

华东师范大学第二附属中学 2025 届高三数学四模试卷

考生须知：

1. 全卷分选择题和非选择题两部分，全部在答题纸上作答。选择题必须用 2B 铅笔填涂；非选择题的答案必须用黑色字迹的钢笔或答字笔写在“答题纸”相应位置上。
2. 请用黑色字迹的钢笔或答字笔在“答题纸”上先填写姓名和准考证号。
3. 保持卡面清洁，不要折叠，不要弄破、弄皱，在草稿纸、试题卷上答题无效。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设函数 $f(x) = \ln(x-1)$ 的定义域为 D ，命题 $P: \forall x \in D, f(x) \leq x$ 的否定是 ()

- A. $\forall x \in D, f(x) > x$ B. $\exists x_0 \in D, f(x_0) \leq x_0$
C. $\forall x \notin D, f(x) > x$ D. $\exists x_0 \in D, f(x_0) > x_0$

2. O 是平面上的一点， A, B, C 是平面上不共线的三点，动点 P 满足 $\vec{OP} = \vec{OA} + \lambda \left(\frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}| \cos B} + \frac{\vec{AC}}{|\vec{AC}| \cos C} \right)$, $\lambda \in (0, \infty)$ ，则动点 P 的轨迹一定经过 $\triangle ABC$ 的 ()

- A. 重心 B. 垂心 C. 外心 D. 内心

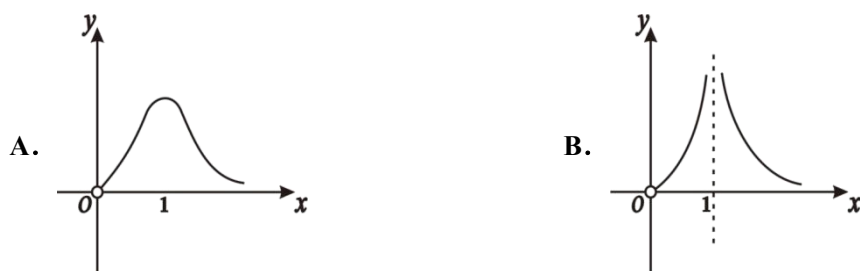
3. 已知函数 $f(x) = \frac{e \ln x}{x^2}$ ，若关于 x 的方程 $[f(x)]^2 - mf(x) + \frac{1}{8} = 0$ 有 4 个不同的实数根，则实数 m 的取值范围为 ()

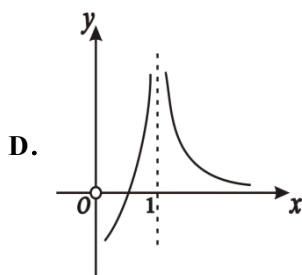
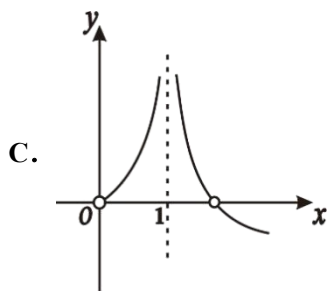
- A. $(0, \frac{3}{4})$ B. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ C. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$ D. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

4. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上恰有四个不同的零点，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(e, 3) \cup (3, +\infty)$ B. $[0, e)$ C. $(e^2, +\infty)$ D. $(-\infty, e) \cup \{3\}$

5. 函数 $f(x) = \frac{1}{x - \ln x - 1}$ 的图象大致是 ()





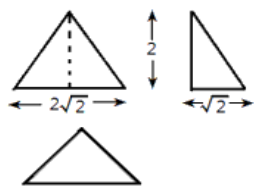
6. 若 $|\vec{OA}| = 1$, $|\vec{OB}| = \sqrt{3}$, $\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0$, 点 C 在 AB 上, 且 $\angle AOC = 30^\circ$, 设 $\vec{OC} = m\vec{OA} + n\vec{OB}$ ($m, n \in R$), 则 $\frac{m}{n}$ 的值为 ()

- A. $\frac{1}{3}$ B. 3 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\sqrt{3}$

7. 已知 x, y 满足 $\begin{cases} y \geq x \\ x + y \leq 2 \\ x \geq a \end{cases}$, 且 $z = 2x + y$ 的最大值是最小值的 4 倍, 则 a 的值是 ()

- A. 4 B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{2}{11}$ D. $\frac{1}{4}$

8. 已知棱锥的三视图如图所示, 其中俯视图是等腰直角三角形, 则该三棱锥的四个面中, 最大面积为 ()



- A. $2\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. $2\sqrt{6}$

9. 中心在原点, 对称轴为坐标轴的双曲线 C 的两条渐近线与圆 $(x-2)^2 + y^2 = 1$ 都相切, 则双曲线 C 的离心率是 ()

- A. 2 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ B. 2 或 $\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 或 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

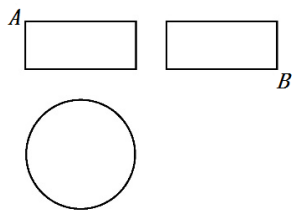
10. 已知平面向量 $\vec{a} = (4, 2)$, $\vec{b} = (x, 3)$, $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则实数 x 的值等于 ()

- A. 6 B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. $-\frac{3}{2}$

11. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a + 2c = 2b \cos A$, 则角 B 的大小为 ()

- A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

12. 某圆柱的高为 2, 底面周长为 16, 其三视图如图所示, 圆柱表面上的点 M 在正视图上的对应点为 A , 圆柱表面上的点 N 在左视图上的对应点为 B , 则在此圆柱侧面上, 从 M 到 N 的路径中, 最短路径的长度为 ()



- A. $2\sqrt{17}$ B. $2\sqrt{5}$ C. 3 D. 2

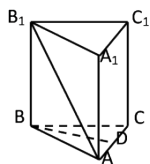
二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知直线 $x - y + a = 0$ 与圆心为 C 的圆 $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ 相交于 A, B 两点，且 $AC \perp BC$ ，则实数 a 的值为_____.

14. 过直线 $y = kx + 7$ 上一动点 $M(x, y)$ 向圆 $C: x^2 + y^2 + 2y = 0$ 引两条切线 MA, MB ，切点为 A, B ，若 $k \in [1, 4]$ ，则四边形 $MACB$ 的最小面积 $S \in [\sqrt{3}, \sqrt{7}]$ 的概率为_____.

15. 已知全集为 $\mathbf{R}$ ，集合 $A = \{x | x^2 - x = 0\}$ ， $B = \{-1, 0\}$ ，则 $A \cup B =$ _____.

16. 如图所示，在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中， D 是 AC 的中点， $AA_1 : AB = \sqrt{2} : 1$ ，则异面直线 AB_1 与 BD 所成的角为_____.



三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 = 5$ ， $a_5 = 14$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2b_n - 1$.

(1) 求 a_n, b_n ;

(2) 若 $c_n = (-1)^n a_n + b_n$ ，求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分) 已知 2 件次品和 3 件正品混放在一起，现需要通过检测将其区分，每次随机检测一件产品，检测后不放回，直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时检测结束.

(1) 求第一次检测出的是次品且第二次检测出的是正品的概率；

(2) 已知每检测一件产品需要费用 100 元，设 X 表示直到检测出 2 件次品或者检测出 3 件正品时所需要的检测费用 (单位：元)，求 X 的分布列.

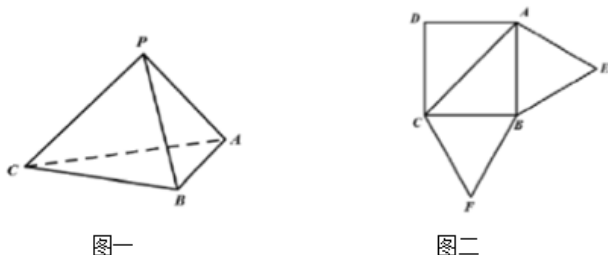
19. (12 分) 已知函数 $y = f(x)$ 与 $y = e^x$ 的图象关于直线 $y = x$ 对称. (e 为自然对数的底数)

(1) 若 $y = f(x)$ 的图象在点 $A(x_0, f(x_0))$ 处的切线经过点 $(-e, -1)$ ，求 x_0 的值；

(2) 若不等式 $f(x) \geq \frac{1}{2}ax^2 - (1-a)x - 1$ 恒成立，求正整数 a 的最小值.

20. (12 分) 设数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, $T_n = na_1 + (n-1)a_2 + \dots + 2a_{n-1} + a_n$, 已知 $T_1 = 1, T_2 = 4$, (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的首项和公比; (2) 求数列 $\{T_n\}$ 的通项公式.

21. (12 分) 已知三棱锥 $P-ABC$ (如图一) 的平面展开图 (如图二) 中, 四边形 $ABCD$ 为边长等于 $\sqrt{2}$ 的正方形, $\triangle ABE$ 和 $\triangle BCF$ 均为正三角形, 在三棱锥 $P-ABC$ 中:



(1) 证明: 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ;

(2) 若点 M 在棱 PA 上运动, 当直线 BM 与平面 PAC 所成的角最大时, 求直线 MA 与平面 MBC 所成角的正弦值.

22. (10 分) 已知首项为 2 的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{2na_n + 2^{n+1}}{n+1}$.

(1) 证明: 数列 $\left\{\frac{na_n}{2^n}\right\}$ 是等差数列.

(2) 令 $b_n = a_n + n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分。在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的。

1、D

【解析】

根据命题的否定的定义, 全称命题的否定是特称命题求解.

【详解】

因为 $P: \forall x \in D, f(x) \leq x$ 是全称命题,

所以其否定是特称命题, 即 $\exists x_0 \in D, f(x_0) > x_0$.

故选：D

【点睛】

本题主要考查命题的否定，还考查了理解辨析的能力，属于基础题.

2、B

【解析】

解出 $\overrightarrow{AP}$ ，计算 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC}$ 并化简可得出结论.

【详解】

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot \cos C} \right),$$

$$\therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC} = \lambda \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot \cos B} + \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AC}| \cdot \cos C} \right) = \lambda \left(-|\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{BC}| \right) = 0,$$

$\therefore \overrightarrow{AP} \perp \overrightarrow{BC}$ ，即点 P 在 BC 边的高上，即点 P 的轨迹经过 $\triangle ABC$ 的垂心.

故选 B.

【点睛】

本题考查了平面向量的数量积运算在几何中的应用，根据条件中的角计算 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BC}$ 是关键.

3、C

【解析】

求导，先求出 $f(x)$ 在 $x \in (0, \sqrt{e})$ 单增，在 $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ 单减，且 $f(x)_{\max} = f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$ 知设 $f(x) = t$ ，则方程

$[f(x)]^2 - mf(x) + \frac{1}{8} = 0$ 有 4 个不同的实数根等价于方程

$t^2 - mt + \frac{1}{8} = 0$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上有两个不同的实数根，再利用一元二次方程根的分布条件列不等式组求解可得.

【详解】

$$\text{依题意, } f'(x) = \frac{\frac{e}{x} \cdot x^2 - 2xe \ln x}{x^4} = \frac{e(1 - 2 \ln x)}{x^3},$$

令 $f'(x) = 0$ ，解得 $\ln x = \frac{1}{2}$ ， $x = \sqrt{e}$ ，故当 $x \in (0, \sqrt{e})$ 时， $f'(x) > 0$ ，

当 $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ ， $f'(x) < 0$ ，且 $f(\sqrt{e}) = \frac{e \ln \sqrt{e}}{e} = \frac{1}{2}$ ，

故方程 $t^2 - mt + \frac{1}{8} = 0$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上有两个不同的实数根,

$$\text{故} \begin{cases} \Delta > 0 \\ (t_1 - \frac{1}{2})(t_2 - \frac{1}{2}) > 0 \\ 0 < t_1 + t_2 < 1 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases}, \begin{cases} m^2 - \frac{1}{2} > 0 \\ \frac{1}{8} - \frac{m}{2} + \frac{1}{4} > 0 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$$

$$\text{解得 } m \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4}).$$

故选: C.

【点睛】

本题考查确定函数零点或方程根个数.其方法:

(1)构造法: 构造函数 $g(x)$ ($g'(x)$ 易求, $g'(x)=0$ 可解), 转化为确定 $g(x)$ 的零点个数问题求解, 利用导数研究该函数

的单调性、极值, 并确定定义区间端点值的符号(或变化趋势)等, 画出 $g(x)$ 的图象草图, 数形结合求解;

(2)定理法: 先用零点存在性定理判断函数在某区间上有零点, 然后利用导数研究函数的单调性、极值(最值)及区间端点值符号, 进而判断函数在该区间上零点的个数.

4、A

【解析】

函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a$ 的零点就是方程 $\frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a = 0$ 的解, 设 $g(x) = \frac{x}{\ln x}$, 方程可化为

$(g(x)-3)(g(x)-a)=0$, 即 $g(x)=3$ 或 $g(x)=a$, 求出 $g(x)$ 的导数 $g'(x)$, 利用导数得出函数的单调性和最值, 由此可根据方程解的个数得出 a 的范围.

【详解】

由题意得 $\frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a = 0$ 有四个大于1的不等实根, 记 $g(x) = \frac{x}{\ln x}$, 则上述方程转化为

$$(g(x)-3) + a \left(\frac{3}{g(x)} - 1 \right) = 0,$$

即 $(g(x)-3)(g(x)-a)=0$, 所以 $g(x)=3$ 或 $g(x)=a$.

因为 $g'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$, 当 $x \in (1, e)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$

单调递增；所以 $g(x)$ 在 $x=e$ 处取得最小值，最小值为 $g(e)=e$ 。因为 $3>e$ ，所以 $g(x)=3$ 有两个符合条件的实数

解，故 $f(x)=\frac{x}{\ln x}-3+\frac{3a\ln x}{x}-a$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上恰有四个不相等的零点，需 $a>e$ 且 $a\neq 3$ 。

故选：A。

【点睛】

本题考查复合函数的零点。考查转化与化归思想，函数零点转化为方程的解，方程的解再转化为研究函数的性质，本题考查了学生分析问题解决问题的能力。

5、B

【解析】

根据函数表达式,把分母设为新函数,首先计算函数定义域,然后求导,根据导函数的正负判断函数单调性,对应函数图像得到答案.

【详解】

设 $g(x)=x-\ln x-1$ ， $g(1)=0$ ，则 $f(x)=\frac{1}{x-\ln x-1}$ 的定义域为 $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ 。 $g'(x)=1-\frac{1}{x}$ ，当 $x\in(1,+\infty)$ ，

$g'(x)>0$ ， $g(x)$ 单增，当 $x\in(0,1)$ ， $g'(x)<0$ ， $g(x)$ 单减，则 $g(x)\geq g(1)=0$ 。则 $f(x)$ 在 $x\in(0,1)$ 上单增，

$x\in(1,+\infty)$ 上单减， $f(x)>0$ 。选 B。

【点睛】

本题考查了函数图像的判断,用到了换元的思想,简化了运算,同学们还可以用特殊值法等方法进行判断。

6、B

【解析】

利用向量的数量积运算即可算出。

【详解】

解：Q $\angle AOC=30^\circ$

$$\therefore \cos \angle AOC = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OA}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OC}| |\overrightarrow{OA}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{(m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OA}}{|m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OA}|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \frac{m|\vec{OA}|^2 + n\vec{OB} \cdot \vec{OA}}{\sqrt{m^2|\vec{OA}|^2 + 2mn\vec{OA} \cdot \vec{OB} + n^2|\vec{OB}|^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Q } |\vec{OA}|=1, |\vec{OB}|=\sqrt{3}, \vec{OA} \cdot \vec{OB}=0$$

$$\therefore \frac{m}{\sqrt{m^2 + 3n^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore m^2 = 9n^2$$

又Q C 在 AB 上

$$\therefore m > 0, n > 0$$

$$\therefore \frac{m}{n} = 3$$

故选: B

【点睛】

本题主要考查了向量的基本运算的应用, 向量的基本定理的应用及向量共线定理等知识的综合应用.

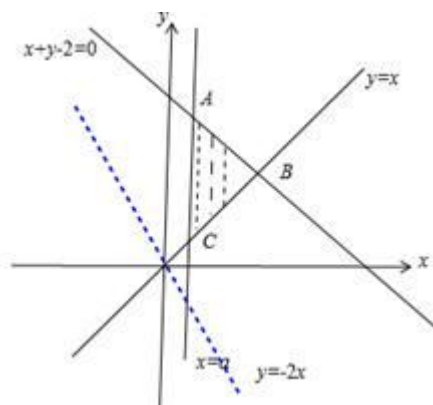
7、D

【解析】

试题分析: 先画出可行域如图: 由 $\begin{cases} y=x \\ x+y=2 \end{cases}$, 得 $B(1,1)$, 由 $\begin{cases} x=a \\ y=x \end{cases}$, 得 $C(a,a)$, 当直线 $z=2x+y$ 过点 $B(1,1)$ 时,

目标函数 $z=2x+y$ 取得最大值, 最大值为 3; 当直线 $z=2x+y$ 过点 $C(a,a)$ 时, 目标函数 $z=2x+y$ 取得最小值,

最小值为 $3a$; 由条件得 $3=4 \times 3a$, 所以 $a=\frac{1}{4}$, 故选 D.



考点: 线性规划.

8、B

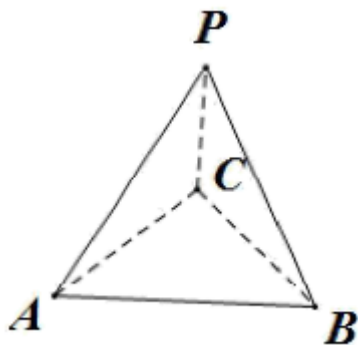
【解析】

由三视图可知, 该三棱锥如图, 其中底面 ABC 是等腰直角三角形, $PC \perp$ 平面 ABC

,结合三视图求出每个面的面积即可.

【详解】

由三视图可知,该三棱锥如图所示:



其中底面 ABC 是等腰直角三角形, $PC \perp$ 平面 ABC ,

由三视图知, $PC = 2, AB = 2\sqrt{2}$,

因为 $PC \perp BC, PC \perp AC, AC = BC, AC \perp CB$,

所以 $AC = BC = 2, PA = PB = AB = 2\sqrt{2}$,

所以 $S_{\triangle PAC} = S_{\triangle PCB} = S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2$,

因为 $\triangle PAB$ 为等边三角形,

所以 $S_{\triangle PAB} = \frac{\sqrt{3}}{4} AB^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (2\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{3}$,

所以该三棱锥的四个面中,最大面积为 $2\sqrt{3}$.

故选: B

【点睛】

本题考查三视图还原几何体并求其面积;考查空间想象能力和运算求解能力;三视图正确还原几何体是求解本题的关键;属于中档题、常考题型.

9、A

【解析】

根据题意,由圆的切线求得双曲线的渐近线的方程,再分焦点在 x 、 y 轴上两种情况讨论,进而求得双曲线的离心率.

【详解】

设双曲线 C 的渐近线方程为 $y=kx$, 是圆的切线得: $\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}=1, \therefore k=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$,

得双曲线的一条渐近线的方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$ ∴ 焦点在 x 、 y 轴上两种情况讨论：

① 当焦点在 x 轴上时有： $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3^2 + 3}}{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$;

② 当焦点在 y 轴上时有： $\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3^2 + 3}}{\sqrt{3}} = 2$;

∴ 求得双曲线的离心率 2 或 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

故选：A.

【点睛】

本小题主要考查直线与圆的位置关系、双曲线的简单性质等基础知识，考查运算求解能力，考查数形结合思想．解题的关键是：由圆的切线求得直线的方程，再由双曲线中渐近线的方程的关系建立等式，从而解出双曲线的离心率的值．此题易忽视两解得出错误答案．

10、A

【解析】

根据向量平行的坐标表示即可求解．

【详解】

$$\vec{a} = (4, 2), \vec{b} = (x, 3), \vec{a} \parallel \vec{b},$$

$$\therefore 4 \times 3 = 2x,$$

$$\text{即 } x = 6,$$

故选：A

【点睛】

本题主要考查了向量平行的坐标运算，属于容易题．

11、A

【解析】

先利用正弦定理将边统一化为角，然后利用三角函数公式化简，可求出解 B ．

【详解】

由正弦定理可得 $\sin A + 2\sin C = 2\sin B \cos A$ ，即 $\sin A + 2\sin(A + B) = 2\sin B \cos A$ ，即有 $\sin A(1 + 2\cos B) = 0$ ，

因为 $\sin A > 0$ ，则 $\cos B = -\frac{1}{2}$ ，而 $B \in (0, \pi)$ ，所以 $B = \frac{2\pi}{3}$ ．

故选：A

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/236133204151011042>