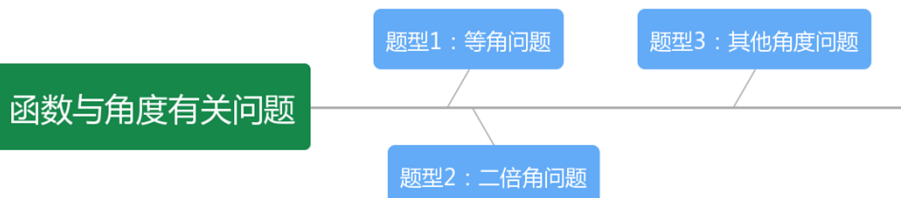


## 专题 19 函数与角度有关问题

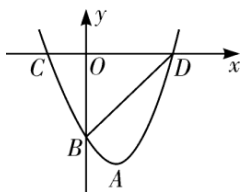


### 知识导航



### 方法技巧

1. (特殊角) 若点  $P$  在抛物线上, 且  $\angle PBD=90^\circ$ , 求点  $P$  的坐标.



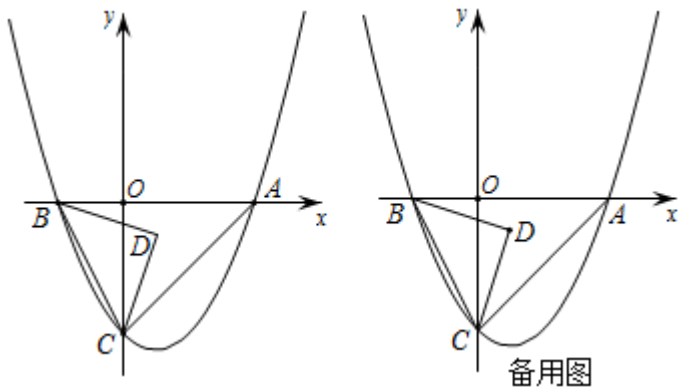
利用直线  $BD$  的解析式及勾股定理, 数形结合, 列出有关的方程, 即可求出点  $P$  的坐标.



### 题型精讲

#### 题型一：等角问题

【例 1】(2021·四川自贡市) 如图, 抛物线  $y=(x+1)(x-a)$  (其中  $a>1$ ) 与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点, 交  $y$  轴于点  $C$ .



(1) 直接写出  $\angle OCA$  的度数和线段  $AB$  的长 (用  $a$  表示) ;

(2) 若点  $D$  为  $\triangle ABC$  的外心, 且  $\triangle BCD$  与  $\triangle ACO$  的周长之比为  $\sqrt{10}:4$ , 求此抛物线的解析式;

(3) 在 (2) 的前提下, 试探究抛物线  $y=(x+1)(x-a)$  上是否存在一点  $P$ , 使得  $\angle CAP=\angle DBA$ ? 若存在, 求出点  $P$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

**【答案】** (1)  $\angle OCA=45^\circ$ ,  $AB=a+1$ ; (2)  $y=x^2-x-2$ ; (3) 存在,  $P_1(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4})$ ,  $P_2(1, -2)$ .

**【分析】**

(1) 根据二次函数解析式可得  $A(a, 0)$ ,  $C(0, -a)$ ,  $B(-1, 0)$ , 即可得出  $OA=OB=a$ ,  $OB=1$ , 即可证明  $\triangle OCA$  是等腰直角三角形, 可得  $\angle OCA=45^\circ$ , 根据线段的和差关系可表示  $AB$  的长;

(2) 如图, 作  $\triangle ABC$  的外接圆  $\odot D$ , 根据等腰直角三角形的性质可得  $AC=\sqrt{2}a$ , 利用两点间距离公式可用  $a$  表示出  $BC$  的长, 根据圆周角定理可得  $\angle D=2\angle OAC=90^\circ$ , 可得  $\triangle DBC$  是等腰直角三角形, 即可证明  $\triangle DBC\sim\triangle OCA$ , 根据相似三角形周长之比等于相似比列方程求出  $a$  值即可得答案;

(3) 如图, 过点  $D$  作  $DH\perp AB$  于  $H$ , 过点  $C$  作  $AC$  的垂线, 交  $x$  轴于  $F$ , 过点  $O$  作  $OG\perp AC$  于  $G$ , 连接  $AP$  交  $CF$  于  $E$ , 可得  $\triangle OCF$  是等腰直角三角形, 利用待定系数法可得直线  $CF$  的解析式, 根据外心的定义及等腰直角三角形的性质可求出点  $D$  坐标, 即可得出  $BH$ 、 $DH$  的长, 根据  $\angle CAP=\angle DBA$ ,  $\angle BHD=\angle ACE=90^\circ$  可证明  $\triangle BHD\sim\triangle ACE$ , 根据相似三角形的性质可求出  $CE$  的长, 根据两点间距离公式可得点  $E$  坐标, 利用待定系数法可得直线  $AE$  解析式, 联立直线  $AE$  与抛物线的解析式求出点  $P$  坐标即可得答案.

**【详解】**

(1)  $\because$  抛物线  $y=(x+1)(x-a)$  (其中  $a>1$ ) 与  $x$  轴交于  $A$ 、 $B$  两点, 交  $y$  轴于点  $C$ .

$\therefore$  当  $x=0$  时,  $y=-a$ ,

当  $y=0$  时,  $(x+1)(x-a)=0$ ,

解得:  $x_1=-1$ ,  $x_2=a$ ,

$\therefore A(a, 0)$ ,  $C(0, -a)$ ,  $B(-1, 0)$ ,

$\therefore OB=1$ ,  $OA=OC=a$ ,

$\therefore \triangle OCA$  是等腰直角三角形,

$\therefore \angle OCA=45^\circ$ ,  $AB=OA+OB=a+1$ .

(2) 如图, 作  $\triangle ABC$  的外接圆  $\odot D$ ,

∵点  $D$  为  $\triangle ABC$  的外心,

∴ $DB=DC$ ,

∵ $\triangle OCA$  是等腰直角三角形,  $OA=a$ ,

∴ $\angle OAC=45^\circ$ ,  $AC=\sqrt{2}a$ ,

∵ $\angle BDC$  和  $\angle BAC$  是  $\widehat{BC}$  所对的圆心角和圆周角,

∴ $\angle BDC=2\angle BAC=90^\circ$ ,

∴ $\angle DBC=45^\circ$ ,

∴ $\angle DBC=\angle OAC$ ,

∴ $\triangle DBC\sim\triangle OCA$ ,

∴ $\triangle BCD$  与  $\triangle ACO$  的周长之比为  $\sqrt{10}:4$ ,

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{10}}{4}, \text{ 即 } \frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{10}}{4},$$

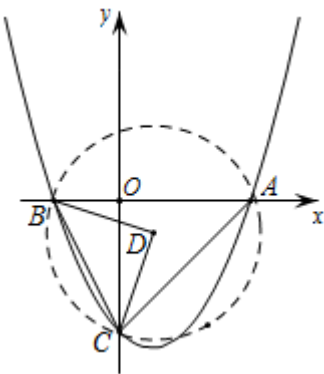
解得:  $a = \pm 2$ ,

经检验:  $a = \pm 2$  是原方程的根,

∵ $a > 1$ ,

∴ $a=2$ ,

∴抛物线解析式为:  $y = (x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$ .



(3) 如图, 过点  $D$  作  $DH \perp AB$  于  $H$ , 过点  $C$  作  $AC$  的垂线, 交  $x$  轴于  $F$ , 过点  $O$  作  $OG \perp AC$  于  $G$ , 连接  $AP$  交  $CF$  于  $E$ ,

∵ $a=2$ ,

∴ $C(0, -2)$ ,  $A(2, 0)$ ,  $AC=2\sqrt{2}$ ,

$$\therefore \angle OCA = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle OCF = 45^\circ,$$

$\therefore \triangle OCF$  是等腰直角三角形,

$$\therefore F(-2, 0),$$

设直线  $CF$  的解析式为  $y = kx + b$ ,

$$\therefore \begin{cases} -2k + b = 0 \\ b = -2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k = -1 \\ b = -2 \end{cases},$$

$$\therefore \text{直线 } CF \text{ 的解析式为 } y = -x - 2,$$

$\therefore \triangle OCA$  是等腰直角三角形,  $OG \perp AC$ ,

$\therefore OG$  所在直线为  $AC$  的垂直平分线, 点  $G$  为  $AC$  中点,

$\therefore$  点  $D$  为  $\triangle ABC$  的外心,

$\therefore$  点  $D$  在直线  $OG$  上,

$$\therefore A(2, 0), C(0, -2),$$

$$\therefore G(1, -1),$$

设直线  $OG$  的解析式  $y = mx$ ,

$$\therefore m = -1,$$

$\therefore$  直线  $OG$  的解析式  $y = -x$ ,

$\therefore$  点  $D$  为  $\triangle ABC$  的外心,

$\therefore$  点  $D$  在  $AB$  的垂直平分线上,

$$\therefore \text{点 } D \text{ 的横坐标为 } \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2},$$

$$\text{把 } x = \frac{1}{2} \text{ 代入 } y = -x \text{ 得 } y = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore D\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right),$$

$$\therefore DH = \frac{1}{2}, BH = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\therefore \angle CAP = \angle DBA, \angle BHD = \angle ACE = 90^\circ,$$

$$\therefore \triangle BHD \sim \triangle ACE,$$

$$\therefore \frac{DH}{CE} = \frac{BH}{AC}, \text{ 即 } \frac{1}{2} = \frac{3}{2\sqrt{2}},$$

$$\text{解得: } CE = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$\therefore$  点  $E$  在直线  $CF$  上,

$\therefore$  设点  $E$  坐标为  $(n, -n-2)$ ,

$$\therefore CE = \sqrt{n^2 + (-n-2+2)^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3},$$

$$\text{解得: } n = \pm \frac{2}{3},$$

$$\therefore E_1 \left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right), E_2 \left(\frac{2}{3}, -\frac{8}{3}\right),$$

设直线  $AE_1$  的解析式为  $y = k_1x + b_1$ ,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{2}{3}k_1 + b_1 = -\frac{4}{3}, \\ 2k_1 + b_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得: } \begin{cases} k_1 = \frac{1}{2}, \\ b_1 = -1 \end{cases}$$

$\therefore$  直线  $AE_1$  的解析式为  $y = \frac{1}{2}x - 1$ ,

同理: 直线  $AE_2$  的解析式为  $y = 2x - 4$ ,

$$\text{联立直线 } AE_1 \text{ 解析式与抛物线解析式得 } \begin{cases} y = \frac{1}{2}x - 1, \\ y = x^2 - x - 2 \end{cases},$$

$$\text{解得: } \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}, \\ y_1 = -\frac{5}{4} \end{cases}, \begin{cases} x_1 = 2 \\ y_2 = 0 \end{cases} \text{ (与点 } A \text{ 重合, 舍去),}$$

$$\therefore P_1 \left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right),$$

$$\text{联立直线 } AE_2 \text{ 解析式与抛物线解析式得 } \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x^2 - x - 2 \end{cases},$$



(2) 设  $BP$  与  $y$  轴交于点  $E$ ，根据  $PD \parallel y$  轴可知， $\angle DPB = \angle OEB$ ，当  $\angle DPB = 2\angle BCO$ ，即  $\angle OEB = 2\angle BCO$ ，由此推断  $\triangle OEB$  为等腰三角形，设  $OE = a$ ，则  $CE = 4 - a$ ，所以  $BE = 4 - a$ ，由勾股定理得  $BE^2 = OE^2 + OB^2$ ，解出点  $E$  的坐标，用待定系数法确定出  $BP$  的函数解析式即可；

(3) 设  $PD$  与  $AC$  交于点  $N$ ，过  $B$  作  $y$  轴的平行线与  $AC$  相交于点  $M$ 。由  $A$ 、 $C$  两点坐标可得  $AC$  所在直线表达式，求得  $M$  点坐标，则  $BM = 5$ ，由  $BM \parallel PN$ ，可得  $\triangle PNQ \sim \triangle BMQ$ ， $\frac{PQ}{QB} = \frac{PN}{BM} = \frac{PN}{5}$ ，

设  $P(a_0, -a_0^2 - 3a_0 + 4)$  ( $-4 < a_0 < 0$ )，则  $N(a_0, a_0 + 4)$

$\frac{PQ}{QB} = \frac{-a_0^2 - 3a_0 + 4 - (a_0 + 4)}{5} = \frac{-a_0^2 - 4a_0}{5} = \frac{-(a_0 + 2)^2 + 4}{5}$ ，根据二次函数性质求解即可。

**【详解】**

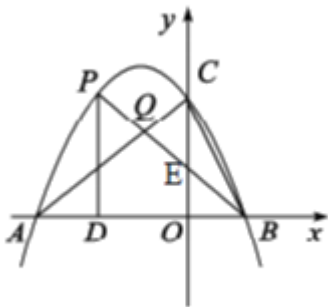
解：(1) 由题意可得：

$$\begin{cases} a \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) + 4 = 0 \\ a + b + 4 = 0 \end{cases}$$

解得：  $\begin{cases} a = -1 \\ b = -3 \end{cases}$ ，

$\therefore$  二次函数的表达式为  $y = -x^2 - 3x + 4$ ；

(2) 设  $BP$  与  $y$  轴交于点  $E$ ，



$\therefore PD \parallel y$  轴，

$\therefore \angle DPB = \angle OEB$ ，

$\therefore \angle DPB = 2\angle BCO$ ，

$$\therefore \angle OEB = 2\angle BCO,$$

$$\therefore \angle ECB = \angle EBC,$$

$$\therefore BE = CE, \text{ 设 } OE = a,$$

$$\text{则 } CE = 4 - a, \therefore BE = 4 - a,$$

在  $\text{Rt}\triangle BOE$  中, 由勾股定理得  $BE^2 = OE^2 + OB^2$ ,

$$\therefore (4 - a)^2 = a^2 + 1^2$$

$$\text{解得 } a = \frac{15}{8},$$

$$\therefore E\left(0, \frac{15}{8}\right),$$

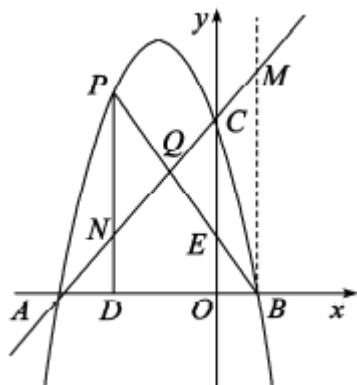
设  $BE$  所在直线表达式为  $y = kx + e (k \neq 0)$

$$\therefore \begin{cases} k \cdot 0 + e = \frac{15}{8}, \\ k \cdot 1 + e = 0. \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} k = -\frac{15}{8}, \\ e = \frac{15}{8}. \end{cases}$$

$$\therefore \text{直线 } BP \text{ 的表达式为 } y = -\frac{15}{8}x + \frac{15}{8}.$$

(3) 设  $PD$  与  $AC$  交于点  $N$ .

过  $B$  作  $y$  轴的平行线与  $AC$  相交于点  $M$ .



由  $A$ 、 $C$  两点坐标分别为  $(-4, 0)$ 、 $(0, 4)$

可得  $AC$  所在直线表达式为  $y = x + 4$

$\therefore M$  点坐标为  $(1, 5)$ ,  $BM = 5$

由  $BM \parallel PN$ ，可得  $\triangle PNQ \sim \triangle BMQ$ ，

$$\therefore \frac{PQ}{QB} = \frac{PN}{BM} = \frac{PN}{5}$$

设  $P(a_0, -a_0^2 - 3a_0 + 4)$  ( $-4 < a_0 < 0$ )，则  $N(a_0, a_0 + 4)$

$$\therefore \frac{PQ}{QB} = \frac{-a_0^2 - 3a_0 + 4 - (a_0 + 4)}{5} = \frac{-a_0^2 - 4a_0}{5} = \frac{-(a_0 + 2)^2 + 4}{5}$$

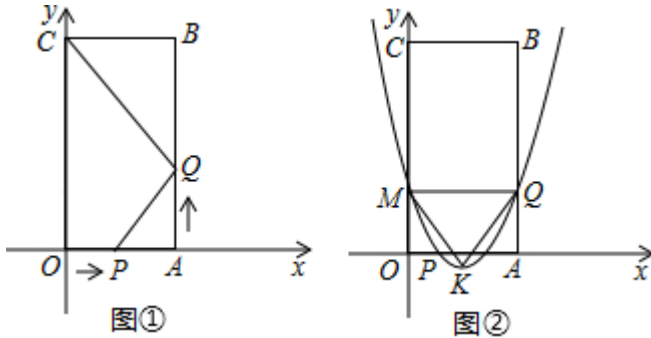
$\therefore$  当  $a_0 = -2$  时， $\frac{PQ}{QB}$  有最大值 0.8，

此时  $P$  点坐标为  $(-2, 6)$ 。

**【例 3】** 如图①，四边形  $OABC$  是矩形，点  $A$  的坐标为  $(3, 0)$ ，点  $C$  的坐标为  $(0, 6)$ ，点  $P$  从点  $O$  出发，沿线段  $OA$  以每秒 1 个单位长度的速度向点  $A$  移动，同时点  $Q$  从点  $A$  出发，沿线段  $AB$  以每秒 2 个单位长度的速度向点  $B$  移动，当点  $P$  与点  $A$  重合时移动停止。设点  $P$  移动的时间为  $t$  秒。

(1) 当  $\triangle CBQ$  与  $\triangle PAQ$  相似时，求  $t$  的值；

(2) 当  $t=1$  时，抛物线  $y=x^2+bx+c$  经过  $P, Q$  两点，与  $y$  轴交于点  $M$ ，抛物线的顶点为  $K$ ，如图②所示，该抛物线上是否存在点  $D$ ，使  $\angle MQD = \frac{1}{2}\angle MKQ$ ？若存在，请求出所有满足条件的点  $D$  的坐标；若不存在，请说明理由。



**【分析】** (1) 分  $\triangle QBC \sim \triangle PAQ$ 、 $\triangle CBQ \sim \triangle PAQ$ ，两种情况分别求解；

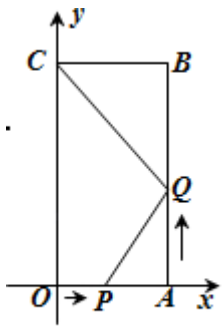
(2) 证明  $\angle MKE = \angle QKE = \frac{1}{2}\angle MKQ$ 。(i) 当点  $D$  在直线  $MQ$  的上方时，证明  $\triangle HMQ \sim \triangle MEK$ 。  $\therefore \frac{MH}{MQ} =$

$$\frac{ME}{EK} \cdot \frac{MH}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{2 + \frac{1}{4}}$$

$= \angle MKE$ 。即可求解。

**【解析】** 解：(1) 如图①， $\therefore$  当点  $P$  与点  $A$  重合时运动停止，且  $\triangle PAQ$  可以构成三角形，

$\therefore 0 < t < 3$ 。



图①

∵ 四边形  $OABC$  是矩形,

∴  $\angle B = \angle PAQ = 90^\circ$ .

∴ 当  $\triangle CBQ$  与  $\triangle PAQ$  相似时, 存在两种情况:

① 当  $\triangle QBC \sim \triangle PAQ$  时,

$$\frac{BC}{AQ} = \frac{BQ}{AP}, \quad \therefore \frac{3}{2t} = \frac{6-2t}{3-t}.$$

$$\therefore 4t^2 - 15t + 9 = 0.$$

$$\therefore t_1 = 3 \text{ (舍)}, \quad t_2 = \frac{3}{4};$$

② 当  $\triangle CBQ \sim \triangle PAQ$  时,

$$\frac{CB}{PA} = \frac{BQ}{AQ}.$$

$$\therefore \frac{3}{3-t} = \frac{6-2t}{2t}.$$

$$\therefore t^2 - 9t + 9 = 0.$$

$$\therefore t = \frac{9 \pm 3\sqrt{5}}{2} \text{ (舍去 } \frac{9+3\sqrt{5}}{2} \text{)}.$$

综上所述, 当  $\triangle CBQ$  与  $\triangle PAQ$  相似时,  $t = \frac{3}{4}$  或  $t = \frac{9-3\sqrt{5}}{2}$ ;

(2) 当  $t=1$  时,  $P(1, 0)$ ,  $Q(3, 2)$ .

把  $P(1, 0)$ ,  $Q(3, 2)$  代入抛物线  $y=x^2+bx+c$  中并解得:

抛物线:  $y=x^2-3x+2$ .

∴ 顶点  $k(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4})$ ,

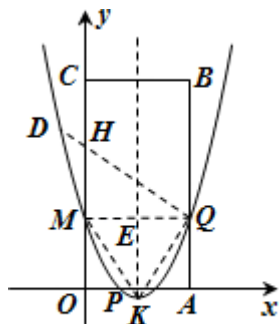
连接  $MQ$ ,

∵  $Q(3, 2)$ ,  $M(0, 2)$ ,

∴  $MQ \parallel x$  轴,

作抛物线对称轴, 交  $MQ$  于  $E$ ,

$\therefore KM=KQ. \therefore KE \perp MQ.$



图②

$\therefore \angle MKE = \angle QKE = \frac{1}{2} \angle MKQ.$  设  $DQ$  交  $y$  轴于  $H.$

(i) 当点  $D$  在直线  $MQ$  的上方时, 如图②所示,

则  $\angle DQM = \frac{1}{2} \angle MKQ = \angle MKE.$

$\therefore \angle HMQ = \angle MEK = 90^\circ,$

$\therefore \triangle HMQ \sim \triangle MEK. \therefore \frac{MH}{MQ} = \frac{ME}{EK}.$

$\therefore \frac{MH}{3} = \frac{\frac{3}{2}}{2 + \frac{1}{4}},$  解得  $MH=2.$

$\therefore H(0, 4).$

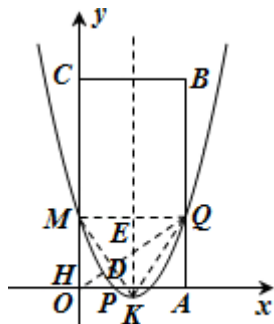
$\therefore$  直线  $HQ$  的解析式为  $y = -\frac{2}{3}x + 4.$

由方程组  $\begin{cases} y = -\frac{2}{3}x + 4 \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases}$  得  $x^2 - 3x + 2 = -\frac{2}{3}x + 4.$

解得  $x_1=3$  (舍),  $x_2=-\frac{2}{3}.$

$\therefore D(-\frac{2}{3}, \frac{40}{9});$

(ii) 当点  $D$  在直线  $MQ$  的下方时,  $y$  轴上存在点  $H,$  如图③所示, 使  $\angle HQM = \frac{1}{2} \angle MKQ = \angle MKE.$



图③

由对称性得  $H(0, 0)$ ，即  $H$  与原点重合.

$\therefore$  直线  $OQ$  的解析式  $y = \frac{2}{3}x$ .

由方程组  $\begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ y = x^2 - 3x + 2 \end{cases}$  得  $3x^2 - 11x + 6 = 0$ .

解得  $x_1 = 3$  (舍),  $x_2 = \frac{2}{3}$ .

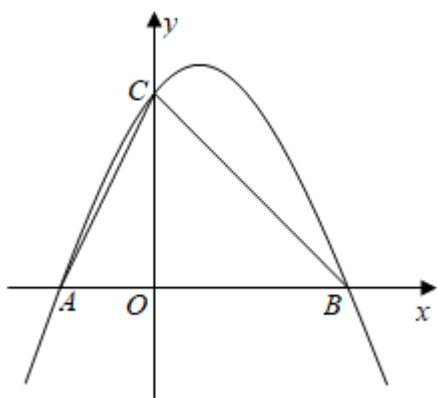
$\therefore D(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$ .

综上所述, 点  $D$  的坐标为  $(-\frac{2}{3}, \frac{40}{9})$  或  $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$ .

### 题型三：其他角度问题

**【例 4】** (2021·四川) 如图, 在平面直角坐标系中, 已知抛物线  $y = ax^2 + bx + 4 (a \neq 0)$  经过点  $A(-2, 0)$  和点  $B(4, 0)$ .

- (1) 求这条抛物线所对应的函数表达式;
- (2) 点  $P$  为该抛物线上一点 (不与点  $C$  重合), 直线  $CP$  将  $\triangle ABC$  的面积分成 2: 1 两部分, 求点  $P$  的坐标;
- (3) 点  $M$  从点  $C$  出发, 以每秒 1 个单位的速度沿  $y$  轴移动, 运动时间为  $t$  秒, 当  $\angle OCA = \angle OCB - \angle OMA$  时, 求  $t$  的值.



**【答案】** (1)  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ ; (2) 点  $P(6, -8)$ ; (3) 当点  $M$  从点  $C$  出发, 以每秒 1 个单位的速度沿  $y$  轴正方向移动时,  $t=2$  秒; 沿  $CO$  方向在  $y$  轴移动时,  $t=10$  秒.

#### 【分析】

- (1) 根据待定系数法将  $AB$  两点坐标代入函数解析式求解即可;
- (2) 在  $\triangle ABC$  的  $AB$  边上找到将  $AB$  分成 2: 1 两部分的点  $Q$ , 此时  $CQ$  将  $\triangle ABC$  的面积分成 2: 1 两部分, 求出直线  $CQ$  与抛物线交点坐标即是点  $P$  坐标;
- (3) 先利用图形在  $\angle OCB$  内构造  $\angle A'CB = \angle OCB - \angle OCA$ , 求出  $\tan \angle A'CB$ , 在  $Rt\triangle OAM$  中由

$\tan \angle OMA = \tan \angle A'CB$ ,  $OA = 2$ , 求出  $OM$  长即可解答,

【详解】

解: (1) 由抛物线  $y = ax^2 + bx + 4$  ( $a \neq 0$ ) 经过点  $A(-2, 0)$  和点  $B(4, 0)$ , 得:

$$\begin{cases} 4a - 2b + 4 = 0 \\ 16a + 4b + 4 = 0 \end{cases},$$

解得: 
$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

即: 条抛物线所对应的函数表达式为:  $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ ;

(2) 由 (1) 可知点  $C$  坐标为  $(0, 4)$

$\therefore$  点  $A(-2, 0)$  和点  $B(4, 0)$ .

$\therefore AB = 6$ ,

$\therefore$  将  $AB$  分成 2: 1 两部分的点有原点和  $Q(2, 0)$ , 此时  $CQ$  将  $\triangle ABC$  的面积分成 2: 1 两部分, 如解 (2) 图,

$\therefore$  点  $P$  为该抛物线上一点 (不与点  $C$  重合),

$\therefore$  直线  $CP$  经过  $Q$  点,

设直线  $CP$  解析式为:  $y = kx + b$ , 经过  $C(0, 4)$ ,  $Q(2, 0)$  两点, 得:

$$\begin{cases} b = 4 \\ 2k + b = 0 \end{cases},$$

$$\therefore \begin{cases} b = 4 \\ k = -2 \end{cases},$$

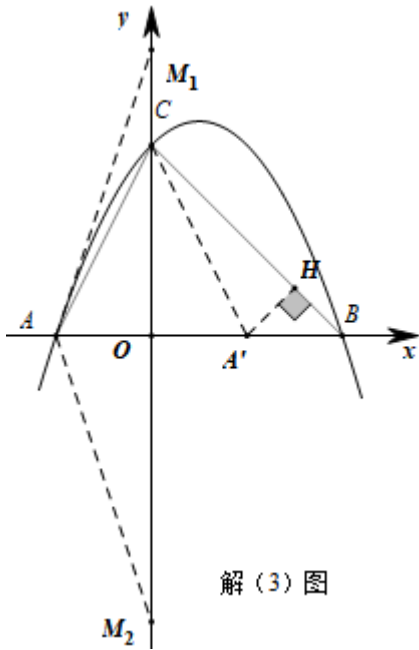
即可设直线  $CP$  解析式为:  $y = -2x + 4$ ,

联立函数解析式为: 
$$\begin{cases} y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4 \\ y = -2x + 4 \end{cases},$$

解得: 
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 4 \end{cases}, \begin{cases} x_2 = 6 \\ y_2 = -8 \end{cases},$$

故  $P$  点坐标为  $(6, -8)$ ,

(3) 如解 (3) 图取点  $A$  关于  $y$  轴对称点  $A'$ , 连接  $CA'$ , 过点  $A'$  作  $A'H \perp BC$ , 垂足为  $H$ ,



解(3)图

由轴对称性质可知： $OA' = OA = 2$ ， $\angle A'CO = \angle ACO$ ，

$$\therefore \angle A'CB = \angle BCO - \angle A'CO = \angle BCO - \angle ACO，$$

$$\therefore \angle OCA = \angle OCB - \angle OMA，\text{即 } \angle OMA = \angle OCB - \angle OCA，$$

$$\therefore \angle OMA = \angle A'CB$$

$$\therefore OB = OC = 4，\angle BOC = 90^\circ，$$

$$\therefore \angle OCB = \angle OBC = 45^\circ，BA' = 2，BC = 4\sqrt{2}$$

$$\therefore HB = HA' = \sqrt{2}，$$

$$\therefore HC = BC - BH = 3\sqrt{2}，$$

$$\therefore \tan \angle OMA = \tan \angle A'CB = \frac{A'H}{CH} = \frac{1}{3}，$$

$$\therefore OM = \frac{OA}{\tan \angle OMA} = 2 \div \frac{1}{3} = 6，$$

点  $M$  从点  $C$  出发，以每秒 1 个单位的速度运动：

当沿  $y$  轴正方向移动时， $MC = OM - OC = 6 - 4 = 2$ ，则  $t = 2$  秒，

当沿  $y$  轴  $CO$  方向移动时， $MC = OM + OC = 6 + 4 = 10$ ，则  $t = 10$  秒，

综上所述：当点  $M$  从点  $C$  出发，以每秒 1 个单位的速度沿  $y$  轴正方向移动时， $t = 2$  秒；沿  $CO$  方向在  $y$  轴移动时， $t = 10$  秒。

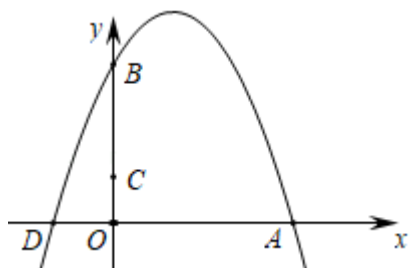
【例 5】抛物线  $y = -x^2 + 2x + 3$  与  $y$  轴交于  $B$ ，与  $x$  轴交于点  $D$ 、 $A$ ，点  $A$  在点  $D$  的右边，顶点为  $F$ ， $C(0$ ，

1)

(1) 直接写出点  $B$ 、 $A$ 、 $F$  的坐标；

(2) 设  $Q$  在该抛物线上, 且  $S_{\triangle BAF} = S_{\triangle BAQ}$ , 求点  $Q$  的坐标;

(3) 对大于 1 常数  $m$ , 在  $x$  轴上是否存在点  $M$ , 使得  $\sin \angle BMC = \frac{1}{m}$ ? 若存在, 求出点  $M$  坐标; 若不存在, 说明理由?



【分析】(1)  $y = -x^2 + 2x + 3$ , 令  $y = 0$ , 解得:  $x = 3$  或  $-1$ , 即可求解;

(2) 连接  $AB$ , 过点  $F$  作直线  $m$  平行于直线  $AB$  交抛物线于点  $Q$ , 在  $BA$  下方作直线  $n$ , 使直线  $m, n$  与直线  $AB$  等距离, 过点  $F$  作  $x$  轴的垂线交  $AB$  于点  $H$ 、交直线  $n$  于点  $F'$ , 直线  $n$  与抛物线交于点  $Q', Q''$ , 即可求解;

(3) 由  $S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} \times BC \times OM = \frac{1}{2} \times CH \times MB$ , 则  $CH = \frac{BC \times OM}{MB} = \frac{2}{\sqrt{a^2 + 9}}$ ,  $\sin \angle BMC = \frac{CH}{CM} = \frac{\frac{2}{\sqrt{a^2 + 9}}}{\sqrt{a^2 + 1}} =$

$\frac{1}{m}$ , 即可求解.

【解析】解: (1)  $y = -x^2 + 2x + 3 \dots \textcircled{1}$ ,

令  $y = 0$ , 解得:  $x = 3$  或  $-1$ ,

令  $x = 0$ , 则  $y = 3$ , 故点  $B(0, 3)$ ,

同理点  $F(1, 4)$ ;

(2) 连接  $AB$ , 过点  $F$  作直线  $m$  平行于直线  $AB$  交抛物线于点  $Q$ , 在  $BA$  下方作直线  $n$ , 使直线  $m, n$  与直线  $AB$  等距离,

过点  $F$  作  $x$  轴的垂线交  $AB$  于点  $H$ 、交直线  $n$  于点  $F'$ , 直线  $n$  与抛物线交于点  $Q', Q''$ ,

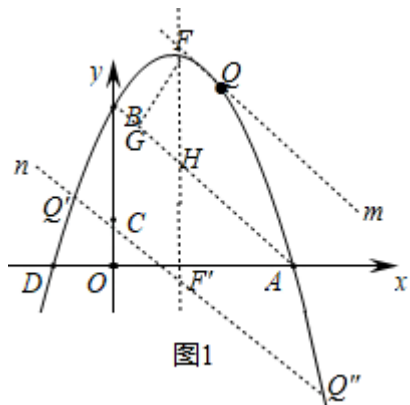


图1

直线  $BA$  的表达式为:  $y = -x + 3$ ,

则直线  $m$  的表达式为:  $y = -x + b$ , 将点  $F$  坐标代入上式并解得:

直线  $m$  的表达式为:  $y = -x + 5 \dots \textcircled{2}$ ,

联立  $\textcircled{1}\textcircled{2}$  并解得:  $x = 1$  或  $2$  (舍去  $1$ ),

故点  $Q(2, 3)$ ;

则点  $H(1, 2)$ , 则  $FH = 4 - 2 = 2$ ,

故直线  $n$  的表达式为:  $y = -x + 3 - 2 = -x + 1 \dots \textcircled{3}$ ,

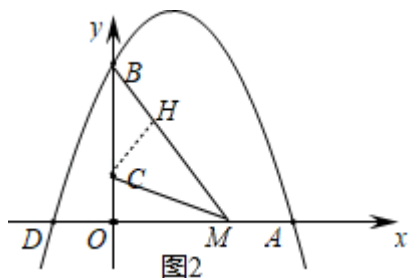
联立  $\textcircled{1}\textcircled{3}$  并解得:  $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$ ,

故点  $Q$  坐标为  $(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{2})$  或  $(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2})$ ,

综上, 点  $Q(2, 3)$  或  $(\frac{3 + \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{17}}{2})$  或  $(\frac{3 - \sqrt{17}}{2}, \frac{-1 + \sqrt{17}}{2})$ ;

(3) 过点  $C$  作  $CH \perp MB$  于点  $H$ ,

设:  $OM = a$ , 则  $MB = \sqrt{a^2 + 9}$ ,  $CM = \sqrt{a^2 + 1}$ ,



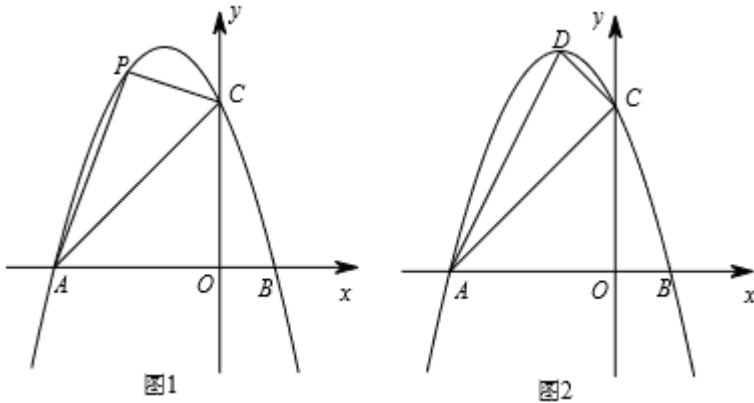
$$S_{\triangle BCM} = \frac{1}{2} \times BC \times OM = \frac{1}{2} \times CH \times MB, \text{ 则 } CH = \frac{BC \times OM}{MB} = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 1}},$$

$$\sin \angle BMC = \frac{CH}{CM} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{a^2 + 1}}}{\sqrt{a^2 + 9}} = \frac{1}{m},$$

$$\text{解得: } a = \pm \sqrt{(2m - 5) + 2\sqrt{m^2 - 5m + 4}},$$

$$\text{即点 } M(\sqrt{(2m - 5) + 2\sqrt{m^2 - 5m + 4}}, 0) \text{ 或 } (-\sqrt{(2m - 5) + 2\sqrt{m^2 - 5m + 4}}, 0).$$

1. 如图抛物线  $y=ax^2+bx+6$  的开口向下与  $x$  轴交于点  $A(-6, 0)$  和点  $B(2, 0)$ , 与  $y$  轴交于点  $C$ , 点  $P$  是抛物线上一个动点 (不与点  $C$  重合)



- (1) 求抛物线的解析式;
- (2) 当点  $P$  是抛物线上一个动点, 若  $\triangle PCA$  的面积为 12, 求点  $P$  的坐标;
- (3) 如图 2, 抛物线的顶点为  $D$ , 在抛物线上是否存在点  $E$ , 使得  $\angle EAB=2\angle DAC$ , 若存在请直接写出点  $E$  的坐标; 若不存在请说明理由.

**【分析】** (1) 函数的表达式为:  $y=a(x+6)(x-2)=a(x^2+4x-12)$ , 即可求解;

(2)  $S_{\triangle PCA} = \frac{1}{2}PG \times AC = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}PG \times 6\sqrt{2} = 12$ , 解得:  $PH=4$ , 直线  $AC$  的表达式为:  $y=x+6$ , 即可求解;

(3)  $\sin \angle DAC = \frac{DC}{AD} = \frac{\sqrt{10}}{10}$ ,  $\sin 2\angle DAC = \sin \angle DAD' = \frac{DH}{AD'} = \frac{\frac{12}{\sqrt{5}}}{\frac{3}{5}} = \frac{3}{5} = \sin \angle EAB$ , 则  $\tan \angle EAB = \frac{3}{4}$ , 即可求解.

**【解析】** 解: (1) 函数的表达式为:  $y=a(x+6)(x-2)=a(x^2+4x-12)$ ,

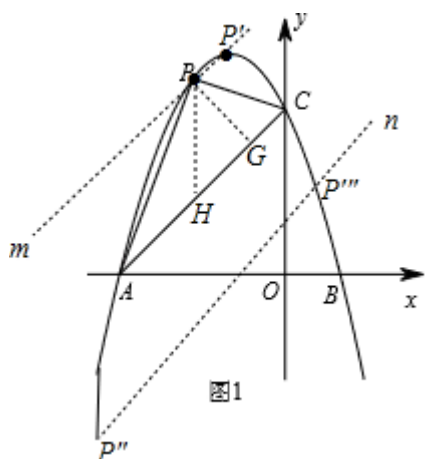
$$-12a=6, \text{ 解得: } a=-\frac{1}{2},$$

$$\text{函数的表达式为: } y=-\frac{1}{2}x^2-2x+6 \dots \textcircled{1},$$

顶点  $D$  坐标为  $(-2, 8)$ ;

(2) 如图 1 所示, 过点  $P$  作直线  $m \parallel AC$  交抛物线于点  $P'$ , 在直线  $AC$  下方等距离处作直线  $n$  交抛物线与点  $P''$ 、 $P'''$ ,

过点  $P$  作  $PH \parallel y$  轴交  $AC$  于点  $H$ , 作  $PG \perp AC$  于点  $G$ ,



$\because OA=OC, \therefore \angle PHG=\angle CAB=45^\circ$ , 则  $HP = \sqrt{2}PG$ ,

$$S_{\triangle PCA} = \frac{1}{2}PG \times AC = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}PG \times 6\sqrt{2} = 12, \text{ 解得: } PH=4,$$

直线  $AC$  的表达式为:  $y=x+6$ ,

则直线  $m$  的表达式为:  $y=x+10 \dots \textcircled{2}$ ,

联立  $\textcircled{1}\textcircled{2}$  并解得:  $x = -2$  或  $-4$ ,

则点  $P$  坐标为  $(-2, 8)$  或  $(-4, 6)$ ;

直线  $n$  的表达式为:  $y=x+2 \dots \textcircled{3}$

同理可得点  $P(P'', P''')$  的坐标为  $(-3-\sqrt{17}, -\sqrt{17}-1)$  或  $(-3+\sqrt{17}, \sqrt{17}-1)$ ,

综上, 点  $P$  的坐标为  $(-2, 8)$  或  $(-4, 6)$  或  $(-3-\sqrt{17}, -\sqrt{17}-1)$  或  $(-3+\sqrt{17}, \sqrt{17}-1)$ .

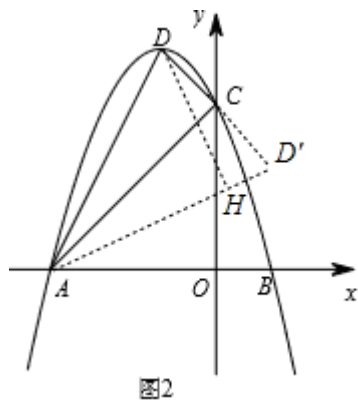
(3) 点  $A, B, C, D$  的坐标为  $(-6, 0), (2, 0), (0, 6), (-2, 8)$ ,

则  $AC = \sqrt{72}, CD = \sqrt{8}, AD = \sqrt{80}$ ,

则  $\angle ACD=90^\circ$ ,

$$\sin \angle DAC = \frac{DC}{AD} = \frac{\sqrt{10}}{10},$$

延长  $DC$  至  $D'$  使  $CD=CD'$ , 连接  $AD'$ , 过点  $D$  作  $DH \perp AD'$ ,



则  $DD' = 2\sqrt{8}$ ,  $AD = AD' = \sqrt{80}$ ,

$$S_{\triangle ADD'} = \frac{1}{2} \times DD' \times AC = \frac{1}{2} DH \times AD'$$

即:  $2\sqrt{8} \times \sqrt{72} = DH \times \sqrt{80}$ , 解得:  $DH = \frac{12}{\sqrt{5}}$ ,

$$\sin 2\angle DAC = \sin \angle DAD' = \frac{DH}{AD'} = \frac{\frac{12}{\sqrt{5}}}{\sqrt{80}} = \frac{3}{5} = \sin \angle EAB,$$

则  $\tan \angle EAB = \frac{3}{4}$ ,

①当点  $E$  在  $AB$  上方时,

则直线  $AE$  的表达式为:  $y = \frac{3}{4}x + b$ ,

将点  $A$  坐标代入上式并解得:

直线  $AE$  的表达式为:  $y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{2}$  ④,

联立①④并解得:  $x = \frac{1}{2}$  (不合题意值已舍去),

即点  $E (\frac{1}{2}, \frac{39}{8})$ ;

②当点  $E$  在  $AB$  下方时,

同理可得: 点  $E (\frac{7}{2}, -\frac{57}{8})$ ,

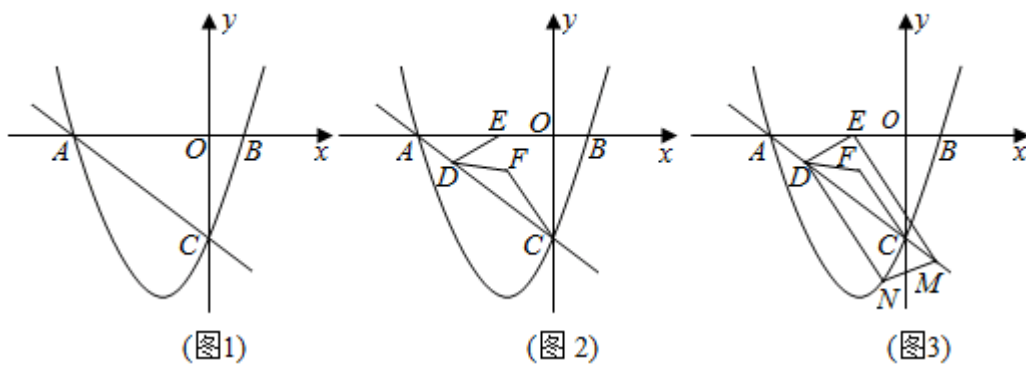
综上, 点  $E (\frac{1}{2}, \frac{39}{8})$  或  $(\frac{7}{2}, -\frac{57}{8})$ .

2. 已知: 在平面直角坐标系中, 点  $O$  为坐标原点, 直线  $y = -\frac{3}{4}x + b$  与  $x$  轴交于点  $A$ , 与  $y$  轴交于点  $C$ . 经过点  $A, C$  的抛物线  $y = ax^2 + 3ax - 3$  与  $x$  轴的另一个交点为点  $B$ .

(1) 如图 1, 求  $a$  的值;

(2) 如图 2, 点  $D, E$  分别在线段  $AC, AB$  上, 且  $BE = 2AD$ , 连接  $DE$ , 将线段  $DE$  绕点  $D$  顺时针旋转得到线段  $DF$ , 且旋转角  $\angle EDF = \angle OAC$ , 连接  $CF$ , 求  $\tan \angle ACF$  的值;

(3) 如图 3, 在 (2) 的条件下, 当  $\angle DFC = 135^\circ$  时, 在线段  $AC$  的延长线上取点  $M$ , 过点  $M$  作  $MN \parallel DE$  交抛物线于点  $N$ , 连接  $DN, EM$ , 若  $MN = DF$ , 求点  $N$  的横坐标.



【分析】(1) 求出点  $A(-4, 0)$ ，将点  $A$  的坐标代入二次函数表达式，即可求解；

(2) 证明  $\triangle ADE \cong \triangle GFD$ ，即可求解；

(3) 证明  $\triangle DET \cong \triangle MSN$  (AAS)，则  $MS = DT = \frac{3}{4}$ ， $NS = ET = \frac{3}{2}$ ，设点  $M(x, -\frac{3}{4}x - 3)$ ，则点  $N(x - \frac{3}{2}, -\frac{3x}{4} - \frac{15}{4})$ ，将点  $N$  的坐标代入二次函数表达式，即可求解。

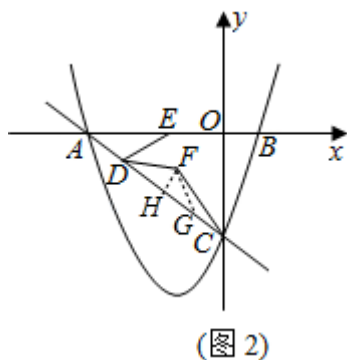
【解析】解：(1)  $y = ax^2 + 3ax - 3$ ，当  $x = 0$ ， $y = -3$ ，故点  $C(0, -3)$ ，

将点  $C$  的坐标代入直线表达式并解得： $b = -3$ ，

则直线  $AC$  的表达式为： $y = -\frac{3}{4}x - 3$ ，则点  $A(-4, 0)$ ，

将点  $A$  的坐标代入二次函数表达式并解得： $a = \frac{3}{4}$ ；

(2) 在直线  $AC$  上取点  $G$  使  $DG = AE$ ，连接  $FG$ ，过点  $F$  作  $FH \perp AC$ ，



$\therefore \angle FDC + \angle FDE = \angle BAC + \angle AED$ ，而  $\angle BAC = \angle EDF$ ，

$\therefore \angle FDH = \angle AED$ ，

而  $DG = AE$ ， $DF = DE$ ，

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle GFD$ ，

$\therefore AD = GF$ ，

$\therefore AB = AC = 5$ ， $BE = 2AD$ ，



∴ 四边形  $MNDE$  为平行四边形, ∴  $\angle DEM = \angle DNM$ ,

过点  $N$  作  $x$  轴的平行线交直线  $AC$  于点  $K$ , 过点  $M$  作  $MS \perp NK$  于点  $S$ ,

则  $\angle AEM = \angle KND$ , ∴  $\angle TED = \angle MNS$ ,

而  $MN = DE$ ,  $\angle ETD = \angle MSN = 90^\circ$ ,

∴  $\triangle DET \cong \triangle MSN$  (AAS),

∴  $MS = DT = \frac{3}{4}$ ,  $NS = ET = \frac{3}{2}$ ,

设点  $M(x, -\frac{3}{4}x - 3)$ , 则点  $N(x - \frac{3}{2}, -\frac{3x}{4} - \frac{15}{4})$ ,

将点  $N$  的坐标代入二次函数表达式得:

$$-\frac{3x}{4} - \frac{15}{4} = \frac{3}{4}(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{9}{4}(x - \frac{3}{2}) - 3,$$

解得:  $x = \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{2}$  (舍去负值),

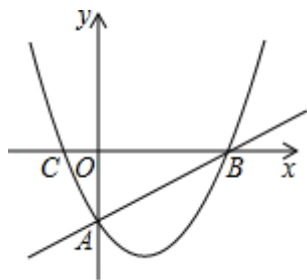
故点  $N$  的横坐标为:  $\frac{\sqrt{6}-4}{2}$ .

3. 如图, 直线  $y = \frac{1}{2}x - 2$  与  $x$  轴交于点  $B$ , 与  $y$  轴交于点  $A$ , 抛物线  $y = ax^2 - \frac{3}{2}x + c$  经过  $A, B$  两点, 与  $x$  轴的另一交点为  $C$ .

(1) 求抛物线的解析式;

(2)  $M$  为抛物线上一点, 直线  $AM$  与  $x$  轴交于点  $N$ , 当  $\frac{MN}{AN} = \frac{3}{2}$  时, 求点  $M$  的坐标;

(3)  $P$  为抛物线上的动点, 连接  $AP$ , 当  $\angle PAB$  与  $\triangle AOB$  的一个内角相等时, 直接写出点  $P$  的坐标.



**【分析】** (1) 直线  $y = \frac{1}{2}x - 2$  与  $x$  轴交于点  $B$ , 与  $y$  轴交于点  $A$ , 则点  $A, B$  的坐标分别为:  $(0, -2)$ 、 $(4, 0)$ , 即可求解;

(2) 直线  $MA$  的表达式为:  $y = (\frac{1}{2}m - \frac{3}{2})x - 2$ , 则点  $N(\frac{4}{m-3}, 0)$ , 当  $\frac{MN}{AN} = \frac{3}{2}$  时, 则  $\frac{NH}{ON} = \frac{3}{2}$ , 即:

$$\frac{|m - \frac{4}{m-3}|}{|\frac{4}{m-3}|} = \frac{3}{2}, \text{ 即可求解;}$$

(3) 分  $\angle PAB = \angle AOB = 90^\circ$ 、 $\angle PAB = \angle OAB$ 、 $\angle PAB = \angle OBA$  三种情况, 分别求解即可.

【解析】解：（1）直线  $y = \frac{1}{2}x - 2$  与  $x$  轴交于点  $B$ ，与  $y$  轴交于点  $A$ ，则点  $A$ 、 $B$  的坐标分别为：（0，-2）、（4，0），

则  $c = -2$ ，将点  $B$  的坐标代入抛物线表达式并解得： $a = \frac{1}{2}$ ，

故抛物线的表达式为： $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - 2 \dots \textcircled{1}$ ；

（2）设点  $M(m, \frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{2}m - 2)$ 、点  $A(0, -2)$ ，

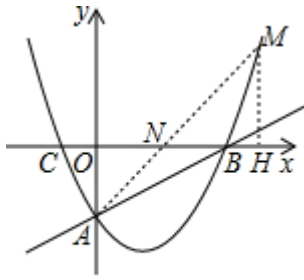


图1

将点  $M$ 、 $A$  的坐标代入一次函数表达式： $y = kx + b$  并解得：

直线  $MA$  的表达式为： $y = (\frac{1}{2}m - \frac{3}{2})x - 2$ ，

则点  $N(\frac{4}{m-3}, 0)$ ，

当  $\frac{MN}{AN} = \frac{3}{2}$  时，则  $\frac{NH}{ON} = \frac{3}{2}$ ，即： $\frac{|m - \frac{4}{m-3}|}{|\frac{4}{m-3}|} = \frac{3}{2}$ ，

解得： $m = 5$  或  $-2$  或  $2$  或  $1$ ，

故点  $M$  的坐标为：（5，3）或（-2，3）或（2，-3）或（1，-3）；

（3）①  $\angle PAB = \angle AOB = 90^\circ$  时，

则直线  $AP$  的表达式为： $y = -2x - 2 \dots \textcircled{2}$ ，

联立①②并解得： $x = -1$  或  $0$ （舍去  $0$ ），

故点  $P(-1, 0)$ ；

② 当  $\angle PAB = \angle OAB$  时，

当点  $P$  在  $AB$  上方时，无解；

当点  $P$  在  $AB$  下方时，

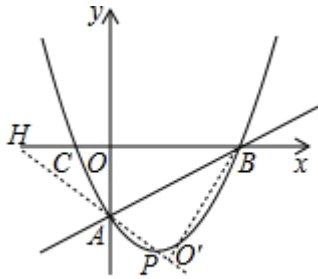


图2

将 $\triangle OAB$ 沿 $AB$ 折叠得到 $\triangle O'AB$ ，直线 $OA$ 交 $x$ 轴于点 $H$ 、交抛物线为点 $P$ ，点 $P$ 为所求，

则 $BO=OB=4$ ， $OA=OA=2$ ，设 $OH=x$ ，

则 $\sin\angle H = \frac{BO'}{HB} = \frac{OA}{HA}$ ，即： $\frac{4}{4+x} = \frac{2}{\sqrt{x^2+4}}$ ，解得： $x = \frac{8}{3}$ ，则点 $H(-\frac{8}{3}, 0)$ ，

则直线 $AH$ 的表达式为： $y = -\frac{3}{4}x - 2 \dots \textcircled{3}$ ，

联立①③并解得： $x = \frac{3}{2}$ ，故点 $P(\frac{3}{2}, -\frac{25}{8})$ ；

③当 $\angle PAB = \angle OBA$ 时，

当点 $P$ 在 $AB$ 上方时，

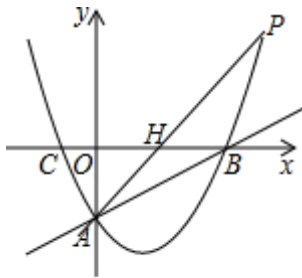


图2

则 $AH=BH$ ，

设 $OH=a$ ，则 $AH=BH=4-a$ ， $AO=2$ ，

故 $(4-a)^2 = a^2 + 4$ ，解得： $a = \frac{3}{2}$ ，

故点 $H(\frac{3}{2}, 0)$ ，

则直线 $AH$ 的表达式为： $y = \frac{4}{3}x - 2 \dots \textcircled{3}$ ，

联立①③并解得： $x=0$ 或 $\frac{17}{3}$ （舍去0），

故点 $P(\frac{17}{3}, \frac{50}{9})$ ；

当点 $P$ 在 $AB$ 下方时，

同理可得：点 $P(3, -2)$ ；

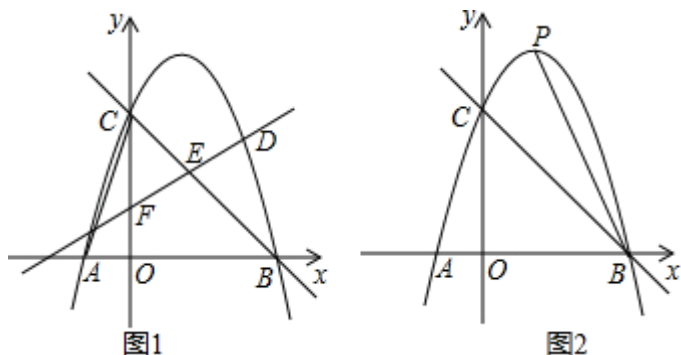
综上，点  $P$  的坐标为：  $(-1, 0)$  或  $(\frac{3}{2}, -\frac{25}{8})$  或  $(\frac{17}{3}, \frac{50}{9})$  或  $(3, -2)$  .

4. 如图，抛物线  $y = -x^2 + bx + c$  与  $x$  轴交于点  $A(-1, 0)$  和  $B(3, 0)$ ，与  $y$  轴交于点  $C$

(1) 求抛物线的表达式；

(2) 如图 1，若点  $F$  在线段  $OC$  上，且  $OF = OA$ ，经入过点  $F$  的直线在第一象限内与抛物线交于点  $D$ ，与线段  $BC$  交于点  $E$ ，求  $\frac{DE}{EF}$  的最大值；

(3) 如图 2，若  $P$  为抛物线的顶点，动点  $Q$  在抛物线上，当  $\angle QCO = \angle PBC$  时，请直接写出点  $Q$  的坐标.



【分析】(1) 函数的表达式为：  $y = -(x+1)(x-3)$ ，即可求解；

(2) 作  $DN \parallel CF$ ，则  $\frac{DE}{EF} = \frac{DN}{CF} = \frac{1}{2}(-x^2 + 2x + 3 + x - 3)$ ，即可求解；

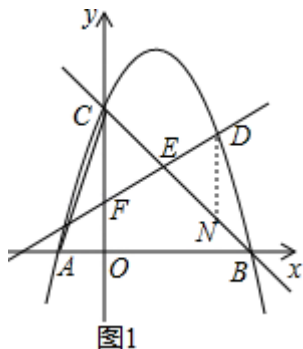
(3)  $\triangle PBC$  为直角三角形，  $\tan \angle PBC = \frac{PC}{CB} = \frac{1}{3}$ ，当  $\angle QCO = \angle PBC$  时，  $\tan \angle QCO = \tan \alpha = \frac{1}{3} = \frac{|x|}{3+x^2-2x-3}$ ，

即可求解.

【解析】解：(1) 函数的表达式为：  $y = -(x+1)(x-3) = -x^2 + 2x + 3$ ，

则点  $C(0, 3)$ ；

(2) 过点  $D$  作  $y$  轴的平行线交  $BC$  于点  $N$ ，



将点  $B$ 、 $C$  的坐标代入一次函数表达式并解得：

函数  $BC$  表达式为：  $y = -x + 3$ ，

$OF = OA = 1$ ，则点  $F(0, 1)$ ， $CF = 2$ ，

设点  $D(x, -x^2+2x+3)$ ，则点  $N(x, -x+3)$ ，

$$DN \parallel CF, \text{ 则 } \frac{DE}{EF} = \frac{DN}{CF} = \frac{1}{2} (-x^2+2x+3+x-3) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x,$$

$\because -\frac{1}{2} < 0$ ，则  $\frac{DE}{EF}$  有最大值，此时  $x = \frac{3}{2}$ ，

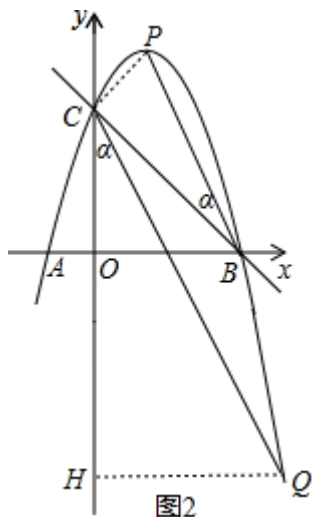
$\frac{DE}{EF}$  的最大值为  $\frac{9}{8}$ ；

(3) 连接  $PC$ ，点  $P$  坐标  $(1, 4)$ ，

则  $PC = \sqrt{2}$ ， $PB = \sqrt{20}$ ， $BC = \sqrt{18}$ ，

则  $\triangle PBC$  为直角三角形， $\tan \angle PBC = \frac{PC}{CB} = \frac{1}{3}$ ，

过点  $Q$  作  $QH \perp y$  轴于点  $H$ ，



设点  $Q(x, -x^2+2x+3)$ ，

$$\text{则 } \tan \angle HCQ = \tan \alpha = \frac{1}{3} = \frac{|x|}{3+x^2-2x-3},$$

解得： $x=0$  或  $5$  或  $-1$  (舍去  $0$ )，

故点  $Q(-1, 0)$  或  $(5, -12)$ 。

5. (2021·四川中考真题) 如图，在平面直角坐标系中，已知抛物线  $y = ax^2 + bx + 4 (a \neq 0)$  经过点  $A(-2, 0)$  和点  $B(4, 0)$ 。

(1) 求这条抛物线所对应的函数表达式；

(2) 点  $P$  为该抛物线上一点 (不与点  $C$  重合)，直线  $CP$  将  $\triangle ABC$  的面积分成  $2:1$  两部分，求点  $P$  的坐标；

(3) 点  $M$  从点  $C$  出发，以每秒  $1$  个单位的速度沿  $y$  轴移动，运动时间为  $t$  秒，当  $\angle OCA = \angle OCB - \angle OMA$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/236053153152011015>