

4. $\cos 28^\circ \cos 73^\circ + \cos 62^\circ \cos 17^\circ =$ ()

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】C

【分析】利用两角和的正弦展开式计算可得答案.

【详解】 $\cos 28^\circ \cos 73^\circ + \cos 62^\circ \cos 17^\circ = \cos 28^\circ \sin 17^\circ + \sin 28^\circ \cos 17^\circ$
 $= \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

故选：C.

5. 若正实数 a, b, c 满足 $2^a = 3^b = 5^c$, 则 ()

A. $a < b < c$ B. $b < a < c$
 C. $b < c < a$ D. $c < b < a$

【答案】D

【分析】令 $2^a = m$, 利用对数运算, 结合对数函数的单调性, 即可判断.

【详解】令 $2^a = 3^b = 5^c = m$, 因为 a, b, c 为正数, 故可得 $m > 1$;

则 $a = \log_2 m = \frac{\lg m}{\lg 2}, b = \log_3 m = \frac{\lg m}{\lg 3}, c = \log_5 m = \frac{\lg m}{\lg 5},$

$y = \lg x$ 在定义域上是单调增函数, 故 $0 < \lg 2 < \lg 3 < \lg 5$, 又 $\lg m > 0$,

故 $a > b > c$.

故选：D.

6. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象是连续不断的, 且 $f(x)$ 的两个相邻的零点是 1, 2, 则“ $\exists x_0 \in (1, 2)$,

$f(x_0) > 0$ ”是“ $\forall x \in (1, 2), f(x) > 0$ ”的 ()

A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

【答案】C

【分析】结合函数的单调性, 由充分必要条件的判断方法求解即可.

【详解】解: 由题意知, $f(1) = f(2) = 0$, 对任意 $x \in (1, 2), f(x) \neq 0$,

而函数 $y = f(x)$ 的图象是连续不断的,

由 $\exists x_0 \in (1, 2), f(x_0) > 0$, 可得 $\forall x \in (1, 2), f(x) > 0$, 充分性成立,

反之 $\forall x \in (1, 2), f(x) > 0$, 显然可推出 $\exists x_0 \in (1, 2), f(x_0) > 0$, 必要性成立,

故“ $\exists x_0 \in (1, 2), f(x_0) > 0$ ”是“ $\forall x \in (1, 2), f(x) > 0$ ”的充要条件,

故选：C

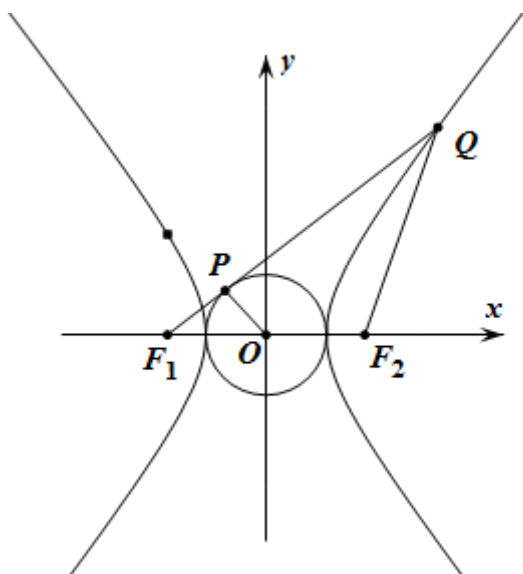
7. 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左、右焦点，过点 F_1 的直线与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 相切于点 P ，且与双曲线的右支交于点 Q ，若 $|PQ| = |QF_2|$ ，则该双曲线的离心率为 ()

- A. $\sqrt{2}$ B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

【答案】D

【分析】依题意得， $|PF_1| = 2a$ ，即 $b = 2a$ ，即可求解.

【详解】解：连接 OP ，则 $OP \perp PF_1$ ，如图所示：



由 $|OP| = a, |OF_1| = c$ ，得 $|PF_1| = \sqrt{c^2 - a^2} = b$ ，

而点 Q 在双曲线的右支上，则 $|QF_1| - |QF_2| = 2a$ ，因为 $|QP| = |QF_2|$ ，

所以 $|PF_1| = 2a$ ，即 $b = 2a$ ，

则双曲线的离心率为： $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$ ，

故选：D

8. 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形， $PA = PD = \sqrt{2}$ ，二面角 $P-AD-B$ 为 60° ，则该四棱锥外接球的表面积为 ()

- A. $\frac{16\pi}{3}$ B. $\frac{28}{3}\pi$ C. $\frac{64}{9}\pi$ D. 20π

【答案】B

【分析】根据二面角大小确定点 P 在底面 $ABCD$ 的投影，找到球心位置，根据几何关系，求得外接球半径，即可求得外接球表面积。

【详解】取 PE 中点为 E ，连接 AC, BD ，设其交点为 M ，连接 EM ；

因为 $PA = PD$ ，故点 P 在底面的投影 H 必在直线 EM 上，

过 P 作底面的垂线 PH ，垂足为 H ；连接 DH, AH ；

显然 $PE \perp AD, EM \perp AD$ ，故二面角 $P-AD-B$ 的平面角为 $\angle PEM = 60^\circ$ ，

因为 $PA^2 + PD^2 = 4 = AD^2$ ，故三角形 APD 为直角三角形；

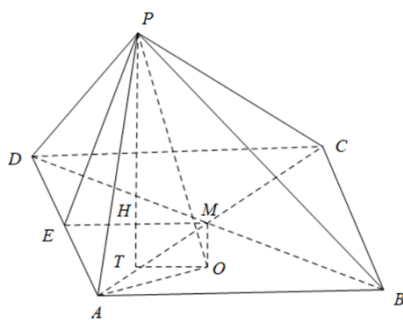
在三角形 PEH 中， $PE = \frac{1}{2}AD = 1$ ，则 $PH = \sin 60^\circ \times PE = \frac{\sqrt{3}}{2}, EH = \cos 60^\circ \times PE = \frac{1}{2}$ ，

故 H 为 EM 中点；

过 M 作 PH 的平行线，显然其垂直于平面 $ABCD$ ，则该棱锥外接球球心必在该垂线上，设其为 O ，

又 $PM = \sqrt{PH^2 + HM^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$ ， $AM = \sqrt{2}$ ， $PM < AM$ ，故点 O 在面 $ABCD$ 的下方；

过 O 作 OT 垂直于 PH 的延长线，垂足为 T ，连接 OA ， OP 如下图所示：



设该四棱锥外接球半径为 R ，

$$OM = HT = PT - PH = \sqrt{OP^2 - OT^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{R^2 - HM^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}} - \frac{\sqrt{3}}{2}；$$

在三角形 OAM 中， $OM = \sqrt{OA^2 - AM^2} = \sqrt{R^2 - 2}$ ，

$$\text{故 } \sqrt{R^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{R^2 - 2}，\text{ 解得 } R^2 = \frac{7}{3}。$$

故四棱锥 $P-ABCD$ 外接球表面积为 $4\pi R^2 = \frac{28}{3}\pi$ 。

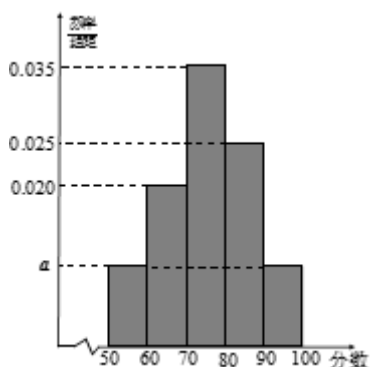
故选：B。

【点睛】关键点点睛：本题考察棱锥外接球半径的求解；处理问题的关键一是要准确找到点 P 在底面的投影；二是要掌握外接球球心所在位置为底面外心的垂线上；属困难题。

二、多选题

9. 某学校从高一年级1000

名学生中抽取部分学生某次考试的数学成绩进行统计，得到如图所示的频率分布直方图，则（ ）



- A. $a = 0.010$
- B. 估计高一学生数学成绩的平均分落在 $[80, 90)$
- C. 估计高一学生数学成绩的第三四分位数为84
- D. 估计高一学生数学成绩在 $[80, 100)$ 的学生人数为300

【答案】AC

【分析】根据频率分布直方图的性质计算可判定 A，根据平均数和百分位数的计算可判定 BC，根据频率分布直方图估计可判定 D.

【详解】由频率分布直方图可知 $(a + 0.020 + 0.025 + 0.035 + a) \times 10 = 1 \Rightarrow a = 0.010$ ，故 A 正确；

由 A 项结论可知平均数为 $(55 \times 0.010 + 65 \times 0.020 + 75 \times 0.035 + 85 \times 0.025 + 95 \times 0.010) \times 10 = 75.5$ ，故 B 错误；

设第三四分位数为 x ，易知前三个区间占比 $(0.010 + 0.020 + 0.035) \times 10 = 0.65$ ，

前四个区间占比为 $0.65 + 0.25 = 0.9$ ，即第三四分位数位于 $[80, 90)$ ，

有 $\frac{x-80}{90-x} = \frac{0.75-0.65}{0.9-0.75} \Rightarrow x = 84$ ，故 C 正确；

由图得区间 $[80, 100)$ 占比 0.35，故可估计约有 $1000 \times 0.35 = 350$ ，故 D 错误.

故选：AC.

10. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， P ， Q 分别为线段 BD_1 ， A_1D 上的动点，则（ ）

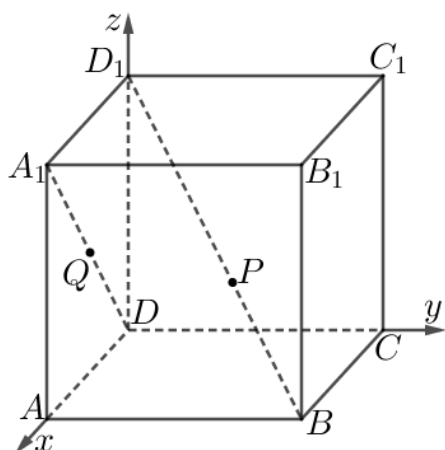
- A. 存在 P ， Q 两点，使得 $PQ \parallel AB$
- B. $A_1P \perp DC_1$
- C. AP 与 D_1C_1 所成的最大角为 $\frac{\pi}{4}$

D. BQ 与平面 A_1DC_1 所成的最大角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

【答案】ABD

【分析】根据给定条件，建立空间直角坐标系，利用空间向量结合线线角、线面角的向量求法逐项判断即得.

【详解】在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，建立如图所示的空间直角坐标系，令 $AB=2$ ，



则 $A(2,0,0), A_1(2,0,2), B(2,2,0), D_1(0,0,2), C_1(0,2,2)$, $\vec{D_1B} = (2,2,-2), \vec{DA_1} = (2,0,2)$,

由 P 在线段 BD_1 上，得 $\vec{D_1P} = t\vec{D_1B} = (2t, 2t, -2t)$ ，则 $P(2t, 2t, 2-2t)$ ， $0 \leq t \leq 1$ ，

由 Q 在线段 A_1D 上，得 $\vec{DQ} = u\vec{DA_1} = (2u, 0, 2u)$ ，则 $Q(2u, 0, 2u)$ ， $0 \leq u \leq 1$ ，

对于 A，当 $u=t=\frac{1}{2}$ 时， $\vec{QP} = (0,1,0) = \frac{1}{2}(0,2,0) = \vec{AB}$ ，即 $\vec{QP} \parallel \vec{AB}$ ，而 $Q \notin AB$ ，则 $PQ \parallel AB$ ，A 正确；

对于 B， $\vec{DC_1} = (0,2,2)$ ， $\vec{A_1P} = (2t-2, 2t, -2t)$ ，显然 $\vec{DC_1} \cdot \vec{A_1P} = 0$ ，则 $A_1P \perp DC_1$ ，B 正确；

对于 C， $\vec{AP} = (2t-2, 2t, 2-2t)$ ， $\vec{D_1C_1} = (0,2,0)$ ，当 $t=0$ 时， $\vec{AP} \cdot \vec{D_1C_1} = 0$ ，

此时 AP 与 D_1C_1 所成的角为 90° ，C 错误；

对于 D， $\vec{DC_1} = (0,2,2)$ ，设平面 A_1DC_1 的法向量 $\vec{n} = (x, y, z)$ ，则 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{DA_1} = 2x + 2z = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{DC_1} = 2y + 2z = 0 \end{cases}$ ，

令 $z = -1$ ，得 $\vec{n} = (1, 1, -1)$ ， $\vec{BQ} = (2u-2, -2, 2u)$ ，设 BQ 与平面 A_1DC_1 所成的角为 θ ，

则 $\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \vec{BQ} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{BQ}|}{|\vec{n}| |\vec{BQ}|} = \frac{4}{\sqrt{3} \times \sqrt{8u^2 - 8u + 8}} = \frac{4}{\sqrt{6} \times \sqrt{(2u-1)^2 + 3}} \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

当且仅当 $u = \frac{1}{2}$ 时取等号，D 正确.

故选: ABD

11. 质点 P 和 Q 在以原点 O 为圆心, 半径为 1 的 $\odot O$ 上逆时针作匀速圆周运动, 同时出发. P 的角速度大小为 2rad/s , 起点为 $\odot O$ 与 x 轴正半轴的交点; Q 的角速度大小为 5rad/s , 起点为射线 $y = -x (x \geq 0)$ 与 $\odot O$ 的交点. 则当 Q 与 P 重合时, P 的坐标可以为 ()

A. $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ B. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ C. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ D. $(0, -1)$

【答案】BD

【分析】确定点 P 、 Q 的初始位置, 由题意列出重合时刻 t 的表达式, 进而可得 P 点的坐标, 通过赋值对比选项即可得解.

【详解】依题意, 点 P 的起始位置 $P_0(1, 0)$, 点 Q 的起始位置 $Q_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

则 $\angle P_0 O Q_0 = \frac{\pi}{4}$, 设当 P 与 Q 重合时, 用的时间为 t s,

于是 $5t - 2t = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 即 $t = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi, k \in \mathbf{Z}$,

则 $2t = \frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 所以 $P\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}k\pi\right), \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}k\pi\right)\right)$,

对于 A, 若 $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}k\pi\right) = -\frac{1}{2}$, 则 $\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}k\pi = \frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}k\pi = \frac{4\pi}{3}$,

解得 $k = \frac{1}{8}$, 或 $k = \frac{7}{8}$, 因为 $k \in \mathbf{Z}$, 故 A 错误;

对于 B, 当 $k = 0$ 时, $P\left(\cos\frac{\pi}{6}, \sin\frac{\pi}{6}\right)$, 即 $P\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 故 B 正确;

对于 C, 若 $\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}k\pi\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}k\pi = \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{6} + \frac{4}{3}k\pi = -\frac{\pi}{4}$,

解得 $k = \frac{1}{16}$, 或 $k = -\frac{5}{16}$, 因为 $k \in \mathbf{Z}$, 故 C 错误;

对于 D, 当 $k = 1$ 时, $P\left(\cos\frac{3\pi}{2}, \sin\frac{3\pi}{2}\right)$, 即 $P(0, -1)$, 故 D 正确;

故选: BD.

【点睛】思路点睛: 通过设两质点重合时所用时间, 得到重合点坐标, 结合角度差, 根据三角函数周期性以及诱导公式判断选项即可.

12. 定义在 $[0, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+6) = f(x)$, 当 $x \in [0, 3]$ 时, $f(6-x) + f(x) = 0$. 当 $x \in [0, 1]$

时, $f(x) = \sin \pi x$; 当 $x \in (1, 3)$ 时, $f(x) = (x-2)^2$. 若关于 x 的方程 $f(x) = m$ ($m \in [-1, 1]$) 的解构成递增数列 $\{x_n\}$, 则 ()

A. $f(2024) = 0$

B. 若数列 $\{x_n\}$ 为等差数列, 则公差为 6

C. 若 $m = 0$, 则 $\sum_{i=1}^n x_i = \frac{n(n-1)}{2}$

D. 若 $-1 < m < 0$, 则 $\sum_{i=1}^{4n} x_i = 12n^2 + 7n$

【答案】ACD

【分析】由周期性, 对称性及等差数列的求和公式逐项判断即可.

【详解】因为 $f(x+6) = f(x)$, 所以 $f(x)$ 周期是 6,

$$f(2024) = f(6 \times 337 + 2) = f(2) = 0, \text{ 故 A 正确;}$$

$$\text{当 } x \in [0, 3] \text{ 时, } f(6-x) + f(x) = 0$$

$$\text{令 } x = 3, \text{ 则 } f(3) + f(3) = 0, \text{ 即 } f(3) = 0,$$

$$x \in [0, 1] \text{ 时, } f(x) = \sin \pi x = 0, \text{ 得 } x = 0 \text{ 或 } 1;$$

$$x \in (1, 3) \text{ 时, } f(x) = (x-2)^2 = 0, \text{ 得 } x = 2;$$

$$\text{又当 } x \in [0, 3] \text{ 时, } f(6-x) + f(x) = 0. \text{ 故 } f(x) \text{ 关于 } (3, 0) \text{ 对称,}$$

$$\text{故 } x \in (3, 6) \text{ 时, } f(x) = 0 \text{ 的根为 } x = 4 \text{ 或 } 5, \text{ 则函数 } f(x) = 0 \text{ 在一个周期内有 6 个根.}$$

$$\text{即当 } m = 0, f(x) = m \text{ 在 } [0, +\infty) \text{ 的根为 } 0, 1, 2, 3, 4, 5, \text{ 此时数列 } \{x_n\} \text{ 公差为 1,}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = \frac{n(n-1)}{2}, \text{ 故 B 错误, C 正确;}$$

$$\text{当 } x \in (3, 5), 6-x \in (1, 3), \text{ 得 } f(x) \in [0, 1) = -f(6-x) = -(4-x)^2, \text{ 对称轴为 } x = 4,$$

$$\text{此时 } f(x) \in [0, 1);$$

$$\text{当 } x \in [5, 6], 6-x \in [0, 1], f(x) = -f(6-x) = -\sin(\pi(6-x)) = \sin \pi x, \text{ 对称轴为 } x = \frac{11}{2},$$

$$\text{此时 } f(x) \in [0, 1];$$

$$\text{故当 } -1 < m < 0 \text{ 时, } x_1 + x_2 = 4 \times 2 = 8, x_3 + x_4 = \frac{11}{2} \times 2 = 11,$$

$$\text{且 } (x_{4i+1} + x_{4i+2} + x_{4i+3} + x_{4i+4}) - (x_{4i-3} + x_{4i-2} + x_{4i-1} + x_{4i}) = 24, (i \in \mathbb{N}^*)$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \sum_{i=1}^{4n} x_i &= (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + \dots + (x_{4n-3} + x_{4n-2} + x_{4n-1} + x_{4n}) \\ &= 19n + \frac{n(n-1)}{2} \times 24 = 12n^2 + 7n, \text{ 故 D 正确.} \end{aligned}$$

故选: ACD.

【点睛】易错点睛: 本题考查函数对称性及应用, $f(x)=0$ 的根易忽略对称中心的位置.

三、填空题

13. 已知曲线 $f(x) = a \ln x + x^2$ 在点 $A(1, f(1))$ 处的切线与直线 $x - 3y + 1 = 0$ 垂直, 则实数 a 的值为_____.

【答案】 -5

【分析】由题可得 $f'(1) = -3$, 即可得答案.

【详解】因为 $f(x) = a \ln x + x^2$, 所以 $f'(x) = \frac{a}{x} + 2x$,

因为 $x - 3y + 1 = 0$ 的斜率为 $\frac{1}{3}$, 则 $f'(1) = -3$,

即 $a + 2 = -3$, 故 $a = -5$.

故答案为: -5.

14. $(x+y)(x-2y)^6$ 展开式中含 x^3y^4 项的系数为_____.

【答案】 80

【分析】把 $(x-2y)^6$ 按照二项式定理展开, 可得 $(x+y)(x-2y)^6$ 的展开式中 x^3y^4 的系数.

【详解】结合题意可得:

$$(x+y)(x-2y)^6 = (x+y) \left(C_6^0 x^6 - C_6^1 x^5 2y + C_6^2 x^4 2^2 y^2 - C_6^3 x^3 2^3 y^3 + C_6^4 x^2 2^4 y^4 - C_6^5 x 2^5 y^5 + C_6^6 2^6 y^6 \right),$$

所以 x^3y^4 的系数为 $-2^3 C_6^3 + 2^4 C_6^4 = -8 \times 20 + 16 \times 15 = 240 - 160 = 80$.

故答案为: 80.

15. 已知函数 $f(x) = \tan(\omega x - \frac{\pi}{4})$ ($\omega > 0$) 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是增函数, 则 ω 的取值范围是_____.

【答案】 $(0, \frac{1}{2}]$

【分析】根据正切函数的单调性, 结合题意, 列出 ω 满足的条件, 求解即可.

【详解】根据题意, $\frac{\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$, 解得 $\omega \leq 1$, 又 $\omega > 0$, 则 $\omega \in (0, 1]$;

当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\omega x - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{4}\right)$,

由题可得 $-\frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{4} \geq -\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}\omega - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2}$, 解得 $\omega \leq \frac{1}{2}$;

综上所述， ω 的取值范围是 $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.

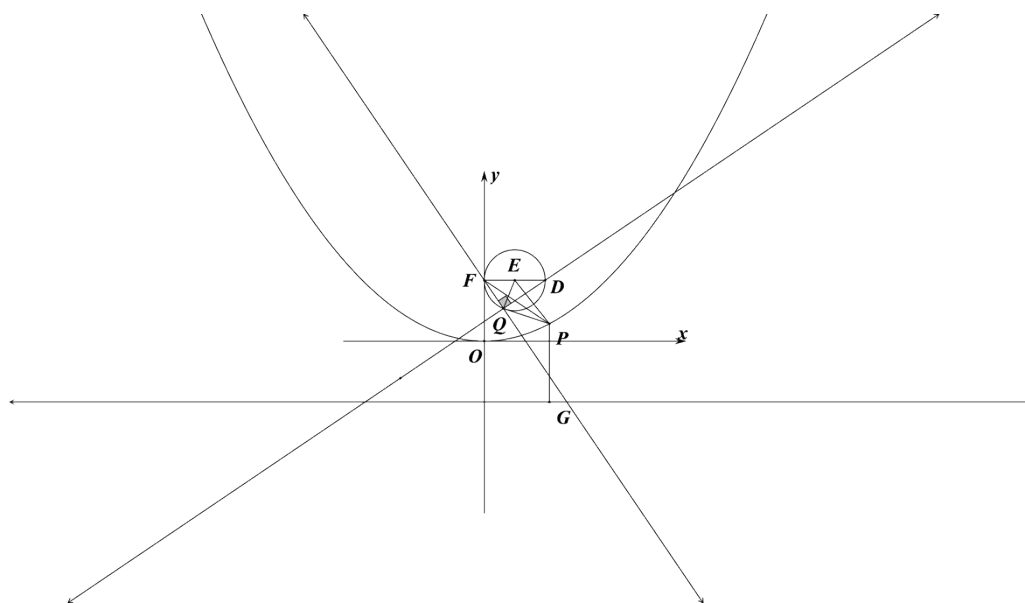
故答案为： $\left(0, \frac{1}{2}\right]$.

16. 已知抛物线 $C: x^2=8y$ 的焦点为 F ， P 是 C 上的动点，过点 F 作直线 $y=k(x-2)+2$ 的垂线，垂足为 Q ，则 $|PQ|+|PF|$ 的最小值为_____.

【答案】3

【分析】利用抛物线的定义结合圆的性质数形结合计算即可.

【详解】



如图所示，易知 $F(0, 2)$ ，直线 $y=k(x-2)+2$ 过定点 $D(2, 2)$ ，

且 Q 在以 FD 为直径的圆上，显然半径 $|EQ|=1$ ，不妨设其圆心为 E ，

分别过 E, P 作准线 $y=-2$ 的垂线 EM, PG ，垂足为 M, G ，

结合抛物线定义有 $|PQ|+|PF|=|PQ|+|PG|\geq|PE|-|EQ|+|PG|\geq|EM|-|EQ|=3$ ，

当且仅当 Q, P 均在垂线段 EM 上时取得等号.

故答案为：3

【点睛】思路点睛：关于圆锥曲线线段和差最值问题，通常利用数形结合思想，本题首先确定直线过定点得出 Q 轨迹为圆，结合抛物线的定义转化线段和结合圆的性质计算即可.

四、解答题

17. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，记 $\triangle ABC$ 的面积为 S ，已知 $\sqrt{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2S$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要
下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/236035031150011020>