\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\varepsilon(t),$$



(b)

$$g(t)=\int_{0_-}^{t}h(\tau)d\tau=\frac{1}{2}\varepsilon(t)-[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\tau}]\Big|_{0_-}^{t}\varepsilon(t)=(1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t})\varepsilon(t)\ .$$

$$(c)\ H(p)=\frac{2}{p+2}-\frac{\dfrac{1}{p}}{1+\dfrac{1}{p}}=\frac{2}{p+2}-\frac{1}{p+1}\Rightarrow h(t)=(2\mathrm{e}^{-2t}-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t),$$

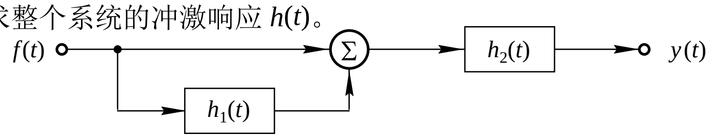


(c)

图题 2-9

$$g(t)=\int_{0_-}^{t}h(\tau)d\tau=[-\mathrm{e}^{-2\tau}+\mathrm{e}^{-\tau}]\Big|_{0_-}^{t}\varepsilon(t)=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t).$$

2-10 如图题 2-10 所示系统，已知两个子系统的冲激响应分别为 $h_1(t)5\delta(t21)$，$h_2(t)5$ ™(t)，试求整个系统的冲激响应 $h(t)$。



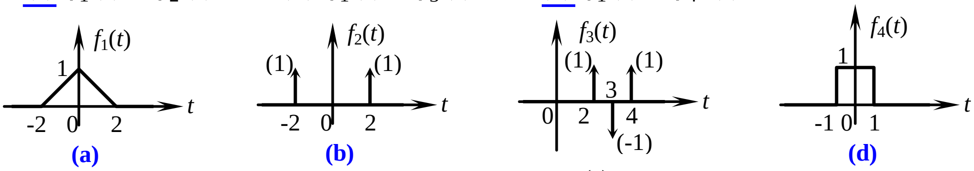
图题 2-10

解：求和号后的冲激响应为 $\delta(t)+\delta(t-1)$，于是整个系统的冲激响应为：

$h(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-1)$

2-11　各信号波形如题图 2-11 所示，试计算下列卷积，并画出其波形。

(1) $f_1(t)*f_2(t)$;　　(2) $f_1(t)*f_3(t)$;　　(3) $f_1(t)*f_4'(t)$.

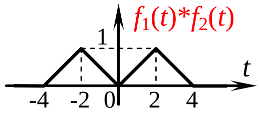


(a)　(b)　(c)　(d)

图题 2-11

解:

$f_1(t)=\frac{1}{2}(t+2)\varepsilon(t+2)-t\varepsilon(t)+\frac{1}{2}(t-2)\varepsilon(t-2)$

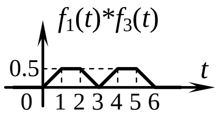


(1)

(1) $f_1(t)*f_2(t)=f_1(t+2)+f_1(t-2)$

$$=\frac{1}{2}(t+4)\varepsilon(t+4)-(t+2)\varepsilon(t+2)+t\varepsilon(t)$$

$$-(t-2)\varepsilon(t-2)+\frac{1}{2}(t-4)\varepsilon(t-4);$$

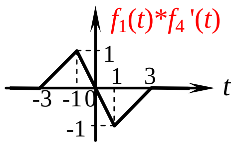


(2)

(2) $f_1(t)*f_3(t)=f_1(t-2)-f_1(t-3)+f_1(t-4)$

$$=\frac{1}{2}t\varepsilon(t)-\frac{1}{2}(t-1)\varepsilon(t-1)-\frac{1}{2}(t-2)\varepsilon(t-2)$$

$$+(t-3)\varepsilon(t-3)-\frac{1}{2}(t-4)\varepsilon(t-4)-\frac{1}{2}(t-5)\varepsilon(t-5)+\frac{1}{2}(t-6)\varepsilon(t-6);$$



(3)

(3) $f_1(t)*f_4'(t)=f_1(t+1)-f_1(t-1)$

$$=\frac{1}{2}(t+3)\varepsilon(t+3)-(t+1)\varepsilon(t+1)+\frac{1}{2}(t-1)\varepsilon(t-1)$$

$$-\frac{1}{2}(t+1)\varepsilon(t+1)+(t-1)\varepsilon(t-1)-\frac{1}{2}(t-3)\varepsilon(t-3)$$

$$=\frac{1}{2}(t+3)\varepsilon(t+3)-\frac{3}{2}(t+1)\varepsilon(t+1)+\frac{3}{2}(t-1)\varepsilon(t-1)-\frac{1}{2}(t-3)\varepsilon(t-3).$$

2-12　求下列各组信号的卷积积分。

(1) $f_1(t)=\varepsilon(t)$, $f_2(t)=\varepsilon(t-1)$;　　(2) $f_1(t)=\varepsilon(t)$, $f_2(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$;

(3) $f_1(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$, $f_2(t)=e^{-2t}\varepsilon(t)$;　　(4) $f_1(t)=e^{-t}\varepsilon(t)$, $f_2(t)=\sin t\varepsilon(t)$;

(5) $f_1(t)=\sin\pi t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)]$, $f_2(t)=\delta(t-1)+\delta(t+2)$;

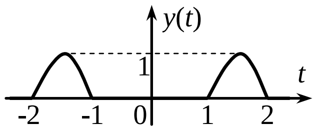
(6) $f_1(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\delta(t-nT)$, $f_2(t)=\sin\frac{\pi}{T}t\,\varepsilon(t)$.

解: (1) $y(t)=(t-1)\varepsilon(t-1)$;

(2) $y(t)=(\int_0^t e^{-\tau}d\tau)\varepsilon(t)=(1-e^{-t})\varepsilon(t)$;

(3) $y(t)=\frac{1}{2-1}(e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$;

(4) $f_2(t)=\frac{1}{2\mathrm{j}}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t})$



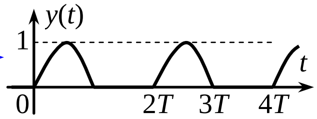
$$\Rightarrow y(t)=\frac{1}{2\mathrm{j}(-\mathrm{j}-1)}(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{\mathrm{j}t})\varepsilon(t)-\frac{1}{2\mathrm{j}(\mathrm{j}-1)}(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t})\varepsilon(t)$$

$$=\frac{2\mathrm{j}\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{j}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t})+(\mathrm{e}^{\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}t})}{4\mathrm{j}}\varepsilon(t)=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t}-\cos t+\sin t)\varepsilon(t);$$

(5) $y(t)=f_1(t-1)+f_1(t+2)$

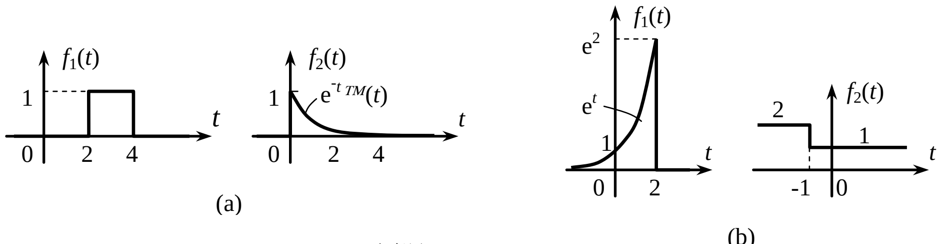
$$=\sin\pi(t-1)[\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)]+\sin\pi t[\varepsilon(t+2)-\varepsilon(t+1)];$$

(6) $y(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}f_2(t-nT)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin\frac{\pi}{T}(t-nT)\varepsilon(t-nT)$



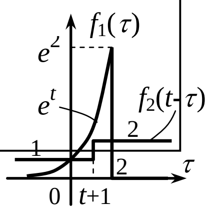
$$=\sin\frac{\pi}{T}t\ \varepsilon(\sin\frac{\pi}{T}t)\varepsilon(t).$$

2-13 求图示各组波形的卷积积分 $y(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 。



图题 2-13

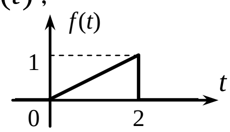
解：



2-14 已知 $f(t)*t\varepsilon(t)=(t+\mathrm{e}^{-t}-1)\varepsilon(t)$，求 $f(t)$ 。

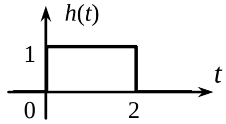
解：微分：$f(t)*\varepsilon(t)=(1-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)+(0+\mathrm{e}^{0}-1)\delta(t)=(1-\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$；

再微分：$f(t)*\delta(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+(1-\mathrm{e}^{0})=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)=f(t)$.



2-15 某 LTI 系统的激励 $f(t)$和冲激响应 $h(t)$如图题 2-15

所示，试求系统的零状态响应 $y_f(t)$，并画出波形。

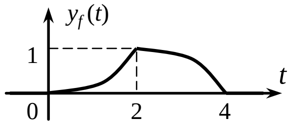


图题 2-15

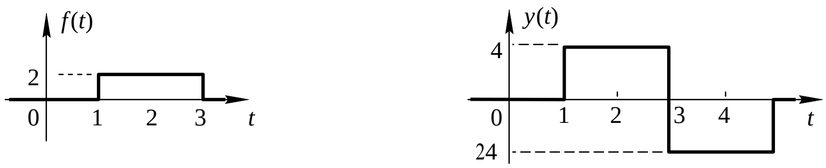
解：$y_f(t)=\left\{\int_{0_-}^{t}\frac{1}{2}\tau[\varepsilon(\tau)-\varepsilon(\tau-2)]d\tau\right\}*\left[\delta(t)-\delta(t-2)\right]$

$=\left\{\frac{1}{4}t^2[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]+\varepsilon(t-2)\right\}*\left[\delta(t)-\delta(t-2)\right]$

$=\frac{1}{4}t^2[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]+\varepsilon(t-2)-\frac{1}{4}(t-2)^2[\varepsilon(t-2)-\varepsilon(t-4)]-\varepsilon(t-4)$



2-16　图题 2-16 表示一个 LTI 系统的输入-输出关系。试求出该系统的冲激响应。



(a) 输入　　(b) 输出

图题 2-16

解：$y(t)=2f(t)-2f(t-2)\Rightarrow h(t)=2\delta(t)-2\delta(t-2)$

2-17　已知某系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2=f'(t)+3f(t)$，$0_-$ 初始条件 $y(0_-)=1$，$y'(0_-)=2$，试求：

(1) 系统的零输入响应 $y_x(t)$；

(2) 激励 $f(t)5$ ™(t)时，系统的零状态响应 $y_f(t)$和全响应 $y(t)$；

(3) 激励 $f(t)5$ e^{23t} ™(t)时，系统的零状态响应 $y_f(t)$和全响应 $y(t)$。

解：(1) 算子方程为：$(p+1)(p+2)y(t)=(p+3)f(t)$

$$\therefore y_x(t)=A_1e^{-t}+A_2e^{-2t}\Rightarrow\begin{cases}1=A_1+A_2\\2=-A_1-2A_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=4\\A_2=-3\end{cases}$$

$$\Rightarrow y_x(t)=4e^{-t}-3e^{-2t},\ t/\ \ 0_-;$$

$$(2)\ H(p)=\frac{p+3}{p^2+3p+2}=\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p+2}\Rightarrow h(t)=(2e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

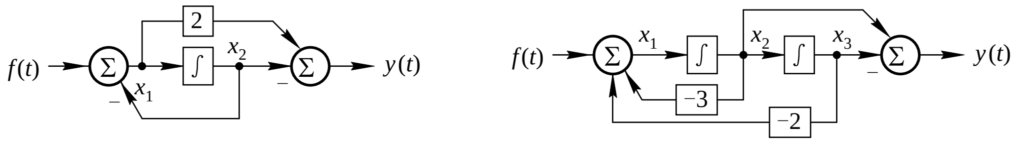
$$y_f(t)=h(t)*\varepsilon(t)=(\frac{3}{2}-2e^{-t}+\frac{1}{2}e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$y(t)=y_x(t)+y_f(t)=(\frac{3}{2}+2e^{-t}-\frac{5}{2}e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$(3)\ y_f(t)=h(t)*e^{-3t}\varepsilon(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)$$

$$y(t)=y_x(t)+y_f(t)=(5e^{-t}-4e^{-2t})\varepsilon(t)$$

2-18　图题 2-18 所示的系统，求当激励 $f(t)5$ e^{2t} ™(t)时，系统的零状态响应。



(a) (b)

图题 2-18

解：(a) 令 $f(t)=\delta(t)$，则 $y(t)=h(t)$，

显然：$x_1 = px_2 = f(t)-x_2$，$h(t)=2x_1-x_2$

$$\Rightarrow h(t)=(\frac{2p}{p+1}-\frac{1}{p+1})\delta(t)=(2-\frac{3}{p+1})\delta(t)=2\delta(t)-3\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

$$y_f(t)=[2\delta(t)-3\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)]*[\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)]=(2-3t)\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

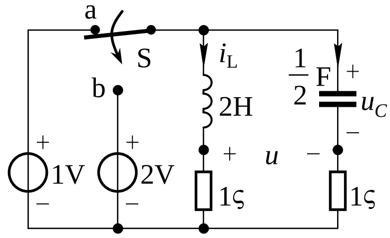
(b) 令 $f(t)=\delta(t)$，则 $y(t)=h(t)$，

显然：$x_1 = px_2 = p^2x_3 = f(t)-3px_3-2x_3$，$h(t)=x_2+x_3=(1+p)x_3$

$$\Rightarrow h(t)=\frac{p+1}{p^2+3p+2}f(t)=\frac{1}{p+2}\delta(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$$

$$y_f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)*[\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)]=(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

2-19 图题 2-19 所示电路，$t<0$ 时 S 在位置 a 且电路已达稳态；$t=0$ 时将 S 从 a 板到 b，求 $t>0$ 时的零输入响应 $u_x(t)$、零状态响应 $u_f(t)$和全响应 $u(t)$。



图题 2-19

解：i）先求零状态响应 $u_f(t)$：

$$H(p)=\frac{1}{2p+1}-\frac{1}{1+\frac{2}{p}}=\frac{0.5}{p+0.5}-\frac{p+2-2}{p+2}=-1+\frac{0.5}{p+0.5}+\frac{2}{p+2}$$

$$h(t)=-\delta(t)+(0.5\mathrm{e}^{-0.5t}+2\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t),$$

$$u_f(t)=\{\int_0^t[-\delta(\tau)+(0.5\mathrm{e}^{-0.5\tau}+2\mathrm{e}^{-2\tau})][1+\varepsilon(t-\tau)]d\tau\}\varepsilon(t)=2(1-\mathrm{e}^{-0.5t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$$

ii）求零输入响应 $u_x(t)$：$u_x(t)=A_1\mathrm{e}^{-0.5t}+A_2\mathrm{e}^{-2t}$

$$u_x(0_+)=1\times1+1=2\mathrm{V},\quad u_{Lx}(0_+)=-1\mathrm{V},\quad i_{Cx}(0_+)=-1\mathrm{A}$$

$$\Rightarrow i_{Lx}'(0_+)=-\frac{1}{2},\quad u_{Cx}'(0_+)=-2\Rightarrow u_x'(0_+)=1\times i_{Lx}'(0_+)+u_{Cx}'(0_+)=-2.5\mathrm{V/s}$$

$$\therefore\begin{cases}2=A_1+A_2\\-2.5=-0.5A_1-2A_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A_1=1\\A_2=1\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}u_x(t)=\mathrm{e}^{-0.5t}+\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{V},\ t/\ \ 0;\quad u(0\_)=1\mathrm{V}\\u(t)=u_x(t)+u_f(t)=1+(1-\mathrm{e}^{-0.5t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t).\end{matrix}$$

2-20 已知某系统的微分方程为 $y''(t)+3y'(t)+2y(t)=f'(t)+3f(t)$，当激励

$f(t)=\mathrm{e}^{-4t}\varepsilon(t)$时，系统的全响应 $y(t)=(\frac{14}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{7}{2}\mathrm{e}^{-2t}-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t})\varepsilon(t)$；试求零输入响应 $y_x(t)$与零状态响应 $y_f(t)$、自由响应与强迫响应、暂态响应与稳态响应。

解：

$$H(p)=\frac{p+3}{p^2+3p+2}=\frac{2}{p+1}-\frac{1}{p+2},\ \ h(t)=(2\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t),$$

$$y_f(t)=\left\{\int_0^t \mathrm{e}^{-4\tau}[2\mathrm{e}^{-(t-\tau)}-2\mathrm{e}^{-2(t-\tau)}]d\tau\right\}\varepsilon(t)=[\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t}(1-\mathrm{e}^{-3t})-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}(1-\mathrm{e}^{-2t})]\varepsilon(t)$$

$$=(-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t) \qquad \text{(零状态响应)}$$

$$\therefore y_x(t)=y(t)-y_f(t)=(4\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t) \qquad \text{(零状态响应)}$$

强迫响应：$-\frac{1}{6}\mathrm{e}^{-4t}\varepsilon(t)$; 自由响应：$(\frac{14}{3}\mathrm{e}^{-t}-\frac{7}{2}\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$;

$y(t)$全为暂态，不含稳态响应.

第三章　连续系统的频域分析习题解答

3-1　已知函数集$\{\sin t, \sin 2t, \cdots \sin nt\}$，$n$ 为正整数。

(1)　证明该函数集在区间(0, 2π)内为正交函数集；

(2)　试问该函数集在区间(0, π!2)内是否为正交函数集？

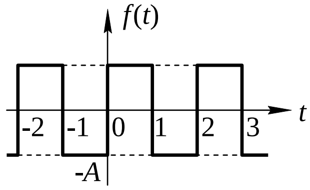
解：(1)证：$\int_0^{2\pi} \sin it \sin rt dt = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin[(i-r)2\pi]}{i-r} - \frac{\sin[(i+r)2\pi]}{i+r}\right\} = \begin{cases} 0, & i \neq r; \\ \pi > 0, & i = r. \end{cases}$

可见满足正交函数集的条件。　　　　　　　　　　　　证毕。

(2)　$i \neq r$时, $\int_0^{\pi/2} \sin it \sin rt dt = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin[(i-r)\frac{\pi}{2}]}{i-r} - \frac{\sin[(i+r)\frac{\pi}{2}]}{i+r}\right\}$ 不恒为 0,

可见在此区间上不是正交函数集。

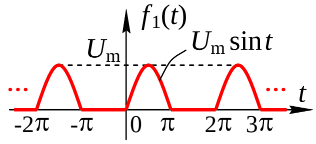
3-2　证明图示矩形脉冲信号 $f(t)$在区间(0, 1)内与 $\cos \pi t$, $\cos 2\pi t$, $\cdots$, $\cos n\pi t$ 正交，n 为正整数。



证：$\because \int_0^1 f(t) \cos n\pi t dt = \int_0^1 A \cos n\pi t dt = \frac{A}{n\pi} \sin n\pi = 0$, n为正整数,

$\therefore$ 在(0,1)内 $f(t)$ 与$\cos \pi t, \cos 2\pi t, \cdots, \cos n\pi t$正交.

3-3　将图示周期信号展开为三角型傅立叶级数。



(a)

解：(a) $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} U_m \sin t \, dt = \frac{U_m}{\pi}$;

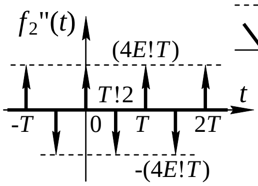
$a_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} U_m \sin t \cos nt \, dt$

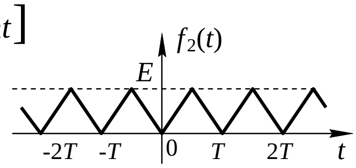
$= \frac{U_m}{2\pi}\int_0^{\pi} [\sin(1+n)t + \sin(1-n)t] \, dt = \begin{cases} \frac{2U_m}{\pi(1-n^2)}, & n = 2, 4, 6, \cdots \\ 0 \quad, & n = 1, 3, 5, \cdots \end{cases}$

$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} U_m \sin t \sin nt \, dt = \begin{cases} \frac{U_m}{2\pi}, & n = 1 \\ 0 \quad, & n \neq 1 \end{cases}$

$\therefore f_1(t) = \frac{U_m}{2\pi}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sin t + \sum_{n=2,4,6,\cdots}^{\infty} \frac{1}{1-n^2} \cos nt\right]$

(b) $f_2(t)$求二阶导数如中图，





(b)

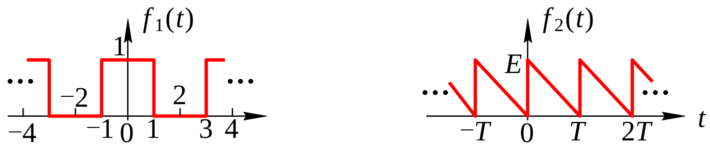
$$(\mathrm{j}n\Omega)^2 F_n = \frac{2}{T}\int_{0_-}^{T_-}\frac{4E}{T}[\delta(t)-\delta(t-\frac{T}{2})]e^{-\mathrm{j}n\Omega t}dt$$

$$= \frac{8E}{T^2}(1-e^{-\mathrm{j}n\Omega\frac{T}{2}}) = \frac{8E}{T^2}(1-e^{-\mathrm{j}n\pi})$$

故$A_n\underline{/\psi_n} = 2F_n = \dfrac{-8E}{n^2(T\Omega)^2}(1-e^{-\mathrm{j}n\pi}) = \dfrac{-8E}{n^2\pi^2}(1-\cos n\pi) = \begin{cases}\dfrac{-4E}{n^2\pi^2}, & n=1,3,\cdots \\ 0 \quad , & n=2,4,\cdots;\end{cases}$

且显然$A_0 = \dfrac{a_0}{2} = \dfrac{E}{2} \quad \Rightarrow f_2(t) = \dfrac{E}{2} - \dfrac{4E}{\pi^2}(\cos\Omega t + \dfrac{1}{3^2}\cos 3\Omega t + \dfrac{1}{5^2}\cos 5\Omega t + \cdots).$

3-4　图题 3-4 所示信号展开为指数型傅里叶级数。



(a)　　　　(b)

解：

(a)$\Omega = \dfrac{2\pi}{4} \Rightarrow F_n = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_{-1}^{1} 1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{\pi}{2}t}\mathrm{d}t = \dfrac{1}{\mathrm{j}\,2n\pi}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{\pi}{2}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\frac{\pi}{2}}) = \dfrac{1}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi}{2} = \dfrac{1}{2}\mathrm{Sa}\,\dfrac{n\pi}{2};$

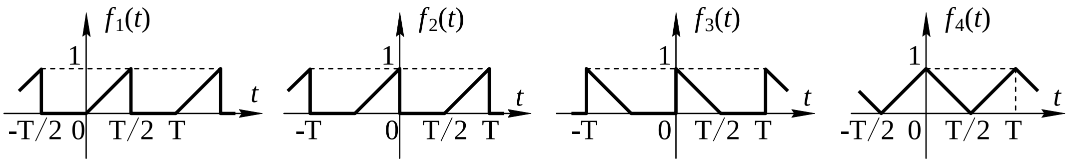
$\therefore\ f_1(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{Sa}\,\dfrac{n\pi}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\frac{\pi}{2}t};$

(b) $F_0 = \dfrac{E}{2}$,　　$F_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T \dfrac{E}{T}(T-t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\mathrm{d}t$

$$= \frac{E}{\mathrm{j}n\Omega T^2}(t-T)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\Big|_0^T - \frac{E}{(n\Omega T)^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\Big|_0^T = \frac{E}{\mathrm{j}2\pi\,n}$$

$$\Rightarrow f_2(t) = \frac{E}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{-\mathrm{j}E}{2\pi\,n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}.$$

3-5 图示四种同周期的信号，(1) 求 $f_1(t)$的三角型傅立叶级数；(2) 利用各波形与 $f_1(t)$的关系求另三个波形的三角型傅立叶级数。



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

解：(1) $\dfrac{a_0}{2} = \dfrac{1}{4}$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\frac{2}{T}t\cos n\Omega t\,dt=\frac{4}{T^2}[t\cdot\frac{\sin n\Omega t}{n\Omega}]_0^{T/2}-\frac{4}{T^2 n\Omega}\int_0^{T/2}\sin n\Omega t\,dt$$

$$=\frac{4}{n^2T^2\Omega^2}(\cos n\pi-1)=\frac{1}{n^2\pi^2}(\cos n\pi-1),$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^{T/2}\frac{2}{T}t\sin n\Omega t\,dt=\frac{4}{T^2}[t\cdot\frac{\cos n\Omega t}{-n\Omega}]_0^{T/2}+\frac{4}{T^2 n\Omega}\int_0^{T/2}\cos n\Omega t\,dt$$

$$=\frac{-2}{2n\pi}\cos n\pi+0=-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi$$

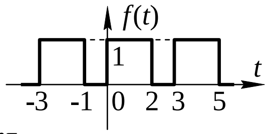
$$\therefore\ f_1(t)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi-1}{(n\pi)^2}\cos n\Omega t-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\pi}\sin n\Omega t\,;$$

(2) $$f_2(t)=f_1(t-\frac{T}{2})=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{(n\pi)^2}\cos n\Omega t-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\pi}\sin n\Omega t\,;$$

(3) $$f_3(t)=f_2(-t)=\frac{1}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{(n\pi)^2}\cos n\Omega t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi}{n\pi}\sin n\Omega t\,;$$

(4) $$f_4(t)=f_2(t)+f_3(t)=\frac{1}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos n\pi}{(n\pi)^2}\cos n\Omega t\,.$$

3-6 试将图示周期方波信号 $f(t)$展开为傅立叶级数，画出其单边和双边振幅频谱图和相位频谱图，并求该信号的占有频带 B_{ϖ} .



解：方法一(按定义计算)

$$F_0=\frac{2}{3},\ F_n=\frac{1}{3}[\int_0^2 e^{-j\frac{2}{3}n\pi t}dt]=\frac{j}{2n\pi}(e^{-j\frac{4}{3}n\pi}-1)=\frac{j}{2n\pi}(e^{j\frac{2}{3}n\pi}-1)$$

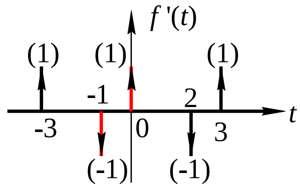
$$=\frac{j}{2n\pi}e^{j\frac{n\pi}{3}}(e^{j\frac{n\pi}{3}}-e^{-j\frac{n\pi}{3}})=-\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}e^{j\frac{n\pi}{3}}=-\frac{1}{3}\mathrm{Sa}(\frac{n\pi}{3})e^{j\frac{n\pi}{3}}.$$

方法二(利用微分性质，通过右图计算，并注意到$\varsigma=2\pi/3$)

$$jn\Omega F_n=\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}[-\delta(t+1)+\delta(t)]e^{-jn\Omega t}dt=-e^{-j\frac{2}{3}n\pi(-1)}+1$$

$$\Rightarrow F_n=\frac{j}{2n\pi}(e^{j\frac{2}{3}n\pi}-1)=\frac{j}{2n\pi}e^{j\frac{n\pi}{3}}(e^{j\frac{n\pi}{3}}-e^{-j\frac{n\pi}{3}})$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{3}e^{j\frac{n\pi}{3}}=-\frac{1}{3}\mathrm{Sa}(\frac{n\pi}{3})e^{j\frac{n\pi}{3}}.$$

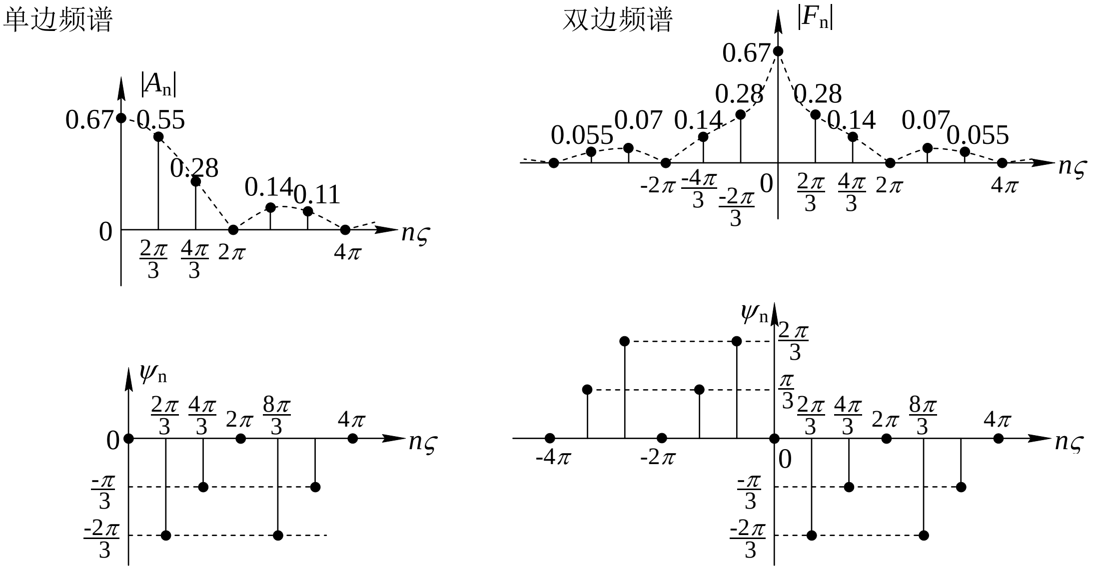


作频谱如下：

$$F_0=\frac{2}{3},\ F_1=0.276\angle-120^\circ,\ F_2=0.138\angle-60^\circ,\ F_3=0,\ F_4=0.069\angle-120^\circ,$$

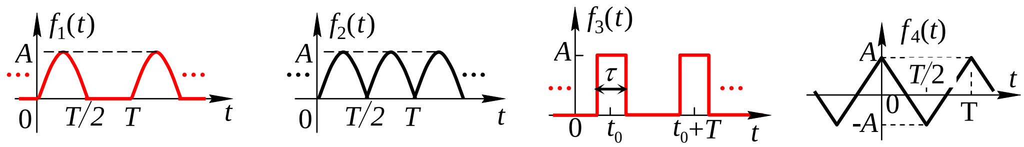
$$F_5=0.055\angle-60^\circ,\ F_6=0,\cdots,\ F_{-1}=0.276\angle120^\circ,\ F_{-2}=0.138\angle60^\circ,\ F_3=0,$$

$$F_{-4}=0.069\angle120^\circ,\ F_{-5}=0.055\angle60^\circ,\ F_{-6}=0,\cdots$$



由图易知：$B_{\varpi}=2\pi$（注意：$\neq 2\pi/\tau$）

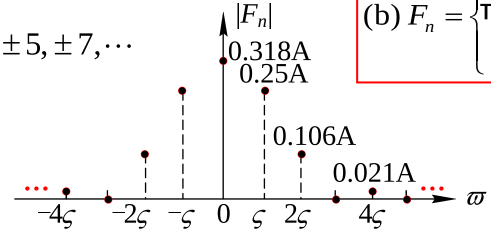
3-7　试求题图 3-7 所示周期信号的指数型傅里叶级数系数 F_n，并画出其幅度频谱。



(a)　(b)　(c)　(d)

解:(a) $F_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^{T/2}\dfrac{A}{j2}(e^{j\Omega t}-e^{-j\Omega t})e^{-jn\Omega t}dt=\dfrac{A}{2T}\left[\dfrac{e^{-j(n-1)\Omega t}}{(n-1)\Omega}-\dfrac{e^{-j(n+1)\Omega t}}{(n+1)\Omega}\right]\Bigg|_0^{T/2}$

$$=\begin{cases}\dfrac{A}{\pi(1-n^2)}, & n=0,\ \pm2,\pm4,\pm6,\cdots\\ 0, & n=\pm3,\pm5,\pm7,\cdots\\ \dfrac{A}{j4}, & n=1\\ -\dfrac{A}{j4}, & n=-1\end{cases}$$



(b) $F_n=\begin{cases}\dfrac{2A}{\pi(1-n^2)}, & n=\text{偶数}\\ 0, & n=\text{奇数}\end{cases}$

(c) $F_n=\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0-\tau/2}^{t_0+\tau/2}Ae^{-jn\Omega t}dt=\dfrac{A}{T(jn\Omega)}e^{-jn\Omega t_0}[e^{jn\Omega\tau/2}-e^{-jn\Omega\tau/2}]$

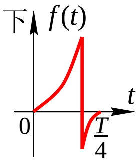
$$=\frac{A\tau}{T}e^{-jn\Omega t_0}\frac{1}{n\Omega\tau/2}\{\frac{1}{2j}[e^{jn\Omega\tau/2}-e^{-jn\Omega\tau/2}]\}=\frac{A\tau}{T}e^{-jn\Omega t_0}\frac{\sin(n\Omega\tau/2)}{n\Omega\tau/2}$$

$$=\frac{A\tau}{T}e^{-jn\Omega t_0}Sa(n\Omega\tau/2)=\frac{A\tau}{T}Sa(n\pi f_0\tau)e^{-j2n\pi f_0t_0},\quad f_0=1/T$$

由于未知数太多，无法画出其幅度频谱。

(d) $F_n=\begin{cases}\dfrac{4}{\pi^2n^2}, & n=\text{奇数}\\ 0, & n=\text{偶数}\end{cases}$

3-8 已知周期函数 $f(t)$前四分之一周期的波形如图题 3-9 所示。根据下列各情况的要求，画出 $f(t)$在一个周期$(0<t<T)$的波形。



(1) $f(t)$是偶函数，只含有偶次谐波；

(2) $f(t)$是偶函数，只含有奇次谐波；

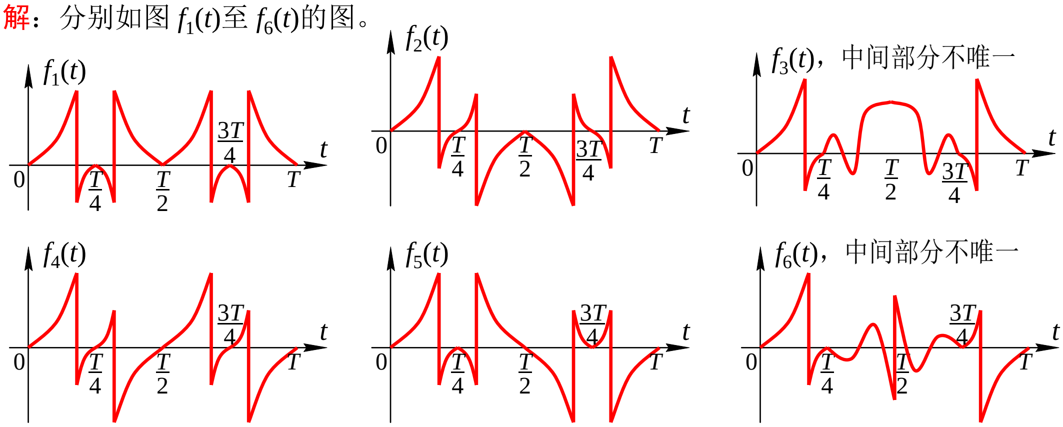
(3) $f(t)$是偶函数，含有偶次和奇次谐波；

(4) $f(t)$是奇函数，只含有偶次谐波；

(5) $f(t)$是奇函数，只含有奇次谐波；

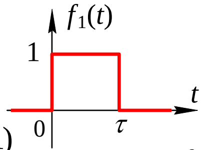
(6) $f(t)$是奇函数，含有偶次和奇次谐波；

解：分别如图 $f_1(t)$至 $f_6(t)$的图。



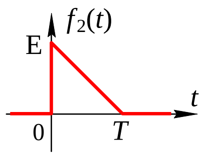
3-9 求图题 3-9 所示各信号的傅里叶变换。

解：



(a)

(a) $f_1(t)=G_\tau(t-\frac{\tau}{2})\leftrightarrow 1\cdot\tau\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}=\frac{\mathrm{j}}{\omega}(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}-1)$



(b)

(b) $f_2(t)=E\varepsilon(t)-\frac{E}{T}t\varepsilon(t)+\frac{E}{T}(t-T)\varepsilon(t-T)$

$\therefore F_2(\mathrm{j}\omega)=E[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}]-\mathrm{j}\frac{E}{T}[\pi\delta'(\omega)+\frac{\mathrm{j}}{\omega^2}](1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T})$

$=E\pi\delta(\omega)+\frac{E}{\mathrm{j}\omega}-\mathrm{j}\frac{E\pi}{T}(1-\mathrm{e}^0)\delta'(\omega)+\mathrm{j}\frac{E\pi}{T}\mathrm{j}T\mathrm{e}^0\delta(\omega)+\frac{E}{\omega^2T}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T})$

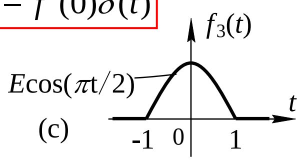
$=\frac{E}{\omega^2T}(1-\mathrm{j}\omega T-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T})$

注意到：

$f(t)\delta'(t)=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$

方法二：$f_2'(t)=E\delta(t)-\frac{E}{T}\varepsilon(t)+\frac{E}{T}\varepsilon(t-T)$;

$f_2''(t)=E\delta'(t)-\frac{E}{T}\delta(t)+\frac{E}{T}\delta(t-T)$



$(\mathrm{j}\omega)^2F_2(\mathrm{j}\omega)=E(\mathrm{j}\omega)-\frac{E}{T}(1-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T})\Rightarrow F_2(\mathrm{j}\omega)=\frac{E}{\omega^2T}(1-\mathrm{j}\omega T-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega T})$

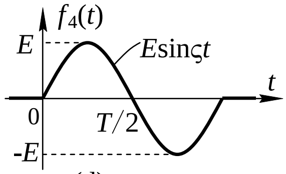
(c) $f_3(t)=EG_1(t)\cdot\cos\frac{\pi}{2}t$，且 $f(t)\cos\Omega t\leftrightarrow\frac{1}{2}F[\mathrm{j}(\omega+\Omega)]+\frac{1}{2}F[\mathrm{j}(\omega-\Omega)]$

$\therefore F_3(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{2}\Big[E\cdot\mathrm{Sa}\Big(\frac{\omega+\frac{\pi}{2}}{2}\Big)+E\cdot\mathrm{Sa}\Big(\frac{\omega-\frac{\pi}{2}}{2}\Big)\Big]$ 可以化简得 $\frac{E\pi\cos\omega}{(\frac{\pi}{2})^2-\omega^2}$

(d) $f_4(t)=EG_T(t-\frac{T}{2})\cdot\sin\Omega t$，且 $f(t)\sin\Omega t\leftrightarrow\frac{\mathrm{j}}{2}F[\mathrm{j}(\omega+\Omega)]-\frac{\mathrm{j}}{2}F[\mathrm{j}(\omega-\Omega)]$

$\therefore F_4(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{\mathrm{j}}{2}\left\{ET\cdot\mathrm{Sa}\left[\frac{T(\omega+\Omega)}{2}\right]e^{-\mathrm{j}\frac{T}{2}(\omega+\Omega)}-ET\cdot\mathrm{Sa}\left[\frac{T(\omega-\Omega)}{2}\right]e^{-\mathrm{j}\frac{T}{2}(\omega-\Omega)}\right\}$

可以化简得 $\frac{\mathrm{j}2E\,\Omega}{\Omega^2-\omega^2}\sin\frac{\omega T}{2}e^{-\mathrm{j}\frac{\omega T}{2}}$



(d)

3-10 试求下列信号的频谱函数。

(1) $f_1(t)=\varepsilon(-t)$；(2) $f_2(t)=e^t\varepsilon(-t)$；(3) $f_3(t)=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(-t)$；

(4) $f_4(t)=e^{\mathrm{j}2t}\varepsilon(t)$；(5) $f_5(t)=\varepsilon(t-3)$；(6) $f_6(t)=e^{-|t|}\cos t$.

解：(1) $F_1(\mathrm{j}\,\omega)=\pi\delta(-\omega)-\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}=\pi\delta(\omega)-\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}$；

(2) $\because f(t)=e^{-t}\varepsilon(t)\leftrightarrow F(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega}$，$\therefore F_2(\mathrm{j}\,\omega)=F(-\mathrm{j}\,\omega)=\frac{1}{1-\mathrm{j}\,\omega}$；

(3) $F_3(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{-\mathrm{j}\,\omega}\right)=\mathrm{j}\frac{1}{\omega}$；　　(4) $F_4(\mathrm{j}\,\omega)=\pi\delta(\omega-2)+\frac{1}{j(\omega-2)}$；

(5) $F_5(\mathrm{j}\,\omega)=[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}]e^{-\mathrm{j}3\omega}=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}e^{-\mathrm{j}3\omega}$；

(6) $\because e^{-|t|}\leftrightarrow\frac{2\times1}{1^2+\omega^2}$，$f(t)\cdot\cos\Omega t\leftrightarrow\frac{1}{2}F[\mathrm{j}(\omega+\Omega)]+\frac{1}{2}F[\mathrm{j}(\omega-\Omega)]$

$\therefore F_6(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{1}{1+(\omega+1)^2}+\frac{1}{1+(\omega-1)^2}=\frac{2(\omega^2+2)}{\omega^4+4}$.

3-11 利用傅里叶变换的对称性求下列信号的频谱函数。

(1) $f_1(t)=\frac{\sin2\pi(t-2)}{\pi(t-2)}$；(2) $f_2(t)=\frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}(\alpha>0)$；(3) $f_3(t)=\left(\frac{\sin2\pi t}{2\pi t}\right)^2$.

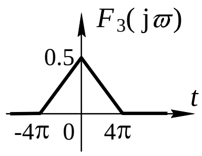
解：(1) $\because G_{4\pi}(t)\leftrightarrow4\pi\,\mathrm{Sa}(2\pi\,\omega)$

$\therefore 4\pi\times\frac{\sin2\pi t}{2\pi t}\leftrightarrow2\pi G_{4\pi}(-\omega)\Rightarrow\frac{\sin2\pi(t-2)}{\pi(t-2)}\leftrightarrow G_{4\pi}(\omega)e^{-\mathrm{j}2\omega}$；

(2) $\alpha>0$时，$\because e^{-\alpha|t|}\leftrightarrow\frac{2\alpha}{\alpha^2+\omega^2}\Rightarrow\frac{2\alpha}{\alpha^2+t^2}\leftrightarrow2\pi e^{-\alpha|-\omega|}=2\pi e^{-\alpha|\omega|}$.

(3) 三角脉冲 $f_{4\pi}(t)=\begin{cases}1-|t|/(4\pi), & |t|\le4\pi\\ 0\quad, & |t|>4\pi\end{cases}\leftrightarrow4\pi\left(\frac{\sin2\pi\,\omega}{2\pi\,\omega}\right)^2$

$\left(\frac{\sin2\pi t}{2\pi t}\right)^2\leftrightarrow\frac{1}{2}f_{4\pi}(-\omega)=\begin{cases}0.5-|\omega|/(8\pi), & |\omega|\le4\pi\\ 0\quad, & |\omega|>4\pi\end{cases}$



3-12 已知信号 $f(t)$的频谱函数 $F(\mathrm{j}\varpi)$如下，求信号 $f(t)$的表达式。

(1) $F(\mathrm{j}\,\omega)=\delta(\omega-\omega_0)$；　　(2) $F(\mathrm{j}\,\omega)=\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)$；

(3) $F(\mathrm{j}\,\omega)=\varepsilon(\omega+\omega_0)-\varepsilon(\omega-\omega_0)$；　　(4) $F(\mathrm{j}\,\omega)=\begin{cases}\frac{\omega_0}{\pi}, & |\omega|\le\omega_0;\\ 0\ , & |\omega|>\omega_0.\end{cases}$

解：(1) $\because \delta(t)\longleftrightarrow 1$， $\therefore 1\longleftrightarrow 2\pi\delta(-\varpi) = 2\pi\delta(\varpi)$，

(2) $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}(e^{-\mathrm{j}\,\omega_0 t}-e^{\mathrm{j}\,\omega_0 t})=\dfrac{1}{j\pi}\sin\omega_0 t$；

(3) $\dfrac{1}{2\pi}[\pi\delta(t)+\dfrac{1}{\mathrm{j}t}]\leftrightarrow\varepsilon(-\omega)\quad\Rightarrow\quad\dfrac{1}{2}\delta(t)-\dfrac{1}{\mathrm{j}2\pi t}\leftrightarrow\varepsilon(\omega)$

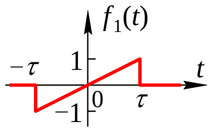
$$\Rightarrow\ f(t)=[\frac{\delta(t)}{2}-\frac{1}{\mathrm{j}2\pi t}](e^{-\mathrm{j}\,\omega_0 t}-e^{\mathrm{j}\,\omega_0 t})=\frac{1}{\pi t}\sin\omega_0 t=\frac{\omega_0}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_0 t);$$

方法二：$\because G_{2\omega_0}(t)\longleftrightarrow 2\omega_0\,\mathrm{Sa}\left(\dfrac{\omega 2\omega_0}{2}\right)=2\omega_0\,\mathrm{Sa}(\omega\ \omega_0)$

$$\therefore 2\omega_0\,\mathrm{Sa}(t\,\omega_0)\leftrightarrow 2\pi\,G_{2\omega_0}(\omega)\ \Rightarrow\ f(t)=\frac{\omega_0}{\pi}\mathrm{Sa}(\omega_0 t)\leftrightarrow G_{2\omega_0}(\omega)=F(\mathrm{j}\,\omega);$$

(4) $F(\mathrm{j}\,\omega)=\dfrac{\omega_0}{\pi}G_{2\omega_0}(\omega)\leftrightarrow\dfrac{1}{2\pi}\cdot\dfrac{\omega_0}{\pi}\cdot 2\omega_0\mathrm{Sa}(\omega_0 t)=\left(\dfrac{\omega_0}{\pi}\right)^2\mathrm{Sa}(\omega_0 t)$.

3-13 利用傅里叶变换的微积分性质求图示信号的频谱。



(a)

解：(a) $f_1(t)=\dfrac{1}{\tau}t[\varepsilon(t+\tau)-\varepsilon(t-\tau)]$

$$f_1'(t)=-\delta(t+\tau)-\delta(t-\tau)+\frac{1}{\tau}G_{2\tau}(t)$$

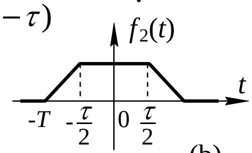
$$\Rightarrow \mathrm{j}\,\omega F_1(\mathrm{j}\,\omega)=-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\,\omega\tau}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega\tau}+\frac{1}{\tau}\times 2\tau\,\mathrm{Sa}(\frac{\omega 2\tau}{2})=-2\cos(\omega\tau)+2\mathrm{Sa}(\omega\tau)$$

$$\therefore\ F_1(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{2\mathrm{j}}{\omega}[\cos(\omega\tau)-\mathrm{Sa}(\omega\tau)]$$

(b) $f_2''(t)=\dfrac{E}{T-\frac{\tau}{2}}[\delta'(t+T)-\delta'(t+\frac{\tau}{2})-\delta(t-\frac{\tau}{2})+\delta(t-T)]$

$$\therefore F_2(j\,\omega)=\frac{2E(e^{\mathrm{j}\,\omega T}+e^{-\mathrm{j}\,\omega T}-e^{j\,\omega\frac{\tau}{2}}-e^{-\mathrm{j}\,\omega\frac{\tau}{2}})}{(\mathrm{j}\,\omega)^2(2T-\tau)}=\frac{4E[\cos\frac{\omega\tau}{2}-\cos(\omega T)]}{\omega^2(2T-\tau)}.$$

$$=\frac{8E}{\omega^2(2T-\tau)}\sin(\frac{\omega T}{2}+\frac{\omega\tau}{4})\sin(\frac{\omega T}{2}-\frac{\omega\tau}{4})$$



(b)

3-14 求下列函数的傅里叶反变换。(1) $\dfrac{1}{(2+\mathrm{j}\,\omega)^2}$； (2) $-\dfrac{1}{\omega^2}$； (3) $G_{2\omega_0}(\omega)$.

解：(a) $\dfrac{1}{(2+\mathrm{j}\,\omega)^2}\leftrightarrow t\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$； (b) $-\dfrac{1}{\omega^2}\leftrightarrow t\,sgn(t)$； (3)

3-12 题(2)

3-15 已知 $f(t)*f'(t)5(12t)\mathrm{e}^{-t}$ ™(t)，求信号 $f(t)$。

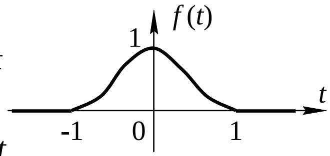
解：等式两边取傅里叶变换并利用时域微分性质与时域卷积性质得：

$$\mathrm{j}\,\omega F^2(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega}-\frac{1}{(1+\mathrm{j}\,\omega)^2}=\frac{\mathrm{j}\,\omega}{(1+\mathrm{j}\,\omega)^2}\Rightarrow F(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega}\Rightarrow f(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$$

3-16 图示余弦脉冲信号 $f(t)=\begin{cases}0.5(1+\cos\pi t), & |t|<1\\ 0 & ,|t|>1\end{cases}$，试用下列方法分别求频谱函数 $F(j\varpi)$：

(1) 利用傅立叶变换的定义； (2) 利用微分特性；

(3) $f(t)=G_2(t)(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\pi t)$，利用线性和频域卷积性质。



解：(1) $F(j\,\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\,\omega t}dt=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(1+\cos\pi t)e^{-j\,\omega t}dt$

$$=[\frac{-1}{j2\omega}(1+\cos\pi t)e^{-j\,\omega t}]_{-1}^{1}-\frac{\pi}{j2\omega}\int_{-1}^{1}\sin\pi t e^{-j\,\omega t}dt$$

$$=[\frac{\pi}{-2\omega^2}\sin\pi t e^{-j\,\omega t}]_{-1}^{1}+\frac{\pi^2}{\omega^2}\int_{-1}^{1}(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\pi t)e^{-j\,\omega t}dt$$

$$=\frac{\pi^2}{\omega^2}[F(j\,\omega)-\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}e^{-j\,\omega t}dt]=\frac{\pi^2}{\omega^2}[F(j\,\omega)-\frac{\sin\omega}{\omega}]$$

$$\Rightarrow F(j\,\omega)=\frac{\pi^2\sin\omega}{\omega(\pi^2-\omega^2)}$$

(2) $f'(t)=\begin{cases}-0.5\pi\sin\pi t, & |t|<1\\ 0 & ,|t|>1\end{cases}$; $\quad f''(t)=\begin{cases}-0.5\pi^2\cos\pi t, & |t|<1\\ 0 & ,|t|>1\end{cases}$;

$$\therefore f''(t)=-\pi^2 f(t)+\frac{\pi^2}{2}G_2(t)\leftrightarrow(j\,\omega)^2F(j\,\omega)=-\pi^2F(j\,\omega)+\frac{\pi^2}{2}\cdot 2Sa(\omega)$$

$$\Rightarrow F(j\,\omega)=\frac{\pi^2\sin\omega}{\omega(\pi^2-\omega^2)}$$

(3) $F(j\,\omega)=\frac{1}{2\pi}[2Sa(\omega)]*\left\{\pi\delta(\omega)+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\pi)+\delta(\omega-\pi)]\right\}$

$$=Sa(\omega)+\frac{1}{2}Sa(\omega+\pi)+\frac{1}{2}Sa(\omega-\pi)$$

$$=\frac{\sin\omega}{\omega}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\omega+\pi)}{\omega+\pi}+\frac{1}{2}\frac{\sin(\omega-\pi)}{\omega-\pi}=\frac{\pi^2\sin\omega}{\omega(\pi^2-\omega^2)}$$

3-17 利用频域卷积定理求下列信号的频谱函数。

(1) $\cos\omega_0 t\,\varepsilon(t)$， (2) $\sin\omega_0 t\,\varepsilon(t)$.

解： (1) $F(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{1}{2\pi}\left\{\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]\right\}*[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}]$

$$=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]+\frac{1}{2\mathrm{j}}[\frac{1}{\omega+\omega_0}+\frac{1}{\omega-\omega_0}]$$

$$=\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]+\frac{\mathrm{j}\,\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$$

$$(2)\ F(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{1}{2\pi}\left\{\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]\right\}*[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}]$$

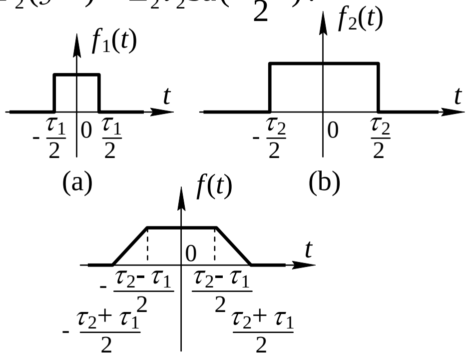
$$=\frac{\pi}{2\mathrm{j}}[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$$

3-18 已知图示两门函数：

$$f_1(t)\leftrightarrow F_1(j\,\omega)=E_1\tau_1\mathrm{Sa}(\frac{\omega\,\tau_1}{2}),\ \ f_2(t)\leftrightarrow F_2(j\,\omega)=E_2\tau_2\mathrm{Sa}(\frac{\omega\,\tau_2}{2}).$$

(1) 画出 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 的图形；

(2) 求 $f(t)=f_1(t)*f_2(t)$ 的频谱函数 $F(\mathrm{j}\varpi)$，并与题 3-13(b)的方法比较。



解： (1) 利用微分积分性质得：

$$f(t)=f_1{}'(t)*\int_{-\infty}^{t}f_2(\tau)d\tau$$

$$=E_1[\delta(t+\frac{\tau_1}{2})-\delta(t-\frac{\tau_1}{2})]*E_2[(t+\frac{\tau_2}{2})\varepsilon(t+\frac{\tau_2}{2})-(t-\frac{\tau_2}{2})\varepsilon(t-\frac{\tau_2}{2})]$$

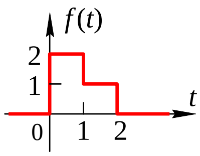
$$=E_1E_2\Big[(t+\frac{\tau_1}{2}+\frac{\tau_2}{2})\varepsilon(t+\frac{\tau_1}{2}+\frac{\tau_2}{2})-(t+\frac{\tau_1}{2}-\frac{\tau_2}{2})\varepsilon(t+\frac{\tau_1}{2}-\frac{\tau_2}{2})-$$

$$-(t-\frac{\tau_1}{2}+\frac{\tau_2}{2})\varepsilon(t-\frac{\tau_1}{2}+\frac{\tau_2}{2})+(t-\frac{\tau_1}{2}-\frac{\tau_2}{2})\varepsilon(t-\frac{\tau_1}{2}-\frac{\tau_2}{2})\Big]$$

$$(2)\ F(j\,\omega)=F_1(j\,\omega)F_2(j\,\omega)=E_1E_2\tau_1\tau_2\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau_1}{2})\mathrm{Sa}(\frac{\omega\tau_2}{2})$$

比较：其方法与题 3-13(b)的方法相类同。

3-19 试求图示信号的频谱函数。



解： 方法一： $f(t)=2\varepsilon(t)-\varepsilon(t-1)-\varepsilon(t-2)$

$$\therefore F(\mathrm{j}\,\omega)=[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}](2-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega})=\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}(2-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega}-\mathrm{e}^{-\mathrm{j}2\omega})$$

方法二： $f(t)=2G_1(t-0.5)+G_1(t-1.5)$

$$\therefore F(\mathrm{j}\,\omega)=\mathrm{Sa}(\frac{\omega}{2})(2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5\omega}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}1.5\omega})=\mathrm{Sa}(\frac{\omega}{2})\mathrm{e}^{-\mathrm{j}0.5\omega}(2+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega})$$

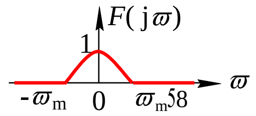
3-20 设 $f(t)$为限带信号，频带宽度为ϖ_{m}，其频谱 $F(\mathrm{j}\varpi)$如图所示。

(3) 求 $f(2t)$、$f(0.5t)$的奈奎斯特抽样频率 f_{N} 和奈奎斯特间隔 T_{N}；

(4) 用抽样序列 $\delta_{T_N}(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_N)$ 对信号进行抽样，得抽样信号 $f_s(t)$，求 $f_s(t)$的

频谱 $F_s(\mathrm{j}\varpi)$，画出频谱图；

(5) 若用同一个$\delta_{T_N}(t)$对$f(2t)$、$f(0.5t)$分别进行抽样，试画出两个抽样信号$f_s(2t)$、$f_s(0.5t)$的频谱图。

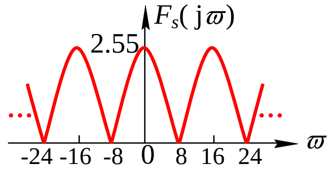


解： (1) $f(2t)$：$f(2t)\Leftrightarrow 0.5F(\mathrm{j}0.5\varpi)$ (频域被展宽一倍)

$\Longrightarrow$ $\varpi_m'52\varpi_m516 \Rightarrow f_N52\,f_m'\,516/\pi$，$T_N5\pi/16$；

$f(0.5t)$：$f(0.5t)\Leftrightarrow 2F(\mathrm{j}2\varpi)$ (频域被压缩一倍)

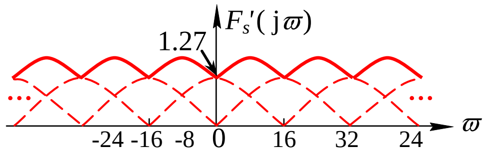
$\Longrightarrow$ $\varpi_m''50.5\varpi_m54 \Rightarrow f_N52\,f_m''54/\pi$，$T_N5\pi/4$；

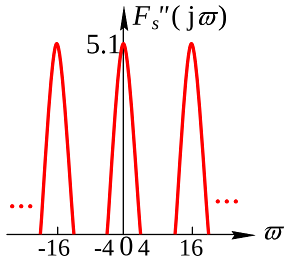


(2) $\omega_s=2\omega_m=16,$

$$F_s(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{T_N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[\mathrm{j}(\omega-n\omega_s)]=\frac{8}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F[\mathrm{j}(\omega-16n)]$$

(3) 见右图。





3-21 若下列各信号被抽样，求奈奎斯特间隔和奈奎斯特频率。

(1) $\mathrm{Sa}(100t)$;　　(3) $\mathrm{Sa}(50t)$.

解： (1) $\mathrm{Sa}(100t)\leftrightarrow \frac{\pi}{100}G_{200}(\omega),\ \omega_m=100\Rightarrow T_N=\frac{1}{2f_m}=\frac{2\pi}{200}=\frac{\pi}{100}$，$f_N=\frac{100}{\pi}$；

(3) $\mathrm{Sa}(50t)\leftrightarrow \frac{\pi}{50}G_{100}(\omega),\ \omega_m=50\Rightarrow T_N=\frac{1}{2f_m}=\frac{2\pi}{100}=\frac{\pi}{50}$，$f_N=\frac{50}{\pi}$.

3-22 对 $f_1(t)=\cos 100\pi t$ 和 $f_2(t)=\cos 700\pi t$ 两个信号均按周期 $T_S=(1/400)\mathrm{s}$ 抽样。试问哪个信号可不失真恢复成原信号？并画出均匀冲激抽样信号 $f_S(t)$的波形及其频谱图。

解： $\frac{1}{2f_1}=\frac{1}{100}>T_S$，$f_1(t)$可恢复；而$\frac{1}{2f_2}=\frac{1}{700}<T_S$，$f_2(t)$不可恢复.

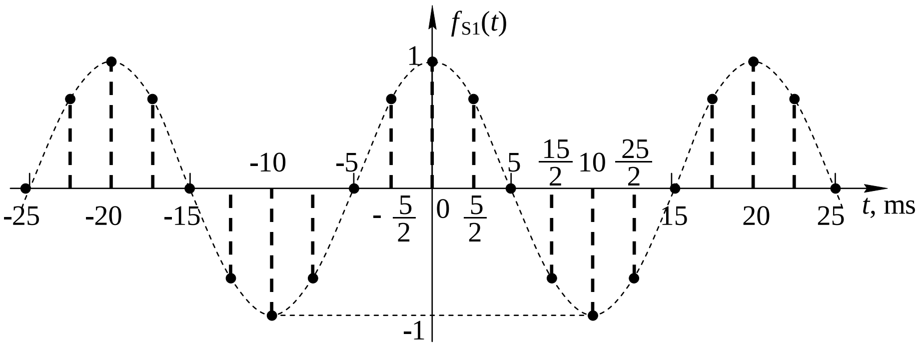
$f_{s1}(t)=f_1(t)\delta_{T_S}(t)$

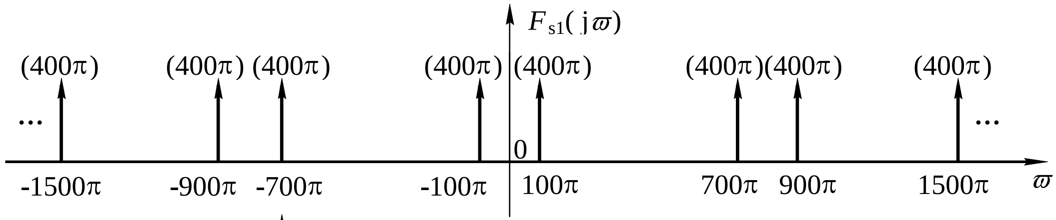
$$\Rightarrow F_{s1}(\mathrm{j}\omega)=\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_1[\mathrm{j}(\omega-800\pi n)]$$

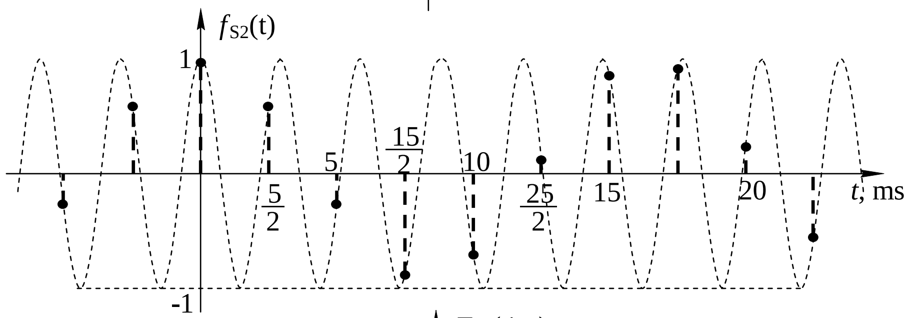
$$=400\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega+100\pi-800\pi n)+\delta(\omega-100\pi-800\pi n)]$$

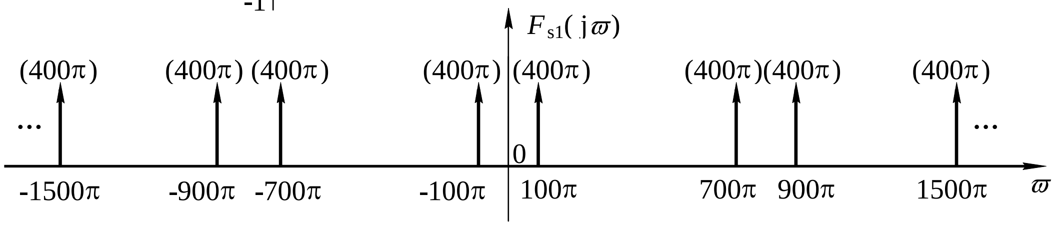
同理，$F_{s2}(\mathrm{j}\omega)=400\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\delta(\omega+700\pi-800\pi n)+\delta(\omega-700\pi-800\pi n)]$.

其波形及频谱图如下：







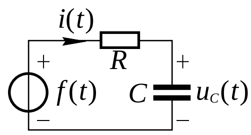


3-23 已知一系统由两个相同的子系统级联构成，子系统的冲激响应为 $h_1(t)=h_2(t)=1/(\pi t)$，激励信号为 $f(t)$。试证明系统的响应 $y(t)=2f(t)$。

证明：$\mathrm{sgn}(t)\longleftrightarrow\dfrac{2}{\mathrm{j}\,\omega}\ \Rightarrow\ \dfrac{1}{\pi t}\longleftrightarrow 2\mathrm{j}\,\mathrm{sgn}(\varpi)\Rightarrow\ H(\mathrm{j}\,\omega)=-\mathrm{sgn}^2(\omega)=-1$

$\Rightarrow\ Y(\mathrm{j}\,\omega)=H(\mathrm{j}\,\omega)F(\mathrm{j}\,\omega)=-F(\mathrm{j}\,\omega)\ \Rightarrow\ y(t)=2f(t)$ 证毕。

3-24 求图示电路的频域系统函数：$H_1(\mathrm{j}\,\omega)=\dfrac{U_C(\mathrm{j}\,\omega)}{F(\mathrm{j}\,\omega)}$、$H_2(\mathrm{j}\,\omega)=\dfrac{I(\mathrm{j}\,\omega)}{F(\mathrm{j}\,\omega)}$ 及相应的单位冲激响应 $h_1(t)$ 与 $h_2(t)$。

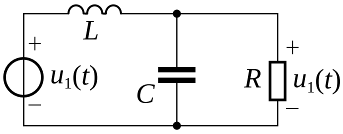


解：$H_1(\mathrm{j}\,\omega)=\dfrac{1/(\mathrm{j}\,\omega C)}{R+[1/(\mathrm{j}\,\omega C)]}=\dfrac{1}{1+\mathrm{j}\,\omega CR}=\dfrac{1/(RC)}{\mathrm{j}\,\omega+1/(RC)}$

$H_2(\mathrm{j}\,\omega)=\dfrac{1}{R+[1/(\mathrm{j}\,\omega C)]}=\dfrac{\mathrm{j}\,\omega}{\mathrm{j}\,\omega+1/(RC)}=\dfrac{1}{R}-\dfrac{1/(R^2C)}{\mathrm{j}\,\omega+1/(RC)}$

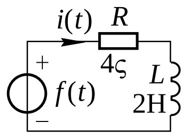
$$\Rightarrow\ h_1(t)=\frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t),\qquad h_2(t)=\frac{1}{R}\delta(t)-\frac{1}{R^2C}\mathrm{e}^{-\frac{1}{RC}t}\varepsilon(t).$$

3-25 求图示电路的频域系统函数 $H(\mathrm{j}\,\omega)=\dfrac{U_2(\mathrm{j}\,\omega)}{U_1(\mathrm{j}\,\omega)}$。



解： $$H(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{\dfrac{R}{1+\mathrm{j}\,\omega RC}}{\mathrm{j}\,\omega L+\dfrac{R}{1+\mathrm{j}\,\omega RC}}=\frac{1}{1-\omega^2LC+\mathrm{j}\,\omega\dfrac{L}{R}}$$

3-26 图示电路，$f(t)=10\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)+2\varepsilon(t)$。求关于 $i(t)$ 的单位冲激响应 $h(t)$ 和零状态响应 $i(t)$。



解： $$H(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{1}{R+\mathrm{j}\,\omega L}=\frac{1}{4+\mathrm{j}2\omega}=\frac{1/2}{\mathrm{j}\,\omega+2}\Rightarrow h(t)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$$

$$I(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{1/2}{\mathrm{j}\,\omega+2}\Big[\frac{10}{\mathrm{j}\,\omega+1}+\frac{2}{\mathrm{j}\,\omega}+2\pi\delta(\omega)\Big]$$

$$=\frac{1/2}{\mathrm{j}\,\omega}+\frac{1}{2}\delta(\omega)+\frac{5}{\mathrm{j}\,\omega+1}-\frac{11/2}{\mathrm{j}\,\omega+2}\ \Rightarrow\ i(t)=(\frac{1}{2}+5\mathrm{e}^{-t}-\frac{11}{2}\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)$$

3-27 已知某系统的频域系统函数为 $H(\mathrm{j}\,\omega)=\dfrac{1-\mathrm{j}\,\omega}{1+\mathrm{j}\,\omega}$，试求：

(1) 单位阶跃响应 $g(t)$；(2) 激励 $f(t)=\mathrm{e}^{-2t}\varepsilon(t)$ 的零状态响应 $y_f(t)$。

解： (1)方法一：$h(t)=\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{1-\mathrm{j}\,\omega}{1+\mathrm{j}\,\omega}]=\mathcal{F}^{-1}[\dfrac{2}{1+\mathrm{j}\,\omega}-1]=2\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)-\delta(t)$

$$\Rightarrow g(t)=\int_{-\infty}^{t}h(\tau)d\tau=(1-2\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t);$$

方法二：$G(\mathrm{j}\,\omega)=\dfrac{1-\mathrm{j}\,\omega}{1+\mathrm{j}\,\omega}[\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega}]=\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega}-\dfrac{2}{1+\mathrm{j}\,\omega}$

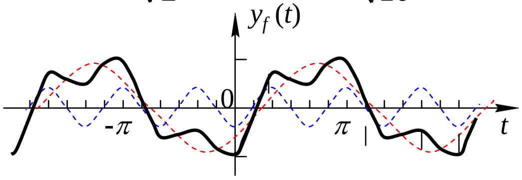
$$\Rightarrow g(t)=(1-2\mathrm{e}^{-t})\varepsilon(t)\ ;$$

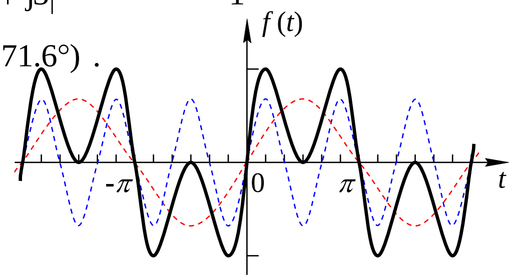
(2) $$Y_f(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{1-\mathrm{j}\,\omega}{1+\mathrm{j}\,\omega}\times\frac{1}{2+\mathrm{j}\,\omega}=\frac{2}{1+\mathrm{j}\,\omega}-\frac{3}{2+\mathrm{j}\,\omega}\Rightarrow y_f(t)=(2\mathrm{e}^{-t}-3\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t).$$

3-28 设 $H(\mathrm{j}\,\omega)=\dfrac{1}{1+j\,\omega}$，$f(t)=\sin t+\sin 3t$，求 $y_{\mathrm f}(t)$，并绘 $f(t)$ 与 $y_{\mathrm f}(t)$ 的波形。

解： $$y_{\mathrm f}(t)=1\times\left|\frac{1}{1+\mathrm{j}1}\right|\sin(t-\mathrm{arctg}\frac{1}{1})+1\times\left|\frac{1}{1+\mathrm{j}3}\right|\sin(3t-\mathrm{arctg}\frac{3}{1})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t-45°)+\frac{1}{\sqrt{10}}\sin(3t-71.6°)\ .$$





3-29 已知系统的频域系统函数为$H(\mathrm{j}\,\omega)=\dfrac{\mathrm{j}\,\omega}{-\omega^2+\mathrm{j}5\omega+6}$，系统的初始状态为$y(0_-)=2$，$y'(0_-)=1$，激励 $f(t)=\mathrm{e}^{-t}\varepsilon(t)$。求全响应 $y(t)$。

解： $Y_f(\mathrm{j}\,\omega)=\dfrac{\mathrm{j}\,\omega}{(\mathrm{j}\,\omega+2)(\mathrm{j}\,\omega+3)}\left(\dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega+1}\right)=\dfrac{-0.5}{\mathrm{j}\,\omega+1}+\dfrac{2}{\mathrm{j}\,\omega+2}-\dfrac{1.5}{\mathrm{j}\,\omega+3}$

$$y_f(t)=(2\mathrm{e}^{-2t}-0.5\mathrm{e}^{-t}-1.5\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$$

$$\lambda_1=-2,\ \lambda_2=-3\Rightarrow y_x(t)=C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{-3t}\Rightarrow\begin{cases}2=C_1+C_2\\1=-2C_1-3C_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=7\\C_2=-5\end{cases}$$

$$\Rightarrow y_x(t)=7\mathrm{e}^{-2t}-5\mathrm{e}^{-3t},\ t\geq 0$$

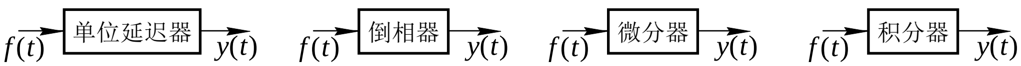
$$\Rightarrow y(t)=y_x(t)+y_f(t)=9\mathrm{e}^{-2t}-6.5\mathrm{e}^{-3t}-0.5\mathrm{e}^{-t},\ t\geq 0$$

3−30 已知一 LTI 系统的方程为$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+4\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+3y=\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}+2f$，试求其系统函数 $H(\mathrm{j}\varpi)$和单位冲激响应 $h(t)$。

解： $H(\mathrm{j}\,\omega)=\dfrac{\mathrm{j}\,\omega+2}{(\mathrm{j}\,\omega)^2+4(\mathrm{j}\,\omega)+3}=\dfrac{\mathrm{j}\,\omega+2}{(\mathrm{j}\,\omega+1)(\mathrm{j}\,\omega+3)}=\dfrac{0.5}{\mathrm{j}\,\omega+1}+\dfrac{0.5}{\mathrm{j}\,\omega+3}$，

$\therefore\quad h(t)=0.5(\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{-3t})\varepsilon(t)$

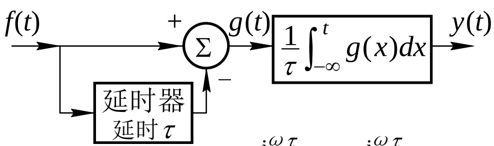
3-31 求图示各系统的系统函数 $H(\mathrm{j}\varpi)$和单位冲激响应 $h(t)$。



(a) (b) (c) (d)

解： (a) $H(\mathrm{j}\,\omega)=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\,\omega}$，$h(t)=\delta(t-1)$; (b) $H(\mathrm{j}\,\omega)=-1$，$h(t)=-\delta(t)$;
(c) $H(\mathrm{j}\,\omega)=\mathrm{j}\,\omega$，$h(t)=\delta'(t)$; (d) $H(\mathrm{j}\,\omega)=\pi\delta(\omega)+\dfrac{1}{\mathrm{j}\,\omega}$，$h(t)=\varepsilon(t)$.

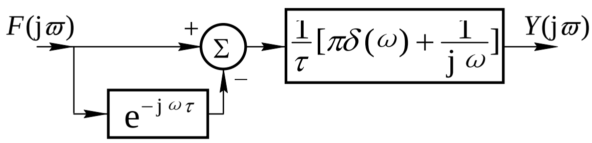
3-32 求图示系统的 $H(\mathrm{j}\varpi)$。

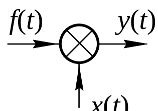


解： 其频域模型如右下图所示。

$$H(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{1}{\tau}[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{\mathrm{j}\,\omega}](1-e^{-\mathrm{j}\,\omega\tau})=\frac{1-e^{-\mathrm{j}\,\omega\tau}}{\mathrm{j}\,\omega\tau}=e^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}\frac{e^{\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}-e^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}}{\mathrm{j}2\frac{\omega\tau}{2}}$$

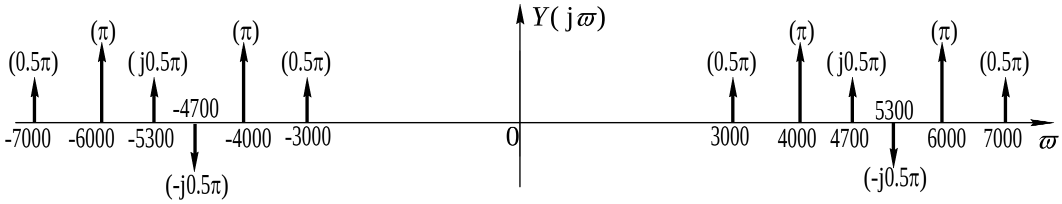
$$=\frac{\sin\frac{\omega\tau}{2}}{\frac{\omega\tau}{2}}e^{-\mathrm{j}\frac{\omega\tau}{2}}.$$





3-33 图示系统，已知已知 $f(t)=\sin 300t+2\cos 1000t+\cos 2000t$，$x(t)=\cos 5000t$，求 $Y(\mathrm{j}\varpi)$，并绘出之。

解：
$$Y(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{1}{2\pi}[\mathrm{j}\pi\delta(\omega+300)-\mathrm{j}\pi\delta(\omega-300)+2\pi\delta(\omega+1000)+2\pi\delta(\omega-1000)$$
$$+\pi\delta(\omega+2000)+\pi\delta(\omega-2000)]*[\pi\delta(\omega+5000)+\pi\delta(\omega-5000)]$$
$$=\mathrm{j}\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+5300)-\delta(\omega+4700)+\delta(\omega-4700)-\delta(\omega-5300)]$$
$$+\pi[\delta(\omega+6000)+\delta(\omega+4000)+\delta(\omega-4000)+\delta(\omega-6000)]$$
$$+\frac{\pi}{2}[\delta(\omega+7000)+\delta(\omega+3000)+\delta(\omega-3000)+\delta(\omega-7000)]$$



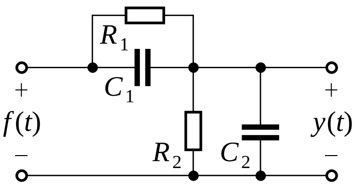
3-34 理想低通滤波器的传输函数 $H(\mathrm{j}\varpi)5G_{2\pi}(\varpi)$，求输入为下列信号时的响应 $y(t)$。

(1) $f(t)5\mathrm{Sa}(t)$　　　　(2) $f(t)54\mathrm{Sa}(\pi t)$

解：(1) $\because G_2(t)\leftrightarrow 2\mathrm{Sa}(\omega)$　　$\therefore f(t)=\mathrm{Sa}(t)\leftrightarrow\frac{1}{2}[2\pi G_2(-\omega)]=\pi G_2(\omega)$

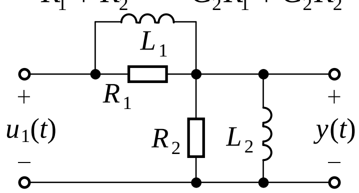
$$\therefore Y(\mathrm{j}\,\omega)=H(\mathrm{j}\,\omega)F(\mathrm{j}\,\omega)=\pi G_{2\pi}(\omega)G_2(\omega)=\pi G_2(\omega)=F(\mathrm{j}\,\omega)$$
$$\therefore y(t)=\mathrm{Sa}(t).$$

3-35 写出图示电路的 $H(\mathrm{j}\varpi)$，若使之为无失真传输系统，元件参数应满足何条件？



(a)

解：(a)
$$H(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{\dfrac{R_2}{1+\mathrm{j}\,\omega C_2R_2}}{\dfrac{R_1}{1+\mathrm{j}\,\omega C_1R_1}+\dfrac{R_2}{1+\mathrm{j}\,\omega C_2R_2}}$$
$$=\frac{R_2(1+\mathrm{j}\,\omega C_1R_1)}{R_1(1+\mathrm{j}\,\omega C_2R_2)+R_2(1+\mathrm{j}\,\omega C_1R_1)}=ke^{-\mathrm{j}\,\omega t_0}$$
$$\Rightarrow C_1R_1=C_2R_2，\ 此时H(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{R_2}{R_1+R_2}\left(=\frac{C_2R_2}{C_2R_1+C_2R_2}=\frac{C_1}{C_2+C_1}\right)$$



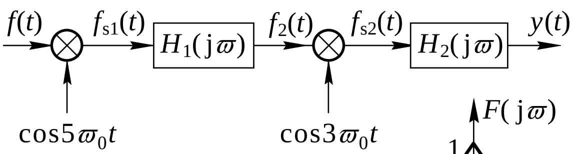
(b)

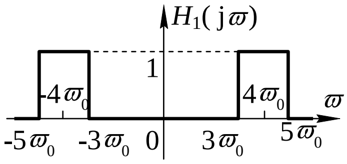
$$(b)\ H(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{\dfrac{\mathrm{j}\,\omega R_2L_2}{R_2+\mathrm{j}\,\omega L_2}}{\dfrac{\mathrm{j}\,\omega R_1L_1}{R_1+\mathrm{j}\,\omega L_1}+\dfrac{\mathrm{j}\,\omega R_2L_2}{R_2+\mathrm{j}\,\omega L_2}}$$

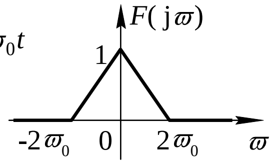
$$=\frac{R_2L_2(R_1+\mathrm{j}\,\omega L_1)}{R_1L_1(R_2+\mathrm{j}\,\omega L_2)+R_2L_2(R_1+\mathrm{j}\,\omega L_1)}=\frac{L_2}{L_1\dfrac{R_1R_2+\mathrm{j}\,\omega R_1L_2}{R_1R_2+\mathrm{j}\,\omega R_2L_1}+L_2}=ke^{-\mathrm{j}\,\omega t_0}$$

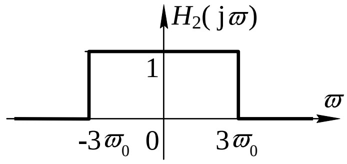
$$\Rightarrow R_1L_2=R_2L_1,\quad \text{此时}H(\mathrm{j}\,\omega)=\frac{L_2}{L_1+L_2}\left(=\frac{R_1L_2}{R_1L_1+R_1L_2}=\frac{R_2L_1}{R_1L_1+R_2L_1}=\frac{R_2}{R_1+R_2}\right)$$

3-36 系统、$F(\mathrm{j}\varpi)$、$H_1(\mathrm{j}\varpi)$和 $H_2(\mathrm{j}\varpi)$如图，求 $Y(\mathrm{j}\varpi)$.

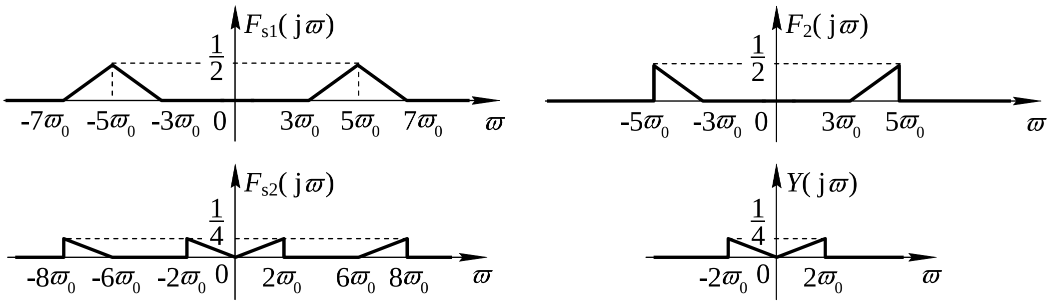








解： 可图解如下：



$$\text{故}Y(j\,\omega)=\frac{\omega}{8\omega_0}[-\varepsilon(\omega+2\omega_0)+2\varepsilon(\omega)-\varepsilon(\omega-2\omega_0)]=\begin{cases}\dfrac{|\omega|}{8\omega_0}, & |\omega|<2\omega_0\\ 0\ , & |\omega|>2\omega_0\end{cases}$$

第四章　连续系统的复频域分析习题解答

4-1. 根据拉氏变换定义，求下列函数的拉普拉斯变换。

(1) $\varepsilon(t-2)$，(2) $(\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t})\varepsilon(t)$，(3) $2\delta(t-1)-3e^{-at}\varepsilon(t)$，(4) $\cos(\omega t+\theta)\varepsilon(t)$.

解： $F_1(s)=\int_{0_-}^{\infty}\varepsilon(t-2)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\int_{2_+}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-2s}$

$F_2(s)=\int_{0_-}^{\infty}(\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-2t})e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s+2}$

$F_3(s)=\int_{0_-}^{\infty}[2\delta(t-1)-3e^{-at}\varepsilon(t)]e^{-st}\mathrm{d}t=2e^{-s}-\int_{0_+}^{\infty}3e^{-(s+a)t}\mathrm{d}t=2e^{-s}-\frac{3}{s+a}$

$F_4(s)=\int_{0_-}^{\infty}\cos(\omega t+\theta)e^{-st}\mathrm{d}t=\int_{0_-}^{\infty}(\cos\theta\cos\omega t-\sin\theta\sin\omega t)e^{-st}\mathrm{d}t=\frac{s\cos\theta-\omega\sin\theta}{s^2+\omega^2}$

4-2. 求下列函数的拉氏变换。

(1) $2\mathrm{e}^{-5t}\varepsilon(t)$ ，(2) $2\mathrm{e}^{-5(t-1)}\varepsilon(t-1)$ ，(3) $2\mathrm{e}^{-5t}\varepsilon(t-1)$ ，(4) $2\mathrm{e}^{-5(t-1)}\varepsilon(t)$.

解： (1) $F(s)=\frac{2}{s+5}$，(2) $F(s)=\frac{2\mathrm{e}^{-S}}{s+5}$，(3) $F(s)=\frac{2\mathrm{e}^{-(S+5)}}{s+5}$，(4) $F(s)=\frac{2\mathrm{e}^{5}}{s+5}$.

4-3. 利用拉变的基本性质，求下列函数的拉氏变换。

(1) t^2+2t　(2) $\sin(\omega t+\frac{\pi}{4})$　(3) $1+(t-2)\mathrm{e}^{-t}$　(4) $t^2\mathrm{e}^{-at}$

(5) $\mathrm{e}^{-t}[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]$　(6) $5\mathrm{e}^{-2t}\cos(\omega t+\frac{\pi}{4})$　(7) $\mathrm{e}^{-2t}+\mathrm{e}^{-(t-1)}\varepsilon(t-1)+\delta(t-2)$

(8) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sin 2t\,\varepsilon(t)]$　(9) $\varepsilon(2t-2)$　(10) $\delta(\frac{1}{2}t-1)$

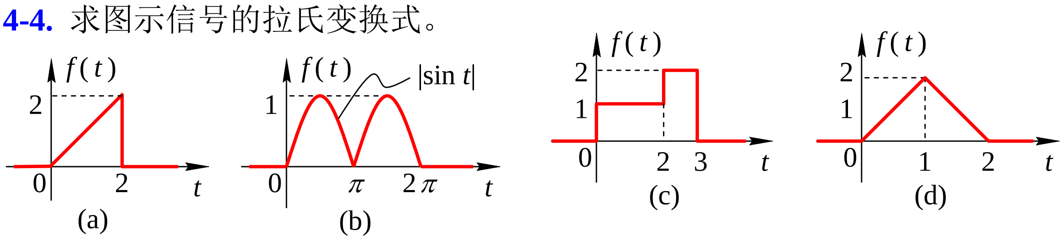
解： (1) $F(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}$　(2) $f(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\omega t+\cos\omega t)$，$F(s)=\frac{\sqrt{2}(\omega+s)}{2(s^2+\omega^2)}$

(3) $F(s)=\frac{1}{s}+\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{2}{s+1}$　(4) $F(s)=\frac{2}{(s+a)^3}$　(5) $F(s)=\frac{1}{s+1}-\frac{\mathrm{e}^{-2(s+1)}}{s+1}$

(6) $F(s)=\frac{2.5\sqrt{2}(s+2-\omega)}{(s+2)^2+\omega^2}$　(7) $F(s)=\frac{1}{s+2}+\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s+1}+\mathrm{e}^{-2s}$

(8) $F(s)=s\frac{2}{s^2+2^2}-0=\frac{2s}{s^2+4}$　(9) $\varepsilon(t-1)\leftrightarrow\frac{\mathrm{e}^{-s}}{s}$　(10) $2\delta(t-2)\leftrightarrow 2\mathrm{e}^{-2s}$.

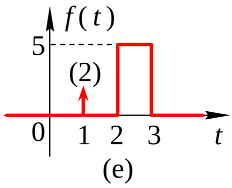
4-4. 求图示信号的拉氏变换式。



解：

(a) $f(t)=t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-2)]=t\,\varepsilon(t)-(t-2)\varepsilon(t-2)-2\varepsilon(t-2)$

$\therefore F(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}e^{-2s}-\frac{2}{s}e^{-2s}$;



(b) $f(t)=\sin t[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\pi)]-\sin t[\varepsilon(t-\pi)-\varepsilon(t-2\pi)]$

$=\sin t\,\varepsilon(t)+2\sin(t-\pi)\varepsilon(t-\pi)+\sin(t-2\pi)\varepsilon(t-2\pi)$

$F(s)=\frac{1}{s^2+1}(1+2e^{-\pi s}+e^{-2\pi s})=\frac{1}{s^2+1}(1+e^{-\pi s})^2$

(c) $f(t)=\varepsilon(t)+\varepsilon(t-2)-2\varepsilon(t-3)$ $\therefore F(s)=\frac{1}{s}(1+e^{-2s}-2e^{-3s})$;

(d) $f(t)=t\,\varepsilon(t)-2(t-1)\varepsilon(t-1)+(t-2)\varepsilon(t-2)$

$\therefore F(s)=\frac{1}{s^2}(1-2e^{-s}+e^{-2s})=\frac{1}{s^2}(1-e^{-s})^2$;

(e) $f(t)=2\delta(t-1)+5\varepsilon(t-2)-5\varepsilon(t-3)\ \Rightarrow\ F(s)=2e^{-s}+\frac{5}{s}(e^{-2s}-e^{-3s})$.

4-5. 已知因果信号 $f(t)$的象函数为 $F(s)$，求 $F(s)$的原函数 $f(t)$的初值 $f(0_+)$和终值 $f(:)$。

(1) $F(s)=\frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$， (2) $F(s)=\frac{s+3}{s^2+6s+10}$， (3) $F(s)=\frac{2}{s(s+2)^2}$.

解： (1) $f(0_+)=sF(s)\big|_{s\to\infty}=\frac{s(s+1)}{(s+2)(s+3)}\Big|_{s\to\infty}=1$， $f(\infty)=sF(s)\big|_{s\to 0}=0$；

(2) $f(0_+)=sF(s)\big|_{s\to\infty}=\frac{s(s+3)}{s^2+6s+10}\Big|_{s\to\infty}=1$， $f(\infty)=sF(s)\big|_{s\to 0}=0$；

(3) $f(0_+)=sF(s)\big|_{s\to\infty}=\frac{2}{(s+2)^2}\Big|_{s\to\infty}=0$， $f(\infty)=sF(s)\big|_{s\to 0}=\frac{1}{2}$.

4-6. 求下列函数的拉氏反变换。

(1) $\frac{4}{2s+3}$； (2) $\frac{4}{s(2s+3)}$； (3) $\frac{3s}{s^2+6s+8}$；

(4) $\frac{e^{-s}+e^{-2s}+1}{s^2+3s+2}$； (5) $\frac{s^2+2}{s^2+1}$； (6) $\frac{6s^2+19s+15}{(s+1)(s^2+4s+4)}$.

解： (1) $F(s)=\frac{2}{s+1.5}$ $\therefore f(t)=2e^{-1.5t}\varepsilon(t)$;

(2) $F(s)=\frac{4/3}{s}+\frac{4/3}{s+1.5}$ $\therefore f(t)=\frac{4}{3}(1-e^{-1.5t})\varepsilon(t)$;

(3) $F(s)=\frac{-3}{s+2}+\frac{6}{s+4}$ $\therefore f(t)=(6e^{-4t}-3e^{-2t})\varepsilon(t)$;

(4) $F(s)=(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s+2})(e^{-s}+e^{-2s}+1)$

$\therefore f(t)=(e^{-t}-e^{-2t})\varepsilon(t)+[e^{-(t-1)}-e^{-2(t-1)}]\varepsilon(t-1)+[e^{-(t-2)}-e^{-2(t-2)}]\varepsilon(t-2)$;