专题06 函数的概念

【考点预测】

1.函数的概念

(1)一般地，给定非空数集 A ， B ，按照某个对应法则 f ，使得 A 中任意元素 x ，都有 B 中唯一确定的 y 与之对应，那么从集合 A 到集合 B 的这个对应，叫做从集合 A 到集合 B 的一个函数.记作：$x \to y = f(x)$ ， $x \in A$.集合 A 叫做函数的定义域，记为 D ，集合 $\{y|y = f(x)$ ， $x \in A\}$ 叫做值域，记为 C .

(2)函数的实质是从一个非空集合到另一个非空集合的映射.

(3)函数表示法：函数书写方式为 $y = f(x)$ ， $x \in D$

(4)函数三要素：定义域、值域、对应法则.

(5)同一函数：两个函数只有在定义域和对应法则都相等时，两个函数才相同.

2.基本的函数定义域限制

求解函数的定义域应注意：

（1）分式的分母不为零；

（2）偶次方根的被开方数大于或等于零：

（3）对数的真数大于零，底数大于零且不等于 1；

（4）零次幂或负指数次幂的底数不为零；

（5）三角函数中的正切 $y = \tan x$ 的定义域是 $\left\{x \middle| x \in R, 且\, x \neq kx + \dfrac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$ ；

（6）已知 $f\left(x\right)$ 的定义域求解 $f\left[g\left(x\right)\right]$ 的定义域，或已知 $f\left[g\left(x\right)\right]$ 的定义域求 $f\left(x\right)$ 的定义域，遵循两点：①定义域是指自变量的取值范围；②在同一对应法则∫下，括号内式子的范围相同；

（7）对于实际问题中函数的定义域，还需根据实际意义再限制，从而得到实际问题函数的定义域.

3.基本初等函数的值域

(1) $y = kx + b\ (k \neq 0)$ 的值域是 R .

(2) $y = ax^2 + bx + c\ (a \neq 0)$ 的值域是：当 $a > 0$ 时，值域为 $\{y|y \geq \dfrac{4ac - b^2}{4a}\}$ ；当 $a < 0$ 时，值域为 $\{y|y \geq \dfrac{4ac - b^2}{4a}\}$.

(3) $y = \dfrac{k}{x}\ (k \neq 0)$ 的值域是 $\{y|y \neq 0\}$.

(4) $y = a^x\ (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的值域是 $(0，+\infty)$.

(5) $y = \log_a x\ (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的值域是 R .

4.分段函数的应用

分段函数问题往往需要进行分类讨论，根据分段函数在其定义域内每段的解析式不同，然后分别解决，即分段函数问题，分段解决.

【题型归纳目录】

题型一：函数的概念

题型二：同一函数的判断

题型三：给出函数解析式求解定义域

题型四：抽象函数定义域

题型五：函数定义域的应用

题型六：函数解析式的求法

1.待定系数法（函数类型确定）

2.换元法或配凑法（适用于了 $f[g(x)]$ 型）

3.方程组法

4.求分段函数的解析式

5.抽象函数解析式

题型七：函数值域的求解

1.观察法

2.配方法

3.图像法（数形结合）

4.基本不等式法

5.换元法（代数换元与三角换元）

6.分离常数法

7.判别式法

8.单调性法

9.有界性法

10.导数法

题型八：分段函数的应用

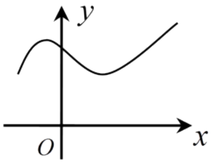
【典例例题】

题型一：函数的概念

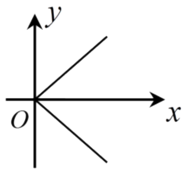
例 1．（2023·全国·高三专题练习）函数 $y=f(x)$的图象与直线 $x=1$ 的交点个数（　　）

A．至少 1 个　　B．至多 1 个　　C．仅有 1 个　　D．有 0 个、1 个或多个

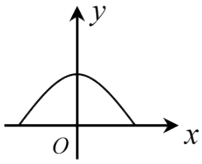
例 2．（2023·全国·高三专题练习）下列四个图像中，是函数图像的是（　　）



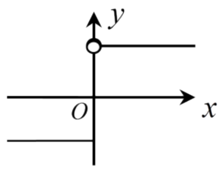
（1）



（2）



（3）



(4)

A．（1）（2）　　B．（1）（2）（3）　　C．（1）（3）（4）　　D．（1）（2）（3）（4）

（多选题）例 3．（2023·全国·高三专题练习）下列对应关系 f，能构成从集合 M 到集合 N 的函数的是（　　）

A．$M=\left\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right\}$，$N=\{-6,-3,1\}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-6$，$f(1)=-3$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=1$

B．$M=N=\{x\,|\,x\geq -1\}$，$f(x)=2x+1$

C．$M=N=\{1,2,3\}$，$f(x)=2x+1$

D．$M=\mathbf{Z}$，$N=\{-1,1\}$，$f(x)=\begin{cases}-1, x\text{为奇数},\\ 1, x\text{为偶数}.\end{cases}$

例 4．（2023·浙江·高三专题练习）将函数 $y=2\sin\frac{x}{2}\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$的图像绕着原点逆时针旋转角 α 得到曲线 T，当 $\alpha\in(0,\theta]$时都能使 T 成为某个函数的图像，则 θ 的最大值是（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　B．$\frac{\pi}{4}$　　C．$\frac{3}{4}\pi$　　D．$\frac{2}{3}\pi$

例 5．（2023·全国·高三专题练习）存在函数 $f(x)$，对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 都成立的下列等式的序号是________.

【方法技巧与总结】

利用函数概念判断

题型二：同一函数的判断

例 6．（2023·全国·高三专题练习）下列各组函数是同一函数的是（　　）

①$f(x)=\sqrt{-2x^3}$ 与 $g(x)=x\sqrt{-2x}$．②$f(x)=x$ 与 $g(x)=\sqrt{x^2}$．③$f(x)=x^0$ 与 $g(x)=\frac{1}{x^0}$．④$f(x)=x^2-2x-1$ 与 $g(t)=t^2-2t-1$．

A．①②　　B．①③　　C．③④　　D．①④

例 7．（2023·全国·高三专题练习）下列各组函数中，表示同一函数的是（　　）

A．$f(x)=e^{lnx}$，$g(x)=x$

B．$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x+2},g(x)=x-2$

C．$f(x)=x^0$，$g(x)=1$

D．$f(x)=|x|$，$x\in\{-1，0，1\}$，$g(x)=x^2$，$x\in\{-1，0，1\}$

（多选题）例 8．（2023·全国·高三专题练习）下列各组函数中表示同一个函数的是（　　）

A．$f(x)=|2x|$，$g(x)=\begin{cases}2x,x\geq 0\\ -2x,x<0\end{cases}$　　B．$f(x)=x^2$，$g(t)=t^2$

C．$f(x)=x+\dfrac{x^0}{3}$，$g(x)=x+\dfrac{1}{3}$　　D．$f(x)=x+4$，$g(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$

（多选题）例 9．（2023·全国·高三专题练习）在下列四组函数中，$f(x)$与$g(x)$不表示同一函数的是（　　）

A．$f(x)=x-1$，$g(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$　　B．$f(x)=|x+1|$，$g(x)=\begin{cases}x+1,x\geq -1\\ -x-1,x<-1\end{cases}$

C．$f(x)=1$，$g(x)=(x+1)^0$　　D．$f(x)=x$，$g(x)=(\sqrt{x})^2$

【方法技巧与总结】

当且仅当给定两个函数的定义域和对应法则完全相同时，才表示同一函数，否则表示不同的函数.

题型三：给出函数解析式求解定义域

例 10．（2023·全国·高三专题练习）已知等腰三角形的周长为40cm，底边长$y(cm)$是腰长$x(cm)$的函数，则函数的定义域为(　　)

A．$(10,20)$　　B．$(0,10)$　　C．$(5,10)$　　D．$[5,10)$

例 11．（2023·全国·河源市河源中学模拟预测）函数$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2(2x^2-9x+14)-2}}$的定义域为___________.

例 12．（2023·北京·模拟预测）函数$f(x)=\sqrt{2x+1}+\lg(2-x)$的定义域是_______.

例 13．（2023·上海市奉贤中学高三阶段练习）函数$f(x)=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-1}$的定义域为___________.

【方法技巧与总结】

对求函数定义域问题的思路是:

（1）先列出使式子$f(x)$有意义的不等式或不等式组;

（2）解不等式组;

（3）将解集写成集合或区间的形式.

题型四：抽象函数定义域

例 14．（2023·北京·高三专题练习）已知函数 $y=f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,1\right)$，则函数 $F\left(x\right)=f\left(\left|2^{x}-1\right|\right)$ 的定义域为（　　）

A．$\left(-\infty,1\right)$　　B．$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,1\right)$　　C．$\left(0,+\infty\right)$　　D．$\left[0,1\right)$

例 15．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $y=f\left(x^{2}-4\right)$ 的定义域是 $\left[-1,5\right]$，则函数 $y=f\left(2x+1\right)$ 的定义域为______.

例 16．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $y=f(x-1)$ 的定义域为 $\left[1,3\right]$，则函数 $y=f\left(\log_{3}x\right)$ 的定义域为（ ）

A．$\left[0,1\right]$　　B．$\left[1,9\right]$　　C．$\left[0,2\right]$　　D．$\left[0,9\right]$

例 17．（2023·全国·高三专题练习）若函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left[-1,2\right]$，则函数 $g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x-2\right)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域是（　　）

A．$\left[1,4\right]$　　B．$\left(1,4\right]$　　C．$\left[1,2\right]$　　D．$\left(1,2\right]$

例 18．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[3,6]$，则函数 $y=\dfrac{f(2x)}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}}$ 的定义域为（　　）

A．$\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$　　B．$\left[\dfrac{3}{2},2\right)$　　C．$\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$　　D．$\left[\dfrac{1}{2},2\right)$

例 19．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\left[2,+\infty\right)$ 的单调递增函数，若 $f\left(2a^{2}-5a+4\right)<f\left(a^{2}+a+4\right)$，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A．$\left(-\infty,\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(2,+\infty\right)$　　B．$\left[2,6\right)$

C．$\left(0,\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[2,6\right)$　　D．$\left(0,6\right)$

例 20．（2023·全国·高三专题练习）求下列函数的定义域：

(1)已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left[-2,2\right]$，求函数 $y=f\left(x^{2}-1\right)$ 的定义域.

(2)已知函数 $y=f\left(2x+4\right)$ 的定义域为 $\left[0,1\right]$，求函数 $f\left(x\right)$ 的定义域.

(3)已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left[-1,2\right]$，求函数 $y=f(x+1)-f(x^{2}-1)$ 的定义域.

【方法技巧与总结】

1.抽象函数的定义域求法：此类型题目最关键的就是法则下的定义域不变，若 $f(x)$ 的定义域为 $(a，b)$

，求 $f[g(x)]$ 中 $a<g(x)<b$ 的解 x 的范围，即为 $f[g(x)]$ 的定义域，口诀：定义域指的是 x 的范围，括号范围相同．已知 $f(x)$ 的定义域，求四则运算型函数的定义域

2．若函数是由一些基本函数通过四则运算结合而成的，其定义域为各基本函数定义域的交集，即先求出各个函数的定义域，再求交集．

题型五：函数定义域的应用

例 21．（2023·全国·高三专题练习）若函数 $f(x)=\dfrac{2^{x^2+1}+a}{\ln\left(2^{x^2+1}+a\right)}$ 的定义域为 R，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-2,+\infty)$　　B．$(-1,+\infty)$　　C．$(-2,-1)$　　D．$(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$

例 22．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{\left(m+1\right)x^2-\left(m+1\right)x+\dfrac{3}{4}}$ 的定义域为 R，则 m 的取值范围是（　　）

A．$-1<m<2$　　B．$-1<m\le 2$　　C．$-1\le m\le 2$　　D．$-1\le m<2$

（多选题）例 23．（2023·全国·高三专题练习）（多选）若函数 $y=\sqrt{\dfrac{a}{x}+1}$ 在区间 $\left[-2,-1\right]$ 上有意义，则实数 a 可能的取值是（　　）

A．-1　　B．1　　C．3　　D．5

例 24．（2023·全国·高三专题练习）函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{ax^2+ax+1}}$ 的定义域是 R，则 a 的取值范围是_________．

例 25．（2023·上海·高三专题练习）已知函数 $f(x)=\lg\left(\sqrt{x^2+1}+ax\right)$ 的定义域为 R，则实数 a 的取值范围是___________．

【方法技巧与总结】对函数定义域的应用，是逆向思维问题，常常转化为恒成立问题求解，必要时对参数进行分类讨论．

题型六：函数解析式的求法

【方法技巧与总结】求函数解析式的常用方法如下：

（1）当已知函数的类型时，可用待定系数法求解．

（2）当已知表达式为 $f\left[g\left(x\right)\right]$ 时，可考虑配凑法或换元法，若易将含 x 的式子配成 $g\left(x\right)$，用配凑法．若易换元后求出 x，用换元法．

（3）若求抽象函数的解析式，通常采用方程组法．

（4）求分段函数的解析式时，要注意符合变量的要求．

（5）当出现大基团换元转换繁琐时，可考虑配凑法求解．

（6）若已知成对出现 $f(x)$，$f(\dfrac{1}{x})$ 或 $f(x)$，$f(-x)$

，类型的抽象函数表达式，则常用解方程组法构造另一个方程，消元的方法求出 $f(x)$.

1.待定系数法（函数类型确定）

（多选题）例 26．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)$ 是一次函数，满足 $f\left(f\left(x\right)\right)=9x+8$，则 $f\left(x\right)$ 的解析式可能为（　　）

A． $f\left(x\right)=3x+2$　　　B． $f\left(x\right)=3x-2$

C． $f\left(x\right)=-3x+4$　　　D． $f\left(x\right)=-3x-4$

例 27．（2023·全国·高三专题练习）设 $y=f(x)$是一次函数，若 $f(0)=1$，且 $f(1),f(4),f(13)$ 成等比数列，则 $f(2)+f(4)+\cdots+f(2n)$ 等于（　　）

A．$n(2n+3)$　　　B．$n(n+4)$

C．$2n(2n+3)$　　　D．$2n(n+4)$

例 28．（2023·全国·高三专题练习）已知 $f\left(x\right)$ 为二次函数，$f\left(0\right)=0$，$f\left(2x+1\right)-f\left(x\right)=x^2+3x+2$，求 $f\left(x\right)$ 的解析式.

2.换元法或配凑法（适用于了 $f\left[g\left(x\right)\right]$ 型）

例 29.（2023·陕西西安·高三阶段练习（文））已知 $f\left(x+1\right)=\ln x^2$，则 $f\left(x\right)=$（　　）

A． $\ln\left(x+1\right)^2$　　　B． $2\ln\left(x+1\right)$

C． $2\ln\left|x-1\right|$　　　D． $\ln\left(x^2-1\right)$

例 30．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$，则 $f\left(x\right)$ 的解析式为（　　）

A． $f\left(x\right)=\frac{2x}{1+x^2}\left(x\neq-1\right)$　　　B． $f\left(x\right)=-\frac{2x}{1+x^2}\left(x\neq-1\right)$

C． $f\left(x\right)=\frac{x}{1+x^2}\left(x\neq-1\right)$　　　D． $f\left(x\right)=-\frac{x}{1+x^2}\left(x\neq-1\right)$

例 31．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)$ 满足 $f\left(\cos x-1\right)=\cos 2x-1$，则 $f\left(x\right)$ 的解析式为（　　）

A． $f\left(x\right)=2x^2+4x\left(-2\leq x\leq 0\right)$　　　B． $f\left(x\right)=2x^2+4x\left(x\in R\right)$

C． $f\left(x\right)=2x-1\left(-2\leq x\leq 0\right)$　　　D． $f\left(x\right)=2x-1\left(x\in R\right)$

例 32．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(\sqrt{x}+2\right)=x+4\sqrt{x}+5$，则 $f\left(x\right)$ 的解析式为_______

例 33．（2023·全国·高三专题练习）已知 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，则函数 $f(x)$=_______，=_______.

例 34．（2023·全国·高三专题练习）已知 $f(|x-1|)=x^2-2x+3$，则 $f(3)=$（　　）

A．6　　B．3　　C．11　　D．10

例 35．（2023·全国·高三专题练习）已知 $f\left(x^6\right)=\log_2 x$，则 $f\left(8\right)=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{6}$　　D．$\frac{1}{8}$

3.方程组法

例 36．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)$ 的定义域为 R，且 $f(x)+2f(-x)=x^2-x$，则 $f(x)=$（　　）

A．$\frac{x^2+2x}{3}$　　B．$\frac{2x^2}{3}+x$　　C．$\frac{2x^2+2x}{3}$　　D．$\frac{x^2}{3}+x$

例 37．（2023·全国·高三专题练习）设函数 $f\left(x\right)$ 对 $x\neq 0$ 的一切实数均有 $f\left(x\right)+2f\left(\frac{2018}{x}\right)=3x$，则 $f\left(2018\right)$ 等于

A．2016　　B．-2016　　C．-2017　　D．2017

例 38．（2023·全国·高三专题练习）若函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足 $f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=2x-\frac{4}{x}$，且 $f(x)+g(x)=x+6$，则 $f(1)+g(-1)=$________.

例 39．（2023·全国·高三专题练习）已知 $3f(x)+5f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{2}{x}+1$，则函数 $f(x)$ 的解析式为___________.

4.求分段函数的解析式

例 40．（2023·全国·高三专题练习）设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x,-1<x\leq 0\\ \frac{1}{f\left(x-1\right)}+1,0<x<1\end{cases}$，若函数 $y=f\left(x\right)-2t$ 在区间 $(-1,1)$ 内有且仅有两个零点，则实数 t 的取值范围是（　　）

A．$\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)$　　B．$\left(-\infty,0\right)$　　C．$\left(-\frac{1}{2},0\right)$　　D．$\left[-\frac{1}{2},0\right)$

例 41．（2023·浙江·高三专题练习）已知函数 $f(x)=\begin{cases}-1,x>-1\\-2,x\leq -1\end{cases}$，则 $f(f(x))=$___________，$\frac{|x|}{f(x)}$ 的最大值是___________.

例 42．（2023·全国·高三专题练习）函数 $f(x)=-x^2+4x-1$ 在区间 $[t，t+1]$（$t\in\mathbf{R}$）上的最大值为 $g(t)$．求 $g(t)$ 的解析式

5.抽象函数解析式

例 43．（2023·全国·高三专题练习）对任意实数x，y，都有$f\left(x+y\right)-2f\left(y\right)=x^2+2xy-y^2+3x-3y$，求函数$f\left(x\right)$的解析式．

例 44．（2023·河南·高三阶段练习（文））已知函数$f\left(x\right)$是定义在$\left(0,+\infty\right)$上的增函数，且$f\left(f\left(x\right)+\frac{a}{x}\right)=1$，$f\left(1\right)=0$，则$f\left(3\right)=$（　　）

A．$\frac{2}{3}$　　B．$\frac{4}{3}$　　C．2　　D．3

例 45．（2023·安徽·芜湖一中三模（理））已知函数$f\left(x\right)$在$x\in\mathbf{R}$上满足$f\left(2+x\right)=2f\left(2-x\right)-x^2+6x$，则曲线$y=f\left(x\right)$在点$\left(2,f\left(2\right)\right)$处的切线方程是（　　）

A．$2x-y-6=0$　　B．$6x-y-4=0$

C．$2x-y-4=0$　　D．$2x+y-4=0$

例 46．（2023·全国·高三专题练习（文））定义在R上的函数$f(x)$单调递增，且对$\forall x\in R$，有$f\left(f(x)-2^x\right)=3$，则$f\left(\log_4 3\right)=$___________．

例 47．（2023·全国·高三专题练习）已知定义在$\left(0,+\infty\right)$上的单调函数$f\left(x\right)$，若对任意$x\in\left(0,+\infty\right)$都有$f\left(f\left(x\right)+\log_{\frac{1}{2}}x\right)=3$，则方程$f\left(x\right)=2+\sqrt{x}$的解集为_______．

例 48．（2023·全国·高三专题练习）已知$f\left(x\right)$在$(0,+\infty)$上是减函数，且$f\left(x\right)+f\left(y\right)=f\left(xy\right)+1$对任意的$x\in(0,+\infty)$都成立，写出一个满足以上特征的函数$f(x)=$___________．

例 49．（2023·全国·高三专题练习）设$f(x)$是定义在R上的函数，且满足对任意x,y等式$f\left(2y-x\right)=-2f\left(x\right)+3y\left(4x-y+3\right)$恒成立，则$f(x)$的解析式为_____________．

题型七：函数值域的求解

【方法技巧与总结】

函数值域的求法主要有以下几种

(1)观察法:根据最基本函数值域（如$x^2\geq 0, a^x>0$及函数的图像、性质、简单的计算、推理，凭观察能直接得到些简单的复合函数的值域.

（2）配方法：对于形如$y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$的值域问题可充分利用二次函数可配方的特点，结合二次函数的定义域求出函数的值域.

（3）图像法：根据所给数学式子的特征，构造合适的几何模型.

（4）基本不等式法：注意使用基本不等式的条件，即一正、二定、三相等.

（5）换元法：分为三角换元法与代数换元法，对于形$y=ax+b+\sqrt{cx+d}$的值域，可通过换元将原函数转化为二次型函数.

（6）分离常数法：对某些齐次分式型的函数进行常数化处理，使函数解析式简化内便于分析.

（7）判别式法：把函数解析式化为关于 x 的—元二次方程，利用一元二次方程的判别式求值域，一般地，形如$y=Ax+B$，$\sqrt{ax^2+bx+c}$或$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$的函数值域问题可运用判别式法（注意 x 的取值范围必须为实数集 R）.

(8)单调性法：先确定函数在定义域（或它的子集）内的单调性，再求出值域.对于形如$y=\sqrt{ax+b}+\sqrt{cx+d}$或$y=ax+b+\sqrt{cx+d}$的函数，当 ac>0 时可利用单调性法.

（9）有界性法:充分利用三角函数或一些代数表达式的有界性，求出值域.因为常出现反解出 y 的表达式的过程，故又常称此为反解有界性法.

(10)导数法：先利用导数求出函数的极大值和极小值，再确定最大（小）值，从而求出函数的值域.

1.观察法

例 50．（2023·全国·高三专题练习）函数$y=\dfrac{1}{x+1}-1$的值域是（　　）

A．$\left(-\infty,-1\right)$　　B．$\left(+1,+\infty\right)$　　C．$\left(-\infty,-1\right)\cup\left(-1,+\infty\right)$ D．$\left(-\infty,+\infty\right)$

例 51．（2023·全国·高三专题练习）下列函数中，值域为$(0,+\infty)$的是（　　）

A．$y=x^2$　　B．$y=\dfrac{2}{x}$　　C．$y=2^x$　　D．$y=\left|\log_2 x\right|$

例 52．（2023·浙江·高三专题练习）下列函数中，函数值域为$(0,+\infty)$的是（　　）

A．$y=(x+1)^2, x\in(0,+\infty)$　　B．$y=\log_2 x, x\in(1,+\infty)$

C．$y=2x-1$　　D．$y=\sqrt{2x-1}$

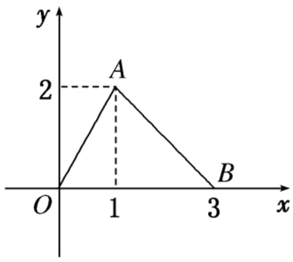
2.配方法

例 53.（2023·全国·高三专题练习）函数的$y=\sqrt{-x^2-6x-5}$值域为（　　）

A．$\left[0,+\infty\right)$　　B．$\left[0,2\right]$

C．$\left[2,+\infty\right)$　　　　D．$\left(2,+\infty\right)$

例 54．（2023·全国·高三专题练习）函数 $y=f\left(x\right)$ 的图象是如图所示的折线段 OAB，其中 $A\left(1,2\right)$，$B\left(3,0\right)$，函数 $g\left(x\right)=x\cdot f\left(x\right)$，那么函数 $g\left(x\right)$ 的值域为（　　）



A．$\left[0,2\right]$　　　　B．$\left[0,\frac{9}{4}\right]$

C．$\left[0,\frac{3}{2}\right]$　　　　D．$\left[0,4\right]$

例 55．（2023·全国·高三专题练习）已知正实数 a，b，c 满足 $2a+b=1$，$abc+1=2c$，则 c 的最大值为（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{2}{3}$　　C．$\frac{8}{15}$　　D．2

3.图像法（数形结合）

例 56．（2023·全国·高三专题练习）函数 $y=x^2-4x+1$，$x\in\left[0,4\right]$ 的值域是（　　）

A．$\left[1,6\right]$　　B．$\left[-3,1\right]$　　C．$\left[-3,6\right]$　　D．$\left[-3,+\infty\right)$

例 57.（2023·全国·高三专题练习（理））函数 $f(x)=\dfrac{\sin x-1}{\sqrt{3-2\cos x-2\sin x}}(x\in[0,2\pi])$ 的最小值是（　　）

A．$-\frac{\sqrt{2}}{2}$　　B．-1　　C．$-\sqrt{2}$　　D．$-\sqrt{3}$

例 58．（2023·全国·高三专题练习）函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}-1}{x-2}$ 的值域为(　　)

A．$[-\frac{4}{3},\frac{4}{3}]$　　　　B．$[-\frac{4}{3},0]$

C．$[0,1]$　　　　D．$[0,\frac{4}{3}]$

例 59.（2023·全国·高三专题练习）已知 $x\in[-\sqrt{3}$，$\sqrt{3}]$，$y\in R_+$，则 $(x-y)^2+(\sqrt{3-x^2}-\frac{9}{y})^2$ 的最小值为

__________.

例 60．（2023·上海·高三专题练习）函数 $y=\dfrac{\sqrt{-x^2+4x-3}+3}{x+1}$ 的值域为_____.

4.基本不等式法

例61．（2023·河南·模拟预测（文））下列函数中最小值为6的是（　　）

A．$y=x^2+2x+6$

B．$y=|\cos x|+\dfrac{9}{|\cos x|}$

C．$y=3^x+\dfrac{9}{3^x}$

D．$y=\ln x+\dfrac{9}{\ln x}$

例62．（2023·全国·高三专题练习）函数$y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$的值域是_______.

5.换元法（代数换元与三角换元）

例63．（2023·全国·高三专题练习）函数$f(x)=\sqrt{3+2x-x^2}$的值域为（　　）

A．$[0,4]$　　B．$(-\infty,2]$　　C．$[2,+\infty)$　　D．$[0,2]$

例64．（2023·全国·高三专题练习）函数$y=4^x+2^{x-1}+3\left(x\in R\right)$的值域为（　）

A．$\left[2,+\infty\right)$　　B．$\left(3,+\infty\right)$　　C．$\left(\dfrac{13}{3},+\infty\right)$　　D．$\left[9,+\infty\right)$

例65．（2023·全国·高三专题练习）函数$f(x)=x+\sqrt{3-2x}$的值域是（　　）

A．$\left[0,+\infty\right)$　　B．$\left[1,+\infty\right)$　　C．$\left(-\infty,2\right]$　　D．$\left(-\infty,1\right]$

例66．（2023·全国·高三专题练习）若$y=\sqrt{x-4}+\sqrt{18-3x}$，则$y$的取值范围是________

6.分离常数法

例67．（2023·全国·高三专题练习）函数$y=\dfrac{2+x}{4-3x}$的值域是（　　）

A．（﹣∞，+∞）

B．（﹣∞，$-\dfrac{1}{2}$）∪（$\dfrac{1}{2}$，+∞）

C．（﹣∞，$-\dfrac{1}{3}$）∪（$\dfrac{1}{3}$，+∞）

D．（﹣∞，$-\dfrac{1}{3}$）∪（$-\dfrac{1}{3}$，+∞）

例68．（2023·全国·江西科技学院附属中学模拟预测（文））函数$f(x)=\dfrac{2x-3}{3x+1}$的值域（　　）

A．$\left(-\infty,\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

B．$\left(-\infty,\dfrac{3}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$

C．$\left(-\infty,-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{1}{3},+\infty\right)$

D．$\left(-\infty,\dfrac{2}{3}\right)\cup\left(\dfrac{2}{3},+\infty\right)$

7.判别式法

例69．（2023·全国·高三专题练习）函数$f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x-1}{x^2+x+1}$的最大值与最小值的和是（　　）

A．$\dfrac{5}{3}$　　B．$\dfrac{2}{3}$　　C．1　　D．$-\dfrac{2}{3}$

例 70．（2023·浙江杭州·高一期中）函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x+2}$ 的值域是___________.

例 71．（2023·江苏·高一专题练习）求函数 $y=\dfrac{2x+1}{x^2-2x+2}$ 的值域______________**.**

例 72.（2023·浙江·高一期末）函数 $y=\dfrac{2x^2+4x+2}{x^2+1}$ 的值域为_________.

8.单调性法

例 73．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $y=\begin{cases}(1-a)x+14a, & x<10\\ \lg x, & x\geq 10\end{cases}$ 的值域为 **R**，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-\infty,1)$　　B．$\left[-\dfrac{9}{4},+\infty\right)$　　C．$\left[-\dfrac{9}{4},1\right)$　　D．$\left(-\dfrac{9}{4},1\right)$

例 74．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{12-x}-\sqrt{x-3}$，则函数 $f\left(x\right)$ 的值域为（　　）

A．$[-3,0]$　　B．$[0,3]$　　C．$[-3,3]$　　D．$[3,12]$

例 75．（2023·全国·高三专题练习）函数 $f(x)=\sqrt{x-1}+2x$ 的值域为（　　）

A．$[-1,+\infty)$　　B．$[0,+\infty)$　　C．$[1,+\infty)$　　D．$[2,+\infty)$

9.有界性法

例 76．（2023·全国·高三专题练习）函数 $y=\dfrac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha+2}$ 的值域是________________.

例 77．（2023·全国·高三专题练习）函数 $y=\dfrac{2^{x+1}+3}{2^x+1}$ 的值域为（　　）

A．$(0,2)$　　B．$[2,+\infty)$　　C．$(2,3)$　　D．$[1,2]$

例 78．（2023·全国·高三专题练习（理））实数 x，y 满足 $\left(x+y-1\right)^2+\left(x-2y+1\right)^2=1$，则 $2x+y$ 的最大值为___________.

10.导数法

例 79．（2023·四川省高县中学校高三阶段练习（文））函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+x^2-3x-4$ 在 $[0,2]$ 上的最小值是__________.

例 80．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=x^2-2\ln x$，则 $f(x)$ 在 $[1,e]$ 上的最大值是___________**.**

例 81．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(x\right)=2x-\sin x$，当 $x\in[0,1]$ 时，函数 $y=f\left(x\right)$ 的最大值为_______.

例 82．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=\ln(\ln x+(e-1)x-m)$，若曲线 $y=\dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$ 上存在点 $\left(x_1,y_1\right)$，使得 $y_1=f\left(f\left(y_1\right)\right)$，则实数 m 的最大值是（　　）

A．0　　B．3　　C．-2　　D．-1

题型八：分段函数的应用

例 83．（2023·山东济南·二模）已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}2^x-1, x\le 0,\\ x^{\frac{1}{2}}, x>0,\end{cases}$ 若 $f\left(m\right)=3$，则 m 的值为（　　）

A．$\sqrt{3}$　　B．2　　C．9　　D．2 或 9

例 84．（2023·广西广西·模拟预测（理））已知 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+3, x\le 0\\ \sqrt{x}, x>0\end{cases}$，若 $f\left(a-3\right)=f\left(a+2\right)$，则 $f\left(a\right)=$（　　）

A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．1　　D．0

例 85．（2023·浙江·模拟预测）已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{x}+3, x<1\\ \log_3 x, x\ge 1\end{cases}$，则 $f\left(f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)=$（　　）

A．1　　B．2　　C．3　　D．4

例 86．（2023·广东梅州·二模）设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\log_2\left(6-x\right), x<1,\\ 2^{x-1}, x\ge 1.\end{cases}$，则 $f\left(-2\right)+f\left(\log_2 6\right)=$（　　）

A．2　　B．6　　C．8　　D．10

例 87．（2023·浙江·模拟预测）已知函数 $f(x)=\begin{cases}e^{|\ln x|}, x>0,\\ \dfrac{x+a}{x-1}, x\le 0,\end{cases}$，则 $f(1)=$___________；若 $f(f(-1))=1$，则实数 $a=$___________.

例 88．（2023·浙江省临安中学模拟预测）设 $f\left(x\right)=\begin{cases}\sqrt{x}, 0<x<1\\ 2\left(x-1\right), x\ge 1\end{cases}$，若 $f\left(a\right)=f\left(a+1\right)$，则 $a=$__________，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=$__________.

【方法技巧与总结】

1.分段函数的求值问题，必须注意自变量的值位于哪一个区间，选定该区间对应的解析式代入求值

2.函数区间分类讨论问题，则需注意在计算之后进行检验所求是否在相应的分段区间内.

【过关测试】

一.单选题

1．（2023·全国·高三专题练习（理））下列函数中，不满足：$f(2x)=2f(x)$ 的是

A．$f(x)=|x|$　　B．$f(x)=x-|x|$　　C．$f(x)=x+1$　　D．$f(x)=-x$

2．（2023·陕西陕西·二模（理））已知$f\left(x\right)$是定义域为$\mathbf{R}$上的单调增函数，且对任意$x\in\mathbf{R}$，都有$f\left(f\left(x\right)-2x\right)=6$，则$f\left(6\right)$的值为（　　）

A．12　　B．14　　C．-14　　D．18

3．（2023·宁夏·银川一中一模（文））若函数f（x）满足f（$1-\ln x$）$=\frac{1}{x}$，则f（2）=（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．e

C．$\frac{1}{\mathrm{e}}$　　D．－1

4．（2023·江西·南昌十中模拟预测（文））设全集$U=\mathbf{R}$，集合$M=\{x\mid y=\ln\left(x-1\right)\},N=\{x\mid y=\sqrt{x^2-4}\}$，则$M\cap N=$（　　）

A．（1，2）　　B．（1，2]

C．（2，+∞）　　D．[2，+∞）

5．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f(x+1)$的定义域为(－2,0)，则$f(2x-1)$的定义域为（　　）

A．(－1,0)　　B．(－2,0)　　C．(0,1)　　D．$\left(-\frac{1}{2},0\right)$

6．（2023·全国·高三专题练习）函数$y=\frac{x+1}{x-3}\left(x>3\right)$的值域是（　　）

A．$\left(1,+\infty\right)$　　B．$\left(0,+\infty\right)$　　C．$\left(3,+\infty\right)$　　D．$\left(4,+\infty\right)$

7．（2023·河北保定·二模）若函数$f\left(\frac{x-1}{x}\right)=\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+1$，则函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-4x$的最小值为（　　）

A．-1　　B．-2　　C．-3　　D．-4

8．（2023·全国·高三专题练习）高斯是德国著名的数学家，近代数学奠基者之一，享有“数学王子”的美誉，用其名字命名的“高斯函数”：设$x\in\mathrm{R}$，用$[x]$表示不超过x的最大整数，则$y=[x]$称为高斯函数，也称取整函数，例如：$[-3.7]=-4$，$[2.3]=2$.已知$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{1}{2}$，则函数$y=[f(x)]$的值域为（　　）

A．{0}　　B．{−1，0}　　C．{−2，−1，0}　　D．{−1，0，1}

二、多选题

9．（2023·全国·高三专题练习）已知$f(x)$满足$f(x)-2f(\text{-}x)=2x-1$，则（　　）

A．$f(3)=3$　　B．$f(3)=-3$

C．$f(x)+f(-x)=2$　　D．$f(x)+f(-x)=\text{-}2$

10．（2023·全国·高三专题练习）下列四组函数中，$f(x)$与$g(x)$ 表示同一函数的是（　　）

A．$f(x)=x+1$，$g(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$　　B．$f(x)=\sqrt{x+1}\cdot\sqrt{1-x}$，$g(x)=\sqrt{1-x^2}$

C．$f(x)=(x-1)^0$，$g(x)=1$　　D．$f(x)=\frac{(\sqrt{x})^2}{x}$，$g(x)=\frac{x}{(\sqrt{x})^2}$

11．（2023·全国·高三专题练习）关于直线$y=m$与函数$y=|x|+|2x+4|$的图象的交点有如下四个结论，其中正确的是（　　）

A．不论m为何值时都有交点　　B．当$m>2$时，有两个交点

C．当$m=2$时，有一个交点　　D．当$m<2$时，没有交点

12．（2023·全国·高三专题练习）等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，公差$d\in[1,2]$，且$a_3+\lambda a_9+a_{15}=15$，则实数$\lambda$的可能取值为（　　）

A．$-\frac{1}{3}$　　B．$-\frac{19}{17}$　　C．$-\frac{3}{2}$　　D．-2

三、填空题

13．（2023·江西·南昌市实验中学一模（文））已知函数$f(x)=\begin{cases}2^x, x\le 0\\ 2\sqrt{x}, x>0\end{cases}$，则$f(f(-2))=$____________.

14．（2023·安徽省芜湖市教育局高三期末（理））若定义在R的函数$f(x)$，满足$f(x)=2f(4-x)-2x^2+5x$，则曲线$y=f(x)$在点$(2,f(2))$处的切线方程是___________.

15．（2023·全国·高三专题练习）已知f（x）是定义在**R**上的周期为4的周期函数，在区间[﹣2，2]上，f（x）$=\begin{cases}ax+b, 0\le x\le 2\\ \dfrac{cx+2}{1-x}, -2\le x<0\end{cases}$，且$f$（5）$=2f$（$\frac{1}{2}$），则$3a+2b+c$的值为__.

16．（2023·全国·高三专题练习）若函数$f(x)=\sqrt{2-x}+\sqrt{x+4}$的最大值为$M$，最小值为$m$，则$\frac{m}{M}$的值为___________.

四、解答题

17．（2023·陕西·武功县普集高级中学高三阶段练习（理））若$f(x)=x^2-4x+t-1$，其中t是常数

(1)求$f(4+x)-f(-x)$的值;.

(2)方程$f(x)=0$的两根异号，　求实数t的取值范围；

(3)当$t=4$时，　求出不等式$\frac{f(x)}{x}>0$的解集.

18．（2023·全国·高三专题练习）求下列函数的值域

（1）$y=\frac{3+x}{4-x}$；

（2）$y=\frac{5}{2x^2-4x+3}$；

（3）$y=\sqrt{1-2x}-x$；

（4） $y=\dfrac{x^2+4x+3}{x^2+x-6}$ ；

（5） $y=4-\sqrt{3+2x-x^2}$ ；

（6） $y=x+\sqrt{1-2x}$；

（7） $y=\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ ；

（8） $y=\sqrt{-x^2-6x-5}$

（9） $y=\dfrac{3x+1}{x-2}$；

（10） $y=\dfrac{2x^2-x+1}{2x-1}(x>\dfrac{1}{2})$.

19．（2023·全国·高三专题练习）知函数 $f\left(x\right)=\log_a\left(kx^2-2x+6\right)\left(a>0,a\neq 1\right)$

（1）若函数的定义域为 R，求实数 k 的取值范围；

（2）若函数 $f\left(x\right)$ 在 $[1,2]$ 上恒有意义，求 k 的取值范围；

（3）是否存在实数 k，使得函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $[2,3]$ 上为增函数，且最大值为 2？若存在，求出 k 的值；若不存在，请说明理由

20．（2023·全国·高三专题练习）如果一个函数的值域与其定义域相同，则称该函数为“同域函数”.已知函数 $f\left(x\right)=\sqrt{ax^2+bx+a+1}$ 的定义域为 $\left\{x\mid ax^2+bx+a+1\geq 0 \text{ 且 } x\geq 0\right\}$.

（Ⅰ）若 $a=-2$，$b=3$，求 $f\left(x\right)$ 的定义域；

（Ⅱ）当 $a=1$ 时，若 $f\left(x\right)$ 为“同域函数”，求实数 b 的值；

（Ⅲ）若存在实数 $a<0$ 且 $a\neq -1$，使得 $f\left(x\right)$ 为“同域函数”，求实数 b 的取值范围.

21．（2023·全国·高三专题练习）若 f（x）$=x^2-2x$，g（x）$=ax+2(a>0)$，$\forall x_1\in[-1，2]$，$\exists x_0\in[-1，2]$，使 $g(x_1)=f(x_0)$，求实数 a 的取值范围.

22．（2023·全国·高三专题练习）已知二元函数$f\left(x,\theta\right)=\dfrac{x\cos\theta}{x^2+x\sin\theta+2}\left(x\in R,\theta\in R\right)$，则$f\left(x,\theta\right)$的最大值和最小值分别为多少？

专题06 函数的概念

【考点预测】

1.函数的概念

(1)一般地，给定非空数集A，B，按照某个对应法则f，使得A中任意元素x，都有B中唯一确定的y与之对应，那么从集合A到集合B的这个对应，叫做从集合A到集合B的一个函数.记作：$x\to y=f(x)$，$x\in A$.集合A叫做函数的定义域，记为D，集合$\{y|y=f(x)$，$x\in A\}$叫做值域，记为C.

(2)函数的实质是从一个非空集合到另一个非空集合的映射.

(3)函数表示法：函数书写方式为$y=f(x)$，$x\in D$

(4)函数三要素：定义域、值域、对应法则.

(5)同一函数：两个函数只有在定义域和对应法则都相等时，两个函数才相同.

2.基本的函数定义域限制

求解函数的定义域应注意：

（1）分式的分母不为零;

（2）偶次方根的被开方数大于或等于零:

（3）对数的真数大于零，底数大于零且不等于1;

（4）零次幂或负指数次幂的底数不为零;

（5）三角函数中的正切$y=\tan x$的定义域是$\left\{x\middle|x\in R,\text{且}\, x\neq kx+\dfrac{\pi}{2},k\in Z\right\}$;

（6）已知$f\left(x\right)$的定义域求解$f\left[g\left(x\right)\right]$的定义域，或已知$f\left[g\left(x\right)\right]$的定义域求$f\left(x\right)$的定义域，遵循两点：①定义域是指自变量的取值范围；②在同一对应法则∫下，括号内式子的范围相同;

（7）对于实际问题中函数的定义域，还需根据实际意义再限制，从而得到实际问题函数的定义域.

3.基本初等函数的值域

(1) $y=kx+b\ (k\neq 0)$的值域是R.

(2) $y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$的值域是：当$a>0$时，值域为$\{y|y\geq\dfrac{4ac-b^2}{4a}\}$；当$a<0$时，值域为$\{y|y\geq\dfrac{4ac-b^2}{4a}\}$.

(3) $y=\dfrac{k}{x}\ (k\neq 0)$的值域是$\{y|y\neq 0\}$.

(4) $y=a^x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的值域是 $(0,+\infty)$.

(5) $y=\log_a x$ ($a>0$ 且 $a\neq 1$) 的值域是 R .

4.分段函数的应用

分段函数问题往往需要进行分类讨论，根据分段函数在其定义域内每段的解析式不同，然后分别解决，即分段函数问题，分段解决.

【题型归纳目录】

题型一：函数的概念

题型二：同一函数的判断

题型三：给出函数解析式求解定义域

题型四：抽象函数定义域

题型五：函数定义域的应用

题型六：函数解析式的求法

1.待定系数法（函数类型确定）

2.换元法或配凑法（适用于了 $f\left[g\left(x\right)\right]$型）

3.方程组法

4.求分段函数的解析式

5.抽象函数解析式

题型七：函数值域的求解

1.观察法

2.配方法

3.图像法（数形结合）

4.基本不等式法

5.换元法（代数换元与三角换元）

6.分离常数法

7.判别式法

8.单调性法

9.有界性法

10.导数法

题型八：分段函数的应用

【典例例题】

题型一：函数的概念

例 1．（2023·全国·高三专题练习）函数 $y=f(x)$的图象与直线 $x=1$ 的交点个数（　　）

A．至少 1 个　　　　B．至多 1 个　　　　C．仅有 1 个　　　　D．有 0 个、1 个或多个

答案：B

【解析】

分析：

利用函数的定义判断.

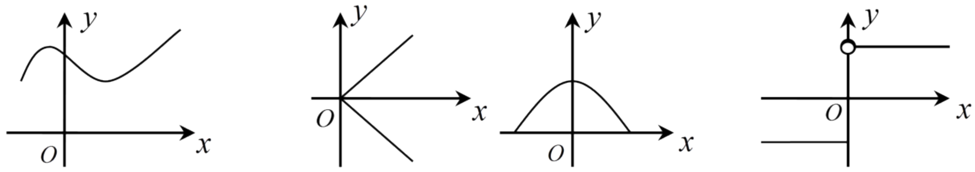
【详解】

若 1 不在函数 $f(x)$的定义域内，$y=f(x)$的图象与直线 $x=1$ 没有交点，

若 1 在函数 $f(x)$的定义域内，$y=f(x)$的图象与直线 $x=1$ 有 1 个交点，

故选：B.

例 2.（2023·全国·高三专题练习）下列四个图像中，是函数图像的是（　　）



（1）　（2）　（3）　（4）

A.（1）（2）　　B.（1）（2）（3）　　C.（1）（3）（4）　　D.（1）（2）（3）（4）

答案：C

【解析】

分析：

根据函数的定义即可得到答案.

【详解】

根据函数的定义，一个自变量值对应唯一一个函数值，或者多个自变量值对应唯一一个函数值，显然只有（2）不满足.

故选：C.

（多选题）例 3.（2023·全国·高三专题练习）下列对应关系 f，能构成从集合 M 到集合 N 的函数的是（　　）

A．$M=\left\{\frac{1}{2},1,\frac{3}{2}\right\}$，$N=\{-6,-3,1\}$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=-6$，$f(1)=-3$，$f\left(\frac{3}{2}\right)=1$

B．$M=N=\{x\,|\,x\geq-1\}$，$f(x)=2x+1$

C．$M=N=\{1,2,3\}$，$f(x)=2x+1$

D．$M=\mathbf{Z}$，$N=\{-1,1\}$，$f(x)=\begin{cases}-1,x\text{为奇数},\\1,x\text{为偶数}.\end{cases}$

答案：ABD

【解析】

根据函数的定义，结合函数的定义，逐项判定，即可求解.

【详解】

对于 A 中，集合 M 中的任意一个元素，按某种对应法则，在集合 N 中存在唯一的元素相对应，所以能构成从集合 M 到集合 N 的函数；

对于 B 中，集合 $M=\{x \mid x \geq -1\}$ 中的任意一个元素，按某种对应法则，在集合 $N=\{x \mid x \geq -1\}$ 中存在唯一的元素相对应，所以能构成从集合 M 到集合 N 的函数；

对于 C 中，集合 $M=\{1,2,3\}$，当 $x=3$ 时，可得 $f(3)=5 \notin N$，所以不能构成从集合 M 到集合 N 的函数；

对于 D 中，集合 $M=\mathbf{Z}$ 中的任一元素，按 $f(x)=\begin{cases}-1, x\text{为奇数}, \\ 1, x\text{为偶数}.\end{cases}$，在集合 $N=\{-1,1\}$ 有唯一的元素与之对应，所以能构成从集合 M 到集合 N 的函数.

故选：ABD

【点睛】

本题主要考查了函数的基本概念及判定，其中解答中熟记函数的基本概念，结合函数的定义逐项判定是解答的关键，着重考查推理与判定能力，属于基础题.

例 4.（2023·浙江·高三专题练习）将函数 $y=2\sin\frac{x}{2}\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$ 的图像绕着原点逆时针旋转角 α 得到曲线 T，当 $\alpha\in(0,\theta]$ 时都能使 T 成为某个函数的图像，则 θ 的最大值是（　　）

A．$\frac{\pi}{6}$　　　　B．$\frac{\pi}{4}$　　　　C．$\frac{3}{4}\pi$　　　　D．$\frac{2}{3}\pi$

答案：B

【解析】

分析：

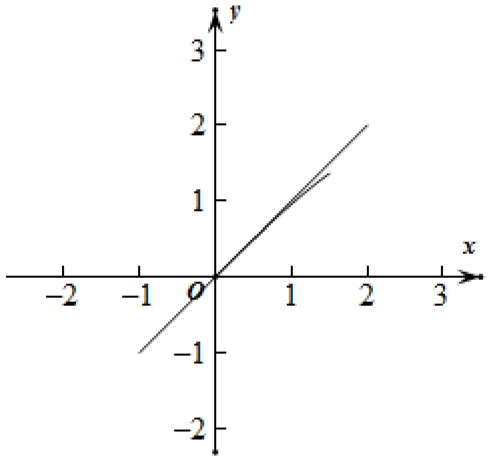
根据函数的概念，一个 x 只能对应一个 y，所以找到在原点处的切线，使图像旋转过程中切线不能超过 y 轴即可.

【详解】

解：$y'=\cos\frac{x}{2}$ 在原点处的切线斜率为 $k=1$，切线方程为 $y=x$

当 $y=2\sin\frac{x}{2}$ 绕着原点逆时针方向旋转时，若旋转角 θ 大于 $\frac{\pi}{4}$，则旋转所成的图像与 y 轴就会有两个交点，则曲线不再是函数的图像.

所以 θ 的最大值为 $\frac{\pi}{4}$.



故选：B.

【点睛】

思路点睛：函数的关键点：每一个x都有唯一的一个确定的数y和它对应，所以考虑函数的切线，当函数的切线超过y轴时，一个x会有2个y和它对应，则不满足情况，所以旋转角度即为切线的旋转角.

例5．（2023·全国·高三专题练习）存在函数$f(x)$，对于任意$x\in\mathbf{R}$都成立的下列等式的序号是________.

①$f(\sin 3x)=\sin x$；②$f(\sin 3x)=x^3+x^2+x$；③$f(x^2+2)=|x+2|$；④$f(x^2+4x)=|x+2|$.

答案：④

【解析】

分析：

根据函数定义逐项判断①②③，采用换元的方法求解④中$f(x)$的解析式并进行判断.

【详解】

①当$x=0$时，$f(0)=0$；当$x=\frac{\pi}{3}$时，$f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}$，与函数定义矛盾，不符合；

②当$x=0$时，$f(0)=0$；当$x=\frac{\pi}{3}$时，$f(0)=\left(\frac{\pi}{3}\right)^3+\left(\frac{\pi}{3}\right)^2+\frac{\pi}{3}$，与函数定义矛盾，不符合；

③当$x=-2$时，$f(6)=0$；当$x=2$时，$f(6)=4$，与函数定义矛盾，不符合；

④令$x+2=t$，所以$f(t^2-4)=|t|$，令$t^2-4=m\in[-4,+\infty)$，所以$t=\pm\sqrt{m+4}$，

所以$f(m)=\left|\pm\sqrt{m+4}\right|=\sqrt{m+4}\ (m\in[-4,+\infty))$，所以$f(x)=\sqrt{x+4}\ (x\in[-4,+\infty))$，符合，

故答案为：④.

【点睛】

关键点点睛：解答本题的关键在于对于函数定义的理解以及换元法求解函数解析式的运用，通过说明一个自变量x的值对应两个不同的$f(x)$的值，判断出不符合函数定义；同时在使用换元法求解函数解析式时，新元取值范围的分析不能遗漏.

【方法技巧与总结】

利用函数概念判断

题型二：同一函数的判断

例 6．（2023·全国·高三专题练习）下列各组函数是同一函数的是（　　）

①$f(x)=\sqrt{-2x^3}$与$g(x)=x\sqrt{-2x}$．②$f(x)=x$与$g(x)=\sqrt{x^2}$．③$f(x)=x^0$与$g(x)=\frac{1}{x^0}$．④$f(x)=x^2-2x-1$与$g(t)=t^2-2t-1$．

A．①②　　　　B．①③　　　　C．③④　　　　D．①④

答案：C

【解析】

分析：

根据函数的概念可知同一函数需满足定义域和对应关系均相同，因此结合题目逐个分析即可得到结果.

【详解】

对于①，$f(x)=\sqrt{-2x^3}$的定义域为$(-\infty,0)$，$g(x)=x\sqrt{-2x}$的定义域为$(-\infty,0)$，所以$f(x)=\sqrt{-2x^3}=-x\sqrt{-2x}$，则$f(x)$与$g(x)$的定义域相同，但对应关系不同，则不是同一函数；

对于②$g(x)=\sqrt{x^2}=|x|$，所以$f(x)=x$与$g(x)=\sqrt{x^2}$的对应关系不同，则不是同一函数；

对于③$f(x)=x^0$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，$g(x)=\frac{1}{x^0}$的定义域为$\{x|x\neq 0\}$，且$f(x)=1$，$g(x)=1$，因此函数$f(x)=x^0$与$g(x)=\frac{1}{x^0}$的定义域和对应关系均相同，则是同一函数；

对于④$f(x)=x^2-2x-1$的定义域为R，$g(t)=t^2-2t-1$的定义域为R，因此函数$f(x)=x^2-2x-1$与$g(t)=t^2-2t-1$的定义域和对应关系均相同，则是同一函数；

故选：C.

例 7．（2023·全国·高三专题练习）下列各组函数中，表示同一函数的是（　　）

A．$f(x)=e^{lnx}$，$g(x)=x$

B．$f(x)=\frac{x^2-4}{x+2},g(x)=x-2$

C． $f(x)=x^0$， $g(x)=1$

D． $f(x)=|x|$， $x\in\{-1$， 0， $1\}$， $g(x)=x^2$， $x\in\{-1$， 0， $1\}$

答案：D

【解析】

分析：

根据函数的定义域和同一函数的定义逐一判断可得选项.

【详解】

解：对于 A： $f(x)$ 的定义域是 $(0,+\infty)$， $g(x)$ 的定义域是 R，两个函数的定义域不相同，不是同一函数，

对于 B： $f(x)=x-2$， $(x\neq-2)$， $g(x)$ 的定义域是 R，两个函数的定义域不相同，不是同一函数，

对于 C： $f(x)$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq 0\}$， $g(x)$ 的定义域是 R，两个函数的定义域不相同，不是同一函数，

对于 D： $f(x)$ 对应点的坐标为 $\{(-1,1)$， $(0,0)$， $(1,1)\}$， $g(x)$ 对应点的坐标为 $\{(-1,1)$， $(0,0)$， $(1,1)\}$，两个函数对应坐标相同，是同一函数，

故选：D.

（多选题）例 8．（2023·全国·高三专题练习）下列各组函数中表示同一个函数的是（　　）

A． $f(x)=|2x|$， $g(x)=\begin{cases}2x, x\geq 0\\ -2x, x<0\end{cases}$

B． $f(x)=x^2$， $g(t)=t^2$

C． $f(x)=x+\dfrac{x^0}{3}$， $g(x)=x+\dfrac{1}{3}$

D． $f(x)=x+4$， $g(x)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$

答案：AB

【解析】

分析：

确定函数的定义域与对应法则是否相同即可判断.

【详解】

A 中两个函数定义域都是 R，对应法则都是乘以 2 后取绝对值，是同一函数；

B 中两个函数定义域都是 R，对应法则都是取平方，是同一函数；

C 中 $f(x)$ 定义域是 $\{x\,|\,x\neq 0\}$， $g(x)$ 的定义域是 R，不是同一函数；

D 中 $f(x)$ 的定义域是 R， $g(x)$ 的定义域是 $\{x\,|\,x\neq 4\}$，不是同一函数.

故选：AB.

（多选题）例 9．（2023·全国·高三专题练习）在下列四组函数中， $f(x)$ 与 $g(x)$ 不表示同一函数的是（　　）

A． $f(x)=x-1$， $g(x)=\frac{x^2-1}{x+1}$

B． $f(x)=|x+1|$， $g(x)=\begin{cases}x+1, x\geq -1\\ -x-1, x<-1\end{cases}$

C． $f(x)=1$， $g(x)=(x+1)^0$

D． $f(x)=x$， $g(x)=(\sqrt{x})^2$

答案：ACD

【解析】

分析：

根据同一函数的要求，两个函数的定义域和对应法则应相同，对四个选项中的两个函数分别进行判断，得到答案.

【详解】

A 选项，$f(x)$定义域为$\mathbf{R}$， $g(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，所以二者不是同一函数，故 A 符合题意；

B 选项，$f(x)=|x+1|=\begin{cases}x+1 & x\geq -1\\ -1-x & x<-1\end{cases}$，与$g(x)$定义域相同，对应法则也相同，所以二者是同一函数，故 B 不符合题意；

C 选项，$f(x)$定义域为$\mathbf{R}$， $g(x)$的定义域为$(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，所以二者不是同一函数， 故 C 符合题意；

D 选项，$f(x)$定义域为$\mathbf{R}$， $g(x)$的定义域为$[0,+\infty)$，所以二者不是同一函数，故 D 符合题意；

故选：ACD.

【点睛】

方法点睛：函数的三要素是定义域，对应关系（解析式），值域，而定义域和对应关系决定值域，所以判断两个函数是否相同只需要判断两个要素：定义域，对应法则是否相同即可.

【方法技巧与总结】

当且仅当给定两个函数的定义域和对应法则完全相同时，才表示同一函数，否则表示不同的函数.

题型三：给出函数解析式求解定义域

例 10．（2023·全国·高三专题练习）已知等腰三角形的周长为40cm，底边长$y(cm)$是腰长$x(cm)$的函数，则函数的定义域为(　　)

A．$(10,20)$　　B．$(0,10)$　　C．$(5,10)$　　D．$[5,10)$

答案：A

【解析】

分析：

利用两边之和大于第三边及边长为正数可得函数的定义域.

【详解】

由题设有 $y=40-2x$，

由 $\begin{cases}40-2x>0\\x+x>40-2x\end{cases}$ 得 $10<x<20$，故选 A.

【点睛】

本题考查应用题中函数的定义域，注意根据实际意义和几何图形的性质得到自变量的取值范围.

例 11.（2023·全国·河源市河源中学模拟预测）函数 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log_2\left(2x^2-9x+14\right)-2}}$ 的定义域为___________.

答案：$(-\infty,2)\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$

【解析】

分析：

根据偶次根号下的被开方数大于等于零，分母不为 0，根据真数列出不等式，进行求解再用集合或区间的形式表示出来.

【详解】

由题意可知 $\log_2\left(2x^2-9x+14\right)-2>0$，而以 2 为底的对数函数是单调递增的，

因此 $2x^2-9x+14>4$，求解可得 $x<2$ 或 $x>\dfrac{5}{2}$.

故答案为：$(-\infty,2)\cup\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$.

例 12.（2023·北京·模拟预测）函数 $f(x)=\sqrt{2x+1}+\lg(2-x)$ 的定义域是_______.

答案：$[-\dfrac{1}{2},2)$

【解析】

分析：

依据题意列出不等式组，解之即可得到函数的定义域

【详解】

由题意可得，$\begin{cases}2x+1\geq 0\\2-x>0\end{cases}$，解之得 $-\dfrac{1}{2}\leq x<2$

则函数 $f(x)=\sqrt{2x+1}+\lg(2-x)$ 的定义域是 $[-\dfrac{1}{2},2)$

故答案为：$[-\frac{1}{2},2)$

例 13．（2023·上海市奉贤中学高三阶段练习）函数 $f\left(x\right)=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1}$ 的定义域为

____________.

答案：$(-\infty,0]$

【解析】

分析：

根据具体函数的定义域求法，结合指数函数的单调性求解.

【详解】

解：由 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}-1\geq 0$，

得 $\left(\frac{1}{2}\right)^{x}\geq 1=\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$，

所以 $x\leq 0$，

所以函数的定义域为 $(-\infty,0]$，

故答案为：$(-\infty,0]$

【方法技巧与总结】

对求函数定义域问题的思路是：

（1）先列出使式子 $f\left(x\right)$ 有意义的不等式或不等式组；

（2）解不等式组；

（3）将解集写成集合或区间的形式.

题型四：抽象函数定义域

例 14．（2023·北京·高三专题练习）已知函数 $y=f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left(0,1\right)$，则函数 $F\left(x\right)=f\left(\left|2^{x}-1\right|\right)$ 的定义域为（　　）

A．$\left(-\infty,1\right)$　　B．$\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,1\right)$　　C．$\left(0,+\infty\right)$　　D．$\left[0,1\right)$

答案：B

【解析】

分析：

抽象函数的定义域求解，要注意两点，一是定义域是 x 的取值范围；二是同一对应法则下，取值范围一致.

【详解】

$\because y=f(x)$ 的定义域为 $(0,1)$，$\therefore 0<\left|2^x-1\right|<1$，即 $\begin{cases}-1<2^x-1<1\\2^x\neq 1\end{cases}$，

$\therefore \begin{cases}x<1\\x\neq 0\end{cases}$，解得：$x<1$ 且 $x\neq 0$，

$\therefore F(x)=f\left(\left|2^x-1\right|\right)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,1)$.

故选：B.

例 15.（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $y=f\left(x^2-4\right)$ 的定义域是 $[-1,5]$，则函数 $y=f(2x+1)$ 的定义域为______.

答案：$\left[-\frac{5}{2},10\right]$

【解析】

分析：

由函数 $y=f\left(x^2-4\right)$ 的定义域是 $[-1,5]$，可求 x^2-4 的值域，即函数 $f(x)$ 的定义域，再由 $2x+1\in[-4,21]$，即可求得 $y=f(2x+1)$ 的定义域.

【详解】

$y=f\left(x^2-4\right)$ 的定义域是 $[-1,5]$，则 $x^2-4\in[-4,21]$，

即函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-4,21]$，

令 $2x+1\in[-4,21]$，解得 $x\in\left[-\frac{5}{2},10\right]$.

则函数 $y=f(2x+1)$ 的定义域为 $\left[-\frac{5}{2},10\right]$.

故答案为：$\left[-\frac{5}{2},10\right]$.

【点睛】

本题主要考查了抽象函数定义域的求法，注意理解函数 $f(x)$ 的定义域与函数 $f[g(x)]$ 定义域的区别.

例 16.（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $y=f(x-1)$ 的定义域为 $[1,3]$，则函数 $y=f\left(\log_3 x\right)$ 的定义域为（ ）

A．$[0,1]$　　B．$[1,9]$　　C．$[0,2]$　　D．$[0,9]$

答案：B

【解析】

分析：

根据$x-1$与$\log_3 x$的取值范围一致，从而得到$\log_3 x\in[0,2]$，进而求得函数的定义域.

【详解】

由$x\in[1,3]$，得$x-1\in[0,2]$，

所以$\log_3 x\in[0,2]$，所以$x\in[1,9]$.

故选：B.

例 17．（2023·全国·高三专题练习）若函数$f(x)$的定义域为$[-1,2]$，则函数$g(x)=\dfrac{f(x-2)}{\sqrt{x-1}}$的定义域是（　　）

A．$[1,4]$　　B．$(1,4]$　　C．$[1,2]$　　D．$(1,2]$

答案：B

【解析】

根据题意可得出关于x的不等式组，由此可解得函数$g(x)$的定义域.

【详解】

由于函数$f(x)$的定义域为$[-1,2]$，对于函数$g(x)=\dfrac{f(x-2)}{\sqrt{x-1}}$，有$\begin{cases}-1\le x-2\le 2\\ x-1\ne 0\end{cases}$，解得$1<x\le 4$.

因此，函数$g(x)=\dfrac{f(x-2)}{\sqrt{x-1}}$的定义域是$(1,4]$.

故选：B.

例 18．（2023·全国·高三专题练习）已知函数$f(x)$的定义域为$[3,6]$，则函数$y=\dfrac{f(2x)}{\sqrt{\log_{\frac{1}{2}}(2-x)}}$的定义域为（　　）

A．$\left[\dfrac{3}{2},+\infty\right)$　　B．$\left[\dfrac{3}{2},2\right)$　　C．$\left(\dfrac{3}{2},+\infty\right)$　　D．$\left[\dfrac{1}{2},2\right)$

答案：B

【解析】

分析：

由函数的定义域得到$2x$的范围，根据分母不为 0 及被开方数非负得到关于x的不等式，求出不等式的解集.

【详解】

解：由函数$f(x)$的定义域是$[3,6]$，得到$3\leqslant 2x\leqslant 6$，

故 $\begin{cases}3\le 2x\le 6\\ 2-x>0\\ log_{\frac{1}{2}}(2-x)>0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{3}{2}\le x\le 3\\ 2>x\\ 1<x<2\end{cases}$

解得：$\frac{3}{2}\le x<2$；

所以原函数的定义域是：$\left[\frac{3}{2},2\right)$.

故选：B .

【点睛】

本题考查学生掌握复合函数的定义域，考查了对数不等式的解法，属于基础题.

例 19.（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)$ 是定义在 $[2,+\infty)$ 的单调递增函数，若 $f\left(2a^2-5a+4\right)<f\left(a^2+a+4\right)$，则实数 a 的取值范围是（　　）.

A．$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty)$　　　　B．$[2,6)$

C．$\left(0,\frac{1}{2}\right]\cup[2,6)$　　　　D．$(0,6)$

答案：C

【解析】

根据函数的定义域以及单调性可得 $\begin{cases}2a^2-5a+4\ge 2\\ a^2+a+4\ge 2\\ 2a^2-5a+4<a^2+a+4\end{cases}$，解不等式组即可.

【详解】

因为函数 $f(x)$ 是定义在 $[2,+\infty)$ 的单调递增函数，且 $f\left(2a^2-5a+4\right)<f\left(a^2+a+4\right)$，

所以 $\begin{cases}2a^2-5a+4\ge 2\\ a^2+a+4\ge 2\\ 2a^2-5a+4<a^2+a+4\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a\le\frac{1}{2}\text{或}a\ge 2\\ a\in R\\ 0<a<6\end{cases}$，

解得 $0<a\le\frac{1}{2}$ 或 $2\le a<6$.

故选：C.

例 20.（2023·全国·高三专题练习）求下列函数的定义域：

(1)已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $[-2,2]$，求函数 $y=f\left(x^2-1\right)$ 的定义域.

(2)已知函数 $y=f(2x+4)$ 的定义域为 $[0,1]$，求函数 $f(x)$ 的定义域.

(3)已知函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left[-1,2\right]$，求函数 $y=f(x+1)-f(x^2-1)$ 的定义域.

答案：(1) $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$；

(2) $\left[4,6\right]$；

(3) $\left[-\sqrt{3},1\right]$.

【解析】

分析：

抽象函数定义域求解，需注意两点：

①定义域是函数解析式中自变量"x"的范围；

②对于同一个对应关系"f"，"f"后括号里面式子整体范围相同.

(1) $y=f\left(x^2-1\right)$ 中 x^2-1 的范围和 $f\left(x\right)$ 中 x 范围相同， $f\left(x\right)$ 中 x 范围是 $\left[-2,2\right]$；

(2) $f\left(x\right)$ 中 x 的范围和 $y=f\left(2x+4\right)$ 中 $2x+4$ 范围相同， $y=f\left(2x+4\right)$ 中 x 范围是 $\left[0,1\right]$；

(3) $y=f(x+1)-f(x^2-1)$ 中 $x+1$ 与 x^2-1 均与 $f\left(x\right)$ 中 x 范围相同， $f\left(x\right)$ 中 x 的范围是 $\left[-1,2\right]$.

(1)

令 $-2\le x^2-1\le 2$ 得 $-1\le x^2\le 3$，即 $0\le x^2\le 3$，从而 $-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$，

∴函数 $y=f(x^2-1)$ 的定义域为 $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$.

(2)

∵ $y=f(2x+4)$ 的定义域为 $[0,1]$，即在 $y=f(2x+4)$ 中 $x\in[0,1]$，令 $t=2x+4$， $x\in[0,1]$，

则 $t\in[4,6]$，即在 $f(t)$ 中， $t\in[4,6]$，

∴ $f\left(x\right)$ 的定义域为 $[4,6]$.

(3)

由题得 $\begin{cases}-1\le x+1\le 2\\ -1\le x^2-1\le 2\end{cases}$， $\therefore -\sqrt{3}\le x\le 1$，

∴函数 $y=f(x+1)-f(x^2-1)$ 的定义域为 $[-\sqrt{3},1]$.

【方法技巧与总结】

1.抽象函数的定义域求法: 此类型题目最关键的就是法则下的定义域不变，若 $f(x)$ 的定义域为 $(a，b)$，求 $f[g(x)]$ 中 $a<g(x)<b$ 的解 x 的范围，即为 $f[g(x)]$ 的定义域，口诀：定义域指的是 x 的范围，括号范围相同．已知 $f(x)$ 的定义域，求四则运算型函数的定义域

2．若函数是由一些基本函数通过四则运算结合而成的，其定义域为各基本函数定义域的交集，即先求出各个函数的定义域，再求交集.

题型五：函数定义域的应用

例 21．（2023·全国·高三专题练习）若函数 $f(x)=\dfrac{2^{x^2+1}+a}{\ln\left(2^{x^2+1}+a\right)}$ 的定义域为 R，则实数 a 的取值范围是（　　）

A．$(-2,+\infty)$　　B．$(-1,+\infty)$　　C．$(-2,-1)$　　D．$(-2,-1)\cup(-1,+\infty)$

答案：B

【解析】

分析：

由题意得到 $2^{x^2+1}+a\geq 2+a$ 恒成立，根据定义域为 R 得到 $2+a>0$ 恒成立，且满足 $\ln\left(2^{x^2+1}+a\right)\neq 0\Rightarrow 2^{x^2+1}+a\neq 1$，$2^{x^2+1}\neq 1-a$，解出 a 得范围,二者取交集即可.

【详解】

因为 $2^{x^2+1}+a\geq 2+a$，$f(x)$ 的定义域为 R，

所以首先满足 $2+a>0$ 恒成立，$\therefore a>-2$，

再者满足 $\ln\left(2^{x^2+1}+a\right)\neq 0\Rightarrow 2^{x^2+1}+a\neq 1$，变形得到 $2^{x^2+1}\neq 1-a$,Q $2^{x^2+1}\in[2,+\infty)\therefore 1-a<2$

$\therefore a>-1$ ，最终得到 $a>-1$.

故选：B.

例 22．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)=\sqrt{(m+1)x^2-(m+1)x+\dfrac{3}{4}}$ 的定义域为 R，则 m 的取值范围是（　　）

A．$-1<m<2$　　B．$-1<m\leq 2$　　C．$-1\leq m\leq 2$　　D．$-1\leq m<2$

答案：C

【解析】

分析：

由 $(m+1)x^2-(m+1)x+\dfrac{3}{4}\geq 0$ 在 R 上恒成立，分 $m+1=0$ 和 $m+1\neq 0$ 结合二次函数性质求解即可..

【详解】

由题意得：$(m+1)x^2-(m+1)x+\dfrac{3}{4}\geq 0$ 在 R 上恒成立.

$m+1=0$ 即 $m=-1$ 时，$f(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 恒成立，符合题意，

$m+1\neq 0$ 时，只需 $\begin{cases}m+1>0\\ \Delta=(m+1)^2-3(m+1)\leq 0\end{cases}$，

解得：$-1<m\leq 2$，

综上：$m \in [-1,2]$，

故选：C.

（多选题）例 23．（2023·全国·高三专题练习）（多选）若函数 $y=\sqrt{\frac{a}{x}+1}$ 在区间 $[-2,-1]$ 上有意义，则实数 a 可能的取值是（　　）

A．-1　　　　B．1　　　　C．3　　　　D．5

答案：AB

【解析】

分析：

该题可等价于 $\frac{a}{x}+1\ge 0$ 在区间 $[-2,-1]$ 上恒成立，分离参数即可求得.

【详解】

函数 $y=\sqrt{\frac{a}{x}+1}$ 在区间 $[-2,-1]$ 上有意义，

等价于 $\frac{a}{x}+1\ge 0$ 在区间 $[-2,-1]$ 上恒成立，

由 $x<0$ 得 $a\le -x$ 在区间 $[-2,-1]$ 上恒成立，所以 $a\le 1$，

故选：AB．

例 24．（2023·全国·高三专题练习）函数 $y=\frac{1}{\sqrt{ax^2+ax+1}}$ 的定义域是 R，则 a 的取值范围是__________.

答案：$[0,4)$

【解析】

根据函数的解析式，可知当定义域为 R 时，说明 $ax^2+ax+1>0$ 在 R 上恒成立，则对 a 进行分类讨论，确定满足条件的 a 的范围.

【详解】

由题意可得 $ax^2+ax+1>0$ 在 R 上恒成立.

①当 $a=0$ 时，则 $1>0$ 恒成立，

$\therefore a=0$ 符合题意；

②当 $a\ne 0$ 时，

则 $\begin{cases} a>0 \\ a^2-4a<0 \end{cases}$，解得 $0<a<4$.

综上可得 $0\le a<4$，

$\therefore$ 实数 a 的取值范围为 $[0,4)$.

故答案为：$[0,4)$.

【点睛】

不等式$ax^2+bx+c>0$的解是全体实数(或恒成立)的条件是：当a=0时，b=0，$c>0$；当$a\neq0$时，$\begin{cases}a>0\\\Delta<0\end{cases}$； 不等式$ax^2+bx+c<0$的解是全体实数(或恒成立)的条件是当$a$=0时，$b$=0，$c<0$；当$a\neq0$时，$\begin{cases}a<0\\\Delta<0\end{cases}$.

例 25.（2023·上海·高三专题练习）已知函数$f(x)=\lg\left(\sqrt{x^2+1}+ax\right)$的定义域为$R$，则实数$a$的取值范围是____________.

答案：$[-1,1]$

【解析】

分析：

根据对数函数的真数大于 0，得出$\sqrt{x^2+1}+ax>0$恒成立，利用构造函数法结合图象求出不等式恒成立时 a 的取值范围.

【详解】

解：函数 f（x）＝lg（$\sqrt{x^2+1}+ax$）的定义域为 **R**，

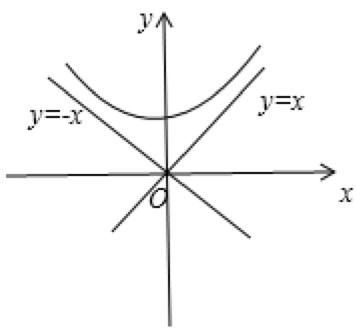
∴$\sqrt{x^2+1}+ax>0$ 恒成立，

∴$\sqrt{x^2+1}>-ax$ 恒成立，

设$y=\sqrt{x^2+1}$，$x\in$**R**，$y^2-x^2=1$，$y\geq1$；它表示焦点在 y 轴上的双曲线的一支，且渐近线方程为 $y=\pm x$；

令 $y=-ax$，$x\in$**R**；它表示过原点的直线；

由题意知，直线 $y=-ax$ 的图象应在 $y=\sqrt{x^2+1}$ 的下方，画出图形如图所示；



∴$0\leq-a\leq1$ 或 $-1\leq-a<0$，

解得 $-1\leq a\leq1$；

∴实数 a 的取值范围是$[-1，1]$.

故答案为$[-1，1]$.

【点睛】

本题考查了不等式恒成立问题，考查数形结合思想与转化思想，是中档题.

【方法技巧与总结】对函数定义域的应用，是逆向思维问题，常常转化为恒成立问题求解，必要时对参数进行分类讨论.

题型六：函数解析式的求法

【方法技巧与总结】求函数解析式的常用方法如下：

（1）当已知函数的类型时，可用待定系数法求解.

（2）当已知表达式为 $f\left[g(x)\right]$时，可考虑配凑法或换元法，若易将含 x 的式子配成 $g(x)$，用配凑法.若易换元后求出 x ，用换元法.

（3）若求抽象函数的解析式，通常采用方程组法.

（4）求分段函数的解析式时，要注意符合变量的要求.

（5）当出现大基团换元转换繁琐时，可考虑配凑法求解.

（6）若已知成对出现 $f(x)$， $f(\frac{1}{x})$ 或 $f(x)$， $f(-x)$，类型的抽象函数表达式，则常用解方程组法构造另一个方程，消元的方法求出 $f(x)$.

1.待定系数法（函数类型确定）

（多选题）例 26.（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)$ 是一次函数，满足 $f\left(f(x)\right)=9x+8$，则 $f(x)$ 的解析式可能为（　　）

A． $f(x)=3x+2$　　　　B． $f(x)=3x-2$

C． $f(x)=-3x+4$　　　　D． $f(x)=-3x-4$

答案：AD

【解析】

分析：

设 $f(x)=kx+b$，代入 $f\left(f(x)\right)=9x+8$ 列方程组求解即可.

【详解】

设 $f(x)=kx+b$，

由题意可知 $f\left(f(x)\right)=k\left(kx+b\right)+b=k^2x+kb+b=9x+8$，

所以 $\begin{cases}k^2=9\\kb+b=8\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=3\\b=2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k=-3\\b=-4\end{cases}$，

所以 $f(x)=3x+2$ 或 $f(x)=-3x-4$.

故选：AD.

例 27．（2023·全国·高三专题练习）设 $y=f(x)$是一次函数，若 $f(0)=1$，且 $f(1), f(4), f(13)$ 成等比数列，则 $f(2)+f(4)+\cdots+f(2n)$ 等于（　　）

A．$n(2n+3)$　　　　B．$n(n+4)$

C．$2n(2n+3)$　　　　D．$2n(n+4)$

答案：A

【解析】

由已知可以假设一次函数为 $y=kx+1$，在根据 $f(1), f(4), f(13)$ 成等比数列，得出 $k=3$，利用等差数列的求和公式求解即可．

【详解】

由已知，假设 $f(x)=kx+b$，$(k \neq 0)$

$\because f(0)=1=k\times 0+b$，$\therefore b=1$．

$\because f(1), f(4), f(13)$ 成等比数列，

且 $f(1)=k+1, f(4)=4k+1, f(13)=13k+1$．

$\therefore k+1$，$4k+1$，$13k+1$ 成等比数列，即 $(4k+1)^2=(k+1)(13k+1)$，

$16k^2+1+8k=13k^2+14k+1$，从而解得 $k=0$（舍去），$k=2$，

$f(2)+f(4)+\cdots+f(2n)$

$=(2\times 2+1)+(4\times 2+1)+\ldots+(2n\times 2+1)$

$=(2+4+\ldots+2n)\times 2+n$

$=4\times \frac{n(n+1)}{2}+n=2n(n+1)+n$

$=3n+2n^2=n(2n+3)$．

故选：A．

【点睛】

本题考查了等比数列、等差数列和函数的综合应用，考查了学生的计算能力，解题时要认真审题，仔细解答，避免错误，属于中档题．

例 28．（2023·全国·高三专题练习）已知 $f(x)$ 为二次函数，$f(0)=0$，$f(2x+1)-f(x)=x^2+3x+2$，求 $f(x)$ 的解析式．

答案：$f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x$

【解析】

分析：

设 $f(x)=ax^2+bx+c$，由已知建立关系求出 a,b,c 即可．

【详解】

解：因为 $f(x)$ 为二次函数，所以设 $f(x)=ax^2+bx+c$，因为 $f(0)=0$，所以 $c=0$，

所以 $f(x)=ax^2+bx$，

所以 $f(2x+1)=a(2x+1)^2+b(2x+1)=4ax^2+(4a+2b)x+(a+b)$，

因为 $f(2x+1)-f(x)=x^2+3x+2$，所以 $3ax^2+(4a+b)x+(a+b)=x^2+3x+2$，

所以 $3a=1$，$4a+b=3$，$a+b=2$，所以 $a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{5}{3}$，所以 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x$.

2.换元法或配凑法（适用于了 $f[g(x)]$ 型）

例 29.（2023·陕西西安·高三阶段练习（文））已知 $f(x+1)=\ln x^2$，则 $f(x)=$（　　）

A．$\ln(x+1)^2$　　B．$2\ln(x+1)$

C．$2\ln|x-1|$　　D．$\ln(x^2-1)$

答案：C

【解析】

分析：

根据给定条件，利用换元法求出 $f(x)$ 即可作答.

【详解】

因 $f(x+1)=\ln x^2$，则设 $x+1=t$，有 $x=t-1$，而 $x\neq 0$，则有 $t\neq 1$，

于是得 $f(t)=\ln(t-1)^2=2\ln|t-1|$，

所以 $f(x)=2\ln|x-1|, x\neq 1$，

故选：C

例 30.（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f\left(\frac{1-x}{1+x}\right)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$，则 $f(x)$ 的解析式为（　　）

A．$f(x)=\frac{2x}{1+x^2}(x\neq -1)$　　B．$f(x)=-\frac{2x}{1+x^2}(x\neq -1)$

C．$f(x)=\frac{x}{1+x^2}(x\neq -1)$　　D．$f(x)=-\frac{x}{1+x^2}(x\neq -1)$

答案：A

【解析】

分析：

令 $t=\frac{1-x}{1+x}$，则 $x=\frac{1-t}{1+t}$，代入已知解析式可得 $f(t)$ 的表达式，再将 t 换成 x 即可求解.

【详解】

令 $t=\frac{1-x}{1+x}$，则 $x=\frac{1-t}{1+t}$，

所以 $f(t)=\dfrac{1-\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^2}{1+\left(\dfrac{1-t}{1+t}\right)^2}=\dfrac{2t}{t^2+1}(t\neq -1)$，

所以 $f(x)=\dfrac{2x}{1+x^2}(x\neq -1)$，

故选：A.

例 31．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(x)$ 满足 $f(\cos x-1)=\cos 2x-1$，则 $f(x)$ 的解析式为（　　）

A．$f(x)=2x^2+4x(-2\leq x\leq 0)$　　　　B．$f(x)=2x^2+4x(x\in R)$

C．$f(x)=2x-1(-2\leq x\leq 0)$　　　　D．$f(x)=2x-1(x\in R)$

答案：A

【解析】

利用换元法，设 $\cos x-1=t\in[-2,0]$，将原函数转化成关于 t 的关系式，进行整理即得 $f(x)$ 的解析式.

【详解】

函数 $f(x)$ 满足 $f(\cos x-1)=\cos 2x-1=2\cos^2 x-1-1=2\cos^2 x-2$，

设 $\cos x-1=t$，则 $\cos x=t+1$，由 $\cos x\in[-1,1]$ 知 $t\in[-2,0]$，

故原函数可转化为 $f(t)=2(t+1)^2-2=2t^2+4t$，$t\in[-2,0]$，

即 $f(x)$ 的解析式为 $f(x)=2x^2+4x(-2\leq x\leq 0)$.

故选：A.

例 32．（2023·全国·高三专题练习）已知函数 $f(\sqrt{x}+2)=x+4\sqrt{x}+5$，则 $f(x)$ 的解析式为______

答案：$f(x)=x^2+1(x\geq 2)$

【解析】

分析：

令 $\sqrt{x}+2=t$，则 $t\geq 2$，且 $x=(t-2)^2$，将已知条件转化为关于 t 的表达式，再将 t 换成 x 即可求解.

【详解】

令 $\sqrt{x}+2=t$，则 $t\geq 2$，且 $x=(t-2)^2$，

所以 $f(t)=(t-2)^2+4(t-2)+5=t^2+1$，$(t\geq 2)$

所以 $f(x)=x^2+1(x\geq 2)$，

故答案为：$f(x)=x^2+1(x\geq 2)$.

例 33．（2023·全国·高三专题练习）已知 $f\left(x-\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，则函数 $f(x)$=_______，$f(3)=$_______.

答案：　x^2+2　11

【解析】

分析：

利用换元法可求出 $f(x)$，进一步可得 $f(3)$.

【详解】

令 $x-\frac{1}{x}=t$，则 $x^2+\frac{1}{x^2}=(x-\frac{1}{x})^2+2=t^2+2$，

所以 $f(t)=t^2+2$，所以 $f(x)=x^2+2$，

所以 $f(3)=3^2+2=11$.

故答案为：x^2+2；11.

例 34．（2023·全国·高三专题练习）已知 $f(|x-1|)=x^2-2x+3$，则 $f(3)=$（　　）

A．6　　B．3　　C．11　　D．10

答案：C

【解析】

利用拼凑法求出 $f(x)$ 解析式，即可得出所求.

【详解】

$\because f(|x-1|)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2=|x-1|^2+2$，

$\therefore f(x)=x^2+2$，

$\therefore f(3)=3^2+2=11$.

故选：C.

例 35．（2023·全国·高三专题练习）已知 $f(x^6)=\log_2 x$，则 $f(8)=$（　　）

A．$\frac{1}{2}$　　B．$\frac{1}{4}$　　C．$\frac{1}{6}$　　D．$\frac{1}{8}$

答案：A

【解析】

先利用换元法求函数解析式，再代入自变量计算函数值即可.

【详解】

由题设可知：$f(x^6)=\log_2 x$，令 $x^6=t$，$t>0$，则 $x=t^{\frac{1}{6}}$，则 $f(t)=\log_2 t^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{6}\log_2 t$，