

2023-2024 学年广东省师大附中高三 2 月份数学试题模拟试题

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

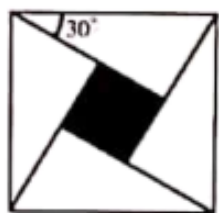
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，若 $S_{2018} < S_{2020} < S_{2019}$ ，设 $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$ ，则数列 $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$ 的前 n 项和 T_n 取最

大值时 n 的值为()

- A. 2020 B. 2019 C. 2018 D. 2017

2. 如图所示，三国时代数学家赵爽在《周髀算经》中利用弦图，给出了勾股定理的绝妙证明.图中包含四个全等的直角三角形及一个小正方形（阴影），设直角三角形有一内角为 30° ，若向弦图内随机抛掷 500 颗米粒（米粒大小忽略不计，取 $\sqrt{3} \approx 1.732$ ），则落在小正方形（阴影）内的米粒数大约为()



- A. 134 B. 67 C. 182 D. 108

3. 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ ，过焦点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点 (A 在 x 轴上方)，且满足 $|AF| = 3|BF|$ ，则直线 l 的斜率为()

- A. 1 B. $\sqrt{3}$
C. 2 D. 3

4. 已知函数 $f(x) = e^{\frac{x}{2}-1}$ ， $g(x) = \ln \frac{x}{2} + 1$ ，若 $f(m) = g(n)$ 成立，则 $n - m$ 的最小值为()

- A. 0 B. 4 C. $3e - \frac{1}{2}$ D. $\frac{5 + \ln 6}{2}$

5. 已知数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公差的等差数列， $\{b_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，设 $c_n = a_{b_n}$ ，

$T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)，则当 $T_n < 2020$ 时， n 的最大值是()

- A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

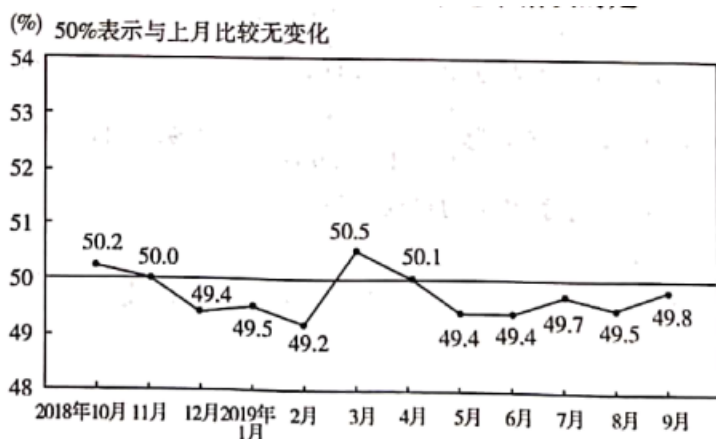
6. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \geq 2 \\ y-x \leq 1 \\ y+1 \geq kx \end{cases}$, 若 $z=2x-y$ 的最大值为 2, 则实数 k 的值为 ()

- A. 1 B. $\frac{5}{3}$ C. 2 D. $\frac{7}{3}$

7. 已知命题 p : “关于 x 的方程 $x^2 - 4x + a = 0$ 有实根”, 若 $\neg p$ 为真命题的充分不必要条件为 $a > 3m+1$, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. $[1, +\infty)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, 1]$

8. 国家统计局服务业调查中心和中国物流与采购联合会发布的 2018 年 10 月份至 2019 年 9 月份共 12 个月的中国制造业采购经理指数(PMI)如下图所示.则下列结论中错误的是 ()



A. 12 个月的 PMI 值不低于 50% 的频率为 $\frac{1}{3}$

B. 12 个月的 PMI 值的平均值低于 50%

C. 12 个月的 PMI 值的众数为 49.4%

D. 12 个月的 PMI 值的中位数为 50.3%

9. 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 且满足 $3 + a_5 = a_3 + a_8$, S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_{11} =$ ()

- A. 27 B. 33 C. 39 D. 44

10. 中国古典乐器一般按“八音”分类. 这是我国最早按乐器的制造材料来对乐器进行分类的方法, 最先见于《周礼·春官·大师》, 分为“金、石、土、革、丝、木、匏 (páo)、竹”八音, 其中“金、石、木、革”为打击乐器, “土、匏、竹”为吹奏乐器, “丝”为弹拨乐器. 现从“八音”中任取不同的“两音”, 则含有打击乐器的概率为 ()

- A. $\frac{3}{14}$ B. $\frac{11}{14}$ C. $\frac{1}{14}$ D. $\frac{2}{7}$

11. 在菱形 $ABCD$ 中, $AC = 4$, $BD = 2$, E, F 分别为 AB, BC 的中点, 则 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} =$ ()

- A. $-\frac{13}{4}$ B. $\frac{5}{4}$ C. 5 D. $\frac{15}{4}$

12. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1=1$, 公差 $d \in [1, 2]$, 且 $a_4 + \lambda a_{10} + a_{16} = 15$, 则实数 λ 的最大值为 ()

- A. $\frac{7}{2}$ B. $\frac{53}{19}$ C. $-\frac{23}{19}$ D. $-\frac{1}{2}$

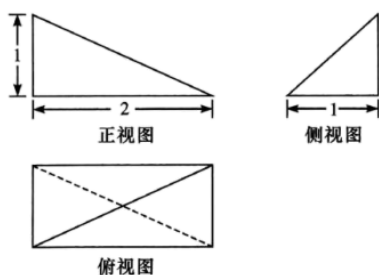
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $(x - \frac{2}{x})^5$ 的展开式中含 x^3 的系数为_____。(用数字填写答案)

14. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, 过左焦点 F_1 的直线与椭圆 C 交于 A, B

两点, 且 $|AF_1| = 3|BF_1|, |AB| = |BF_2|$, 则椭圆的离心率为_____.

15. 已知某几何体的三视图如图所示, 则该几何体外接球的表面积是_____.



16. 已知 x, y 为正实数, 且 $xy + 2x + 4y = 41$, 则 $x + y$ 的最小值为_____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$

(1) 若 $f(x) < ax + \frac{1}{x}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若方程 $f(x) = m$ 有两个不同实根 x_1, x_2 , 证明: $x_1 + x_2 > 2$.

18. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 - m \\ y = k(m - 1) \end{cases}$ 为参数), 直线 l_2 的参数方程 $\begin{cases} x = n \\ y = 2 + \frac{n}{k} \end{cases}$ (为参

数), 若直线 l_1, l_2 的交点为 P , 当 k 变化时, 点 P 的轨迹是曲线 C

(1) 求曲线 C 的普通方程;

(2) 以坐标原点为极点, x 轴非负半轴为极轴且取相同的单位长度建立极坐标系, 设射线 l_3 的极坐标方程为

$\theta = \alpha$ ($\rho \geq 0$), $\tan \alpha = \frac{4}{3}$ ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$), 点 Q 为射线 l_3 与曲线 C 的交点, 求点 Q 的极径.

19. (12 分) 已知 $f(x) = 2 \ln(x + 2) - (x + 1)^2$, $g(x) = k(x + 1)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $k = 2$ 时, 求证: 对于 $\forall x > -1$, $f(x) < g(x)$ 恒成立;

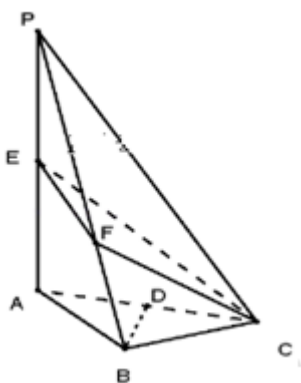
(3) 若存在 $x_0 > -1$ ，使得当 $x \in (-1, x_0)$ 时，恒有 $f(x) > g(x)$ 成立，试求 k 的取值范围.

20. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 为公差为 d 的等差数列， $d > 0$ ， $a_4 = 4$ ，且 a_1, a_3, a_9 依次成等比数列， $b_n = 2^{a_n}$.

(1) 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n ;

(2) 若 $c_n = \frac{2b_n}{S_n \cdot S_{n+1}}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

21. (12 分) 已知三棱锥 $P-ABC$ 中， $\triangle ABC$ 为等腰直角三角形， $AB = AC = 1$ ， $PB = PC = \sqrt{5}$ ，设点 E 为 PA 中点，点 D 为 AC 中点，点 F 为 PB 上一点，且 $PF = 2FB$.



(1) 证明： $BD \parallel$ 平面 CEF ;

(2) 若 $PA \perp AC$ ，求直线 CE 与平面 PBC 所成角的正弦值.

22. (10 分) 在平面直角坐标系 xOy 中，曲线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2 + \cos \theta \\ y = \sqrt{3} + 2\sqrt{3} \cos^2 \frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (\theta \text{ 为参数})$$
，以原点 O 为极点，

x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho = 4 \sin \theta$.

(1) 求曲线 C 的普通方程;

(2) 求曲线 l 和曲线 C 的公共点的极坐标.

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

根据题意计算 $a_{2019} > 0$, $a_{2020} < 0$, $a_{2019} + a_{2020} > 0$, 计算 $\frac{1}{b_{2018}} < 0$, $\frac{1}{b_{2019}} > 0$, $\frac{1}{b_{2018}} + \frac{1}{b_{2019}} > 0$, 得到答案.

【详解】

S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_{2018} < S_{2020} < S_{2019}$,

故 $a_{2019} > 0$, $a_{2020} < 0$, $a_{2019} + a_{2020} > 0$, $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$, 故 $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$,

当 $n \leq 2017$ 时, $\frac{1}{b_n} > 0$, $\frac{1}{b_{2018}} = \frac{1}{a_{2018} a_{2019} a_{2020}} < 0$, $\frac{1}{b_{2019}} = \frac{1}{a_{2019} a_{2020} a_{2021}} > 0$,

$$\frac{1}{b_{2018}} + \frac{1}{b_{2019}} = \frac{1}{a_{2018} a_{2019} a_{2020}} + \frac{1}{a_{2019} a_{2020} a_{2021}} = \frac{a_{2019} + a_{2020}}{a_{2018} a_{2019} a_{2020} a_{2021}} > 0,$$

当 $n \geq 2020$ 时, $\frac{1}{b_n} < 0$, 故前 2019 项和最大.

故选: B.

【点睛】

本题考查了数列和的最值问题, 意在考查学生对于数列公式方法的综合应用.

2、B

【解析】

根据几何概型的概率公式求出对应面积之比即可得到结论.

【详解】

解: 设大正方形的边长为 1, 则小直角三角形的边长为 $\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$,

则小正方形的边长为 $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}$, 小正方形的面积 $S = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$,

则落在小正方形(阴影)内的米粒数大约为

$$\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 \times 1} \times 500 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times 500 \approx (1 - 0.866) \times 500 = 0.134 \times 500 = 67,$$

故选: B.

【点睛】

本题主要考查几何概型的概率的应用, 求出对应的面积之比是解决本题的关键.

3、B

【解析】

设直线 l 的方程为 $x = my + 1$ 代入抛物线方程, 利用韦达定理可得 $y_1 + y_2 = 4m, y_1 y_2 = -4$, 由 $|AF| = 3|BF|$ 可知 $\overline{AF} = 3\overline{FB}$ 所以可得 $y_1 = -3y_2$ 代入化简求得参数, 即可求得结果.

【详解】

设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ($y_1 > 0, y_2 < 0$). 易知直线 l 的斜率存在且不为 0, 设为 $\frac{1}{m}$, 则直线 l 的方程为 $x = my + 1$.

与抛物线方程联立得 $y^2 = 4(my + 1)$, 所以 $y_1 y_2 = -4, y_1 + y_2 = 4m$. 因为 $|AF| = 3|BF|$, 所以 $\overline{AF} = 3\overline{FB}$, 得

$$y_1 = -3y_2, \text{ 所以 } y_2^2 = \frac{4}{3}, \text{ 即 } y_2 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}, y_1 = 2\sqrt{3}, \text{ 所以 } \frac{1}{m} = \frac{4}{y_1 + y_2} = \sqrt{3}.$$

故选: B.

【点睛】

本题考查直线与抛物线的位置关系, 考查韦达定理及向量的坐标之间的关系, 考查计算能力, 属于中档题.

4、A

【解析】

令 $f(m) = g(n) = t$, 进而求得 $n - m = 2e^{t-1} - 2\ln t - 2$, 再转化为函数的最值问题即可求解.

【详解】

$$\because f(m) = g(n) = t \therefore e^{\frac{m-1}{2}} = \ln \frac{n}{2} + 1 = t \quad (t > 0), \therefore n - m = 2e^{t-1} - 2\ln t - 2,$$

$$\text{令: } h(t) = 2e^{t-1} - 2\ln t - 2, \quad h'(t) = 2e^{t-1} - \frac{2}{t}, \quad h'(t) \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 上增,}$$

且 $h'(1) = 0$, 所以 $h(t)$ 在 $(0, 1)$ 上减, 在 $(1, +\infty)$ 上增,

所以 $h(t)_{\min} = h(1) = 2 - 2 = 0$, 所以 $n - m$ 的最小值为 0. 故选: A

【点睛】

本题主要考查了导数在研究函数最值中的应用, 考查了转化的数学思想, 恰当的用一个未知数来表示 n 和 m 是本题的关键, 属于中档题.

5、B

【解析】

根据题意计算 $a_n = 2n - 1, b_n = 2^{n-1}, T_n = 2^{n+1} - n - 2$, 解不等式得到答案.

【详解】

$\because \{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列, $\therefore a_n = 2n - 1$.

$\because \{b_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, $\therefore b_n = 2^{n-1}$.

$$\therefore T_n = c_1 + c_2 + \cdots + c_n = a_{b_1} + a_{b_2} + \cdots + a_{b_n} = a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2^{n-1}}$$

$$= (2 \times 1 - 1) + (2 \times 2 - 1) + (2 \times 4 - 1) + \cdots + (2 \times 2^{n-1} - 1) = 2(1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1}) - n = 2 \times \frac{1 - 2^n}{1 - 2} - n = 2^{n+1} - n - 2.$$

$\because T_n < 2020$, $\therefore 2^{n+1} - n - 2 < 2020$, 解得 $n \leq 9$. 则当 $T_n < 2020$ 时, n 的最大值是 9.

故选: B.

【点睛】

本题考查了等差数列, 等比数列, 分组求和, 意在考查学生对于数列公式方法的灵活运用.

6、B

【解析】

画出约束条件的可行域, 利用目标函数的几何意义, 求出最优解, 转化求解 k 即可.

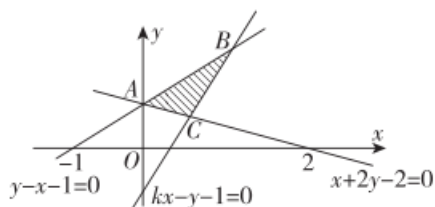
【详解】

可行域如图中阴影部分所示, $B\left(\frac{2}{k-1}, \frac{2}{k-1} + 1\right)$, $C\left(\frac{4}{2k+1}, \frac{2k-1}{2k+1}\right)$, 要使得 z 能取到最大值, 则 $k > 1$, 当 $1 < k \leq 2$

时, x 在点 B 处取得最大值, 即 $2\left(\frac{2}{k-1}\right) - \left(\frac{2}{k-1} + 1\right) = 2$, 得 $k = \frac{5}{3}$; 当 $k > 2$ 时, z 在点 C 处取得最大值, 即

$$2\left(\frac{4}{2k+1}\right) - \left(\frac{2k-1}{2k+1}\right) = 2, \text{ 得 } k = \frac{7}{6} \text{ (舍去)}.$$

故选: B.



【点睛】

本题考查由目标函数最值求解参数值, 数形结合思想, 分类讨论是解题的关键, 属于中档题.

7、B

【解析】

命题 p : $a \leq 4$, $\neg p$ 为 $a > 4$, 又 $\neg p$ 为真命题的充分不必要条件为 $a > 3m + 1$, 故 $3m + 1 > 4 \Rightarrow m > 1$

8、D

【解析】

根据图形中的信息，可得频率、平均值的估计、众数、中位数，从而得到答案.

【详解】

对 A ，从图中数据变化看， PMI 值不低于 50% 的月份有 4 个，所以 12 个月的 PMI 值不低于 50% 的频率为 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ ，

故 A 正确；

对 B ，由图可以看出， PMI 值的平均值低于 50%，故 B 正确；

对 C ，12 个月的 PMI 值的众数为 49.4%，故 C 正确；

对 D ，12 个月的 PMI 值的中位数为 49.6%，故 D 错误

故选：D.

【点睛】

本题考查频率、平均值的估计、众数、中位数计算，考查数据处理能力，属于基础题.

9、B

【解析】

利用等差数列性质，若 $m+n=p+q$ ，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$ 求出 $a_6=3$ ，再利用等差数列前 n 项和公式得

$$S_{11} = \frac{11(a_1+a_{11})}{2} = 11a_6 = 33$$

【详解】

解：因为 $3+a_5=a_3+a_8$ ，由等差数列性质，若 $m+n=p+q$ ，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$ 得，

$$\therefore a_6=3.$$

$$S_n \text{ 为数列 } \{a_n\} \text{ 的前 } n \text{ 项和，则 } S_{11} = \frac{11(a_1+a_{11})}{2} = 11a_6 = 33.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查等差数列性质与等差数列前 n 项和.

(1)如果 $\{a_n\}$ 为等差数列，若 $m+n=p+q$ ，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$ ($m, n, p, q \in N^*$).

(2)要注意等差数列前 n 项和公式的灵活应用，如 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$.

10、B

【解析】

分别求得所有基本事件个数和满足题意的基本事件个数，根据古典概型概率公式可求得结果.

【详解】

从“八音”中任取不同的“两音”共有 $C_8^2 = 28$ 种取法；

“两音”中含有打击乐器的取法共有 $C_8^2 - C_4^2 = 22$ 种取法；

$$\therefore \text{所求概率 } p = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查古典概型概率问题的求解，关键是能够利用组合的知识求得基本事件总数和满足题意的基本事件个数.

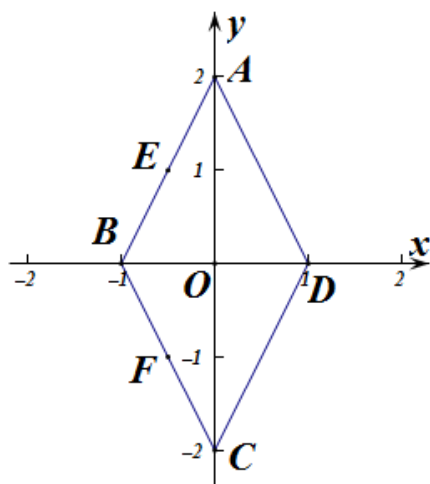
11、B

【解析】

据题意以菱形对角线交点 O 为坐标原点建立平面直角坐标系，用坐标表示出 $\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DF}$ ，再根据坐标形式下向量的数量积运算计算出结果.

【详解】

设 AC 与 BD 交于点 O ，以 O 为原点， $\overrightarrow{BD}$ 的方向为 x 轴， $\overrightarrow{CA}$ 的方向为 y 轴，建立直角坐标系，



$$\text{则 } E\left(-\frac{1}{2}, 1\right), F\left(-\frac{1}{2}, -1\right), D(1, 0), \overrightarrow{DE} = \left(-\frac{3}{2}, 1\right), \overrightarrow{DF} = \left(-\frac{3}{2}, -1\right),$$

$$\text{所以 } \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}.$$

故选：B.

【点睛】

本题考查建立平面直角坐标系解决向量的数量积问题，难度一般.长方形、正方形、菱形中的向量数量积问题，如果直接计算较麻烦可考虑用建系的方法求解.

12、D

【解析】

利用等差数列通项公式推导出 $\lambda = \frac{13-18d}{1+9d}$ ，由 $d \in [1, 2]$ ，能求出实数 λ 取最大值。

【详解】

$\because$ 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列， $a_1=1$ ，公差 $d \in [1, 2]$ ，且 $a_4 + \lambda a_{10} + a_{16} = 15$ ，

$$\therefore 1 + 3d + \lambda(1 + 9d) + 1 + 15d = 15, \text{ 解得 } \lambda = \frac{13-18d}{1+9d},$$

$$\because d \in [1, 2], \lambda = \frac{13-18d}{1+9d} = -2 + \frac{15}{1+9d} \text{ 是减函数},$$

$$\therefore d=1 \text{ 时, 实数 } \lambda \text{ 取最大值为 } \lambda = \frac{13-18}{1+9} = -\frac{1}{2}.$$

故选 D.

【点睛】

本题考查实数值的最大值的求法，考查等差数列的性质等基础知识，考查运算求解能力，是基础题。

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、10

【解析】

由题意得，二项式展开式的通项为 $T_{r+1} = C_5^r x^{5-r} \left(-\frac{2}{x}\right)^r = (-2)^r C_5^r x^{5-2r}$ ，

令 $r=1$ ，则 $T_2 = (-2)^1 C_5^1 x^3 = -10x^3$ ，所以 x^3 得系数为 -10 。

14、 $\frac{\sqrt{10}}{5}$

【解析】

设 $|BF_1| = k$ ，则 $|AF_1| = 3k$ ， $|AB| = |BF_2| = 4k$ ，由 $|BF_1| + |BF_2| = |AF_1| + |AF_2| = 2a$ 知， $5k = 2a$ ， $|AF_2| = 2k$ ，作

$BC \perp AF_2$ ，垂足为 C，则 C 为 AF_2 的中点，在 $Rt\triangle ABC$ 和 $\triangle AF_1F_2$ 中分别求出 $\cos \angle BAF_2$ ，进而求出 c, k 的关系式，即可求出椭圆的离心率。

【详解】

如图，设 $|BF_1| = k$ ，则 $|AF_1| = 3k$ ， $|AB| = |BF_2| = 4k$ ，

由椭圆定义知， $|BF_1| + |BF_2| = |AF_1| + |AF_2| = 2a$ ，

因为 $|BF_1| + |BF_2| = 5k$ ，所以 $5k = 2a$ ， $|AF_2| = 2k$ ，

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/236112104040010232>