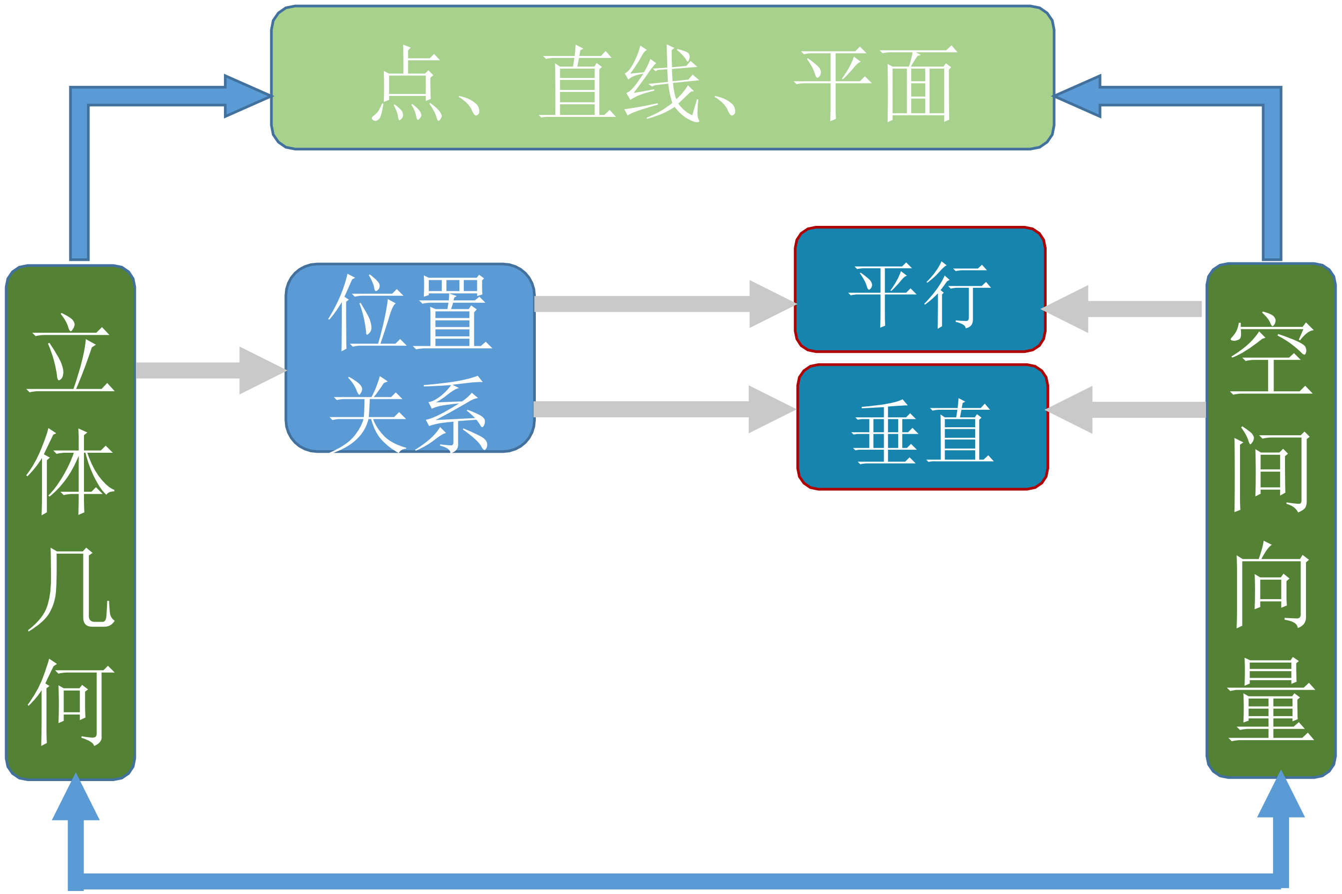
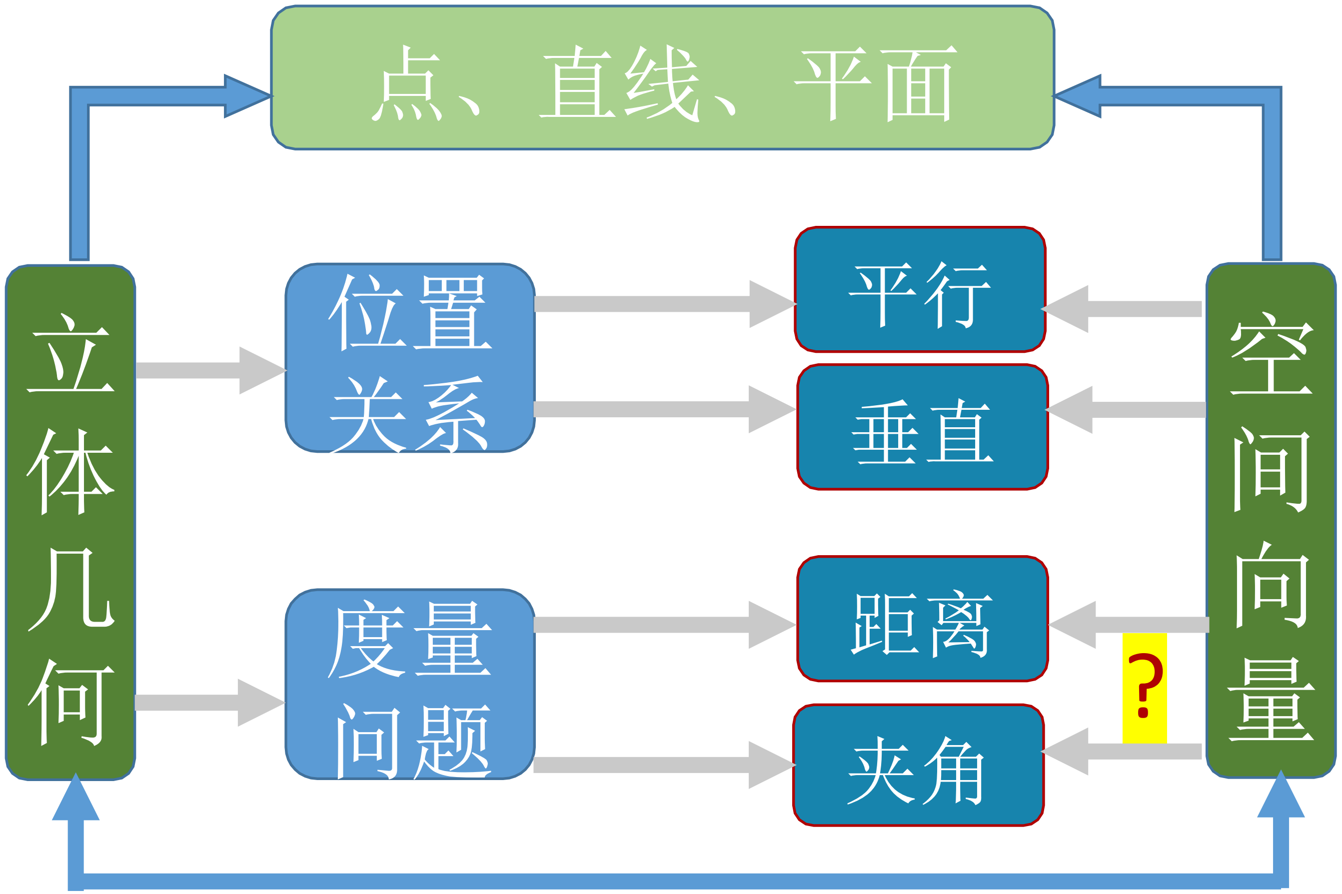
用空间向量研究距离、夹角问题

复习回顾

设$\boldsymbol{u}_1$，$\boldsymbol{u}_2$分别是直线l_1，l_2的方向向量，$\boldsymbol{n}_1$，$\boldsymbol{n}_2$分别是平面α，β的法向量.

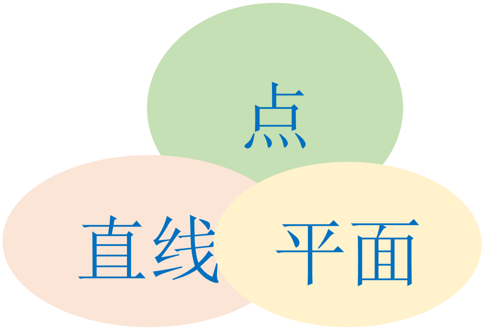
线线平行	$l_1 // l_2 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{u}_1 // \boldsymbol{u}_2$ $\Leftrightarrow$ $\exists\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{u}_1=\lambda\boldsymbol{u}_2$
线面平行	$l_1 // \alpha \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{u}_1\perp\boldsymbol{n}_1$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{n}_1=0$
面面平行	$\alpha // \beta \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{n}_1 // \boldsymbol{n}_2$ $\Leftrightarrow$ $\exists\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{n}_1=\lambda\boldsymbol{n}_2$
线线垂直	$l_1\perp l_2 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{u}_1\perp\boldsymbol{u}_2$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{u}_1\cdot\boldsymbol{u}_2=0$
线面垂直	$l_1\perp\alpha \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{u}_1 // \boldsymbol{n}_1$ $\Leftrightarrow$ $\exists\lambda\in\mathbf{R}$，使得 $\boldsymbol{u}_1=\lambda\boldsymbol{n}_1$
面面垂直	$\alpha\perp\beta \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{n}_1\perp\boldsymbol{n}_2$ $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$


点、直线、平面
位置关系
平行
垂直
立体几何
空间向量


点、直线、平面
立体几何
位置关系
度量问题
平行
垂直
距离
夹角
?
空间向量

第1课时：
用空间向量研究距离问题

空间中距离



- 两点间的距离

用垂直刻画

- 点到直线的距离
- 两平行线之间的距离
- 点到平面的距离
- 直线到平面的距离
- 两个平行平面间的距离

问题1 你能把这些距离问题归类吗？

- 两点间的距离
  - 点到直线的距离
    - 点到直线的距离
    - 两平行线之间的距离
  - 点到平面的距离
    - 点到平面的距离
    - 直线到平面的距离
    - 两个平行平面间的距离

追问 如何用向量研究距离？

距离 ⟺ 向量的模

空间两点间的距离 ⟺ 空间向量的模

1. 空间两点之间的距离

根据两向量数量积的性质和坐标运算，利用公式 $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$ 或 $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$（其中 $\vec{a}=(x,y,z)$），可将两点距离问题转化为求向量模长问题

空间中其它距离 $\xrightarrow{垂直}$? 投影向量/勾股定理

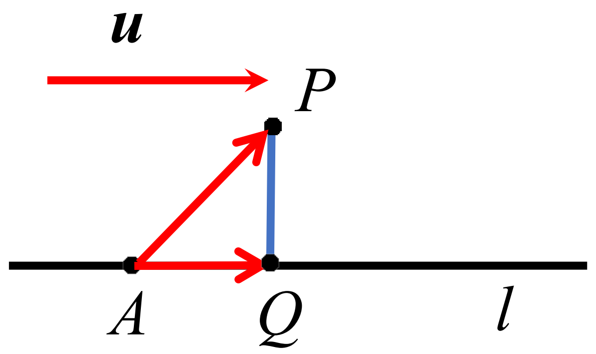
2. 点到直线的距离

问题2　P 是直线 l 外的一点，如何求出点 P 到 l 的距离？

2. 点到直线的距离

问题2 P 是直线 l 外的一点，如何求出点 P 到 l 的距离？

直线 l的单位方向向量为$\boldsymbol{u}$
A是直线 l上的定点



追问1 如何利用这些条件求点 P 到 l 的距离?

①求出$\overrightarrow{AP}$ ②求$\overrightarrow{AP}$在l上的投影向量$\overrightarrow{AQ}$

③应用勾股定理求PQ的长度

2. 点到直线的距离

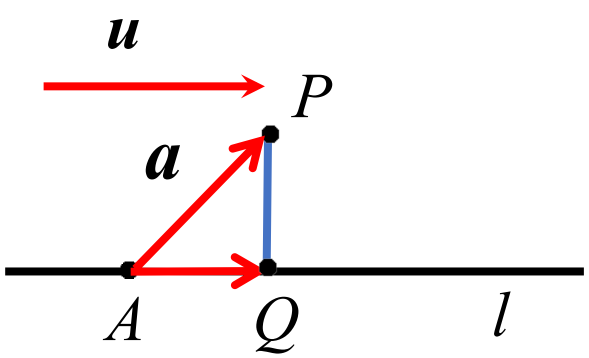
追问2　如何表示$\overrightarrow{AP}$在直线 l 上的投影向量？

在空间中，向量a在向量b方向上的投影向量为

$$c=|a|\cos\langle a,b\rangle\frac{b}{|b|}$$

直线 l的单位方向向量为u

A是直线 l上的定点



$$\overrightarrow{AQ}=(\overrightarrow{AP}\cdot u)u$$

$$=(a\cdot u)u$$

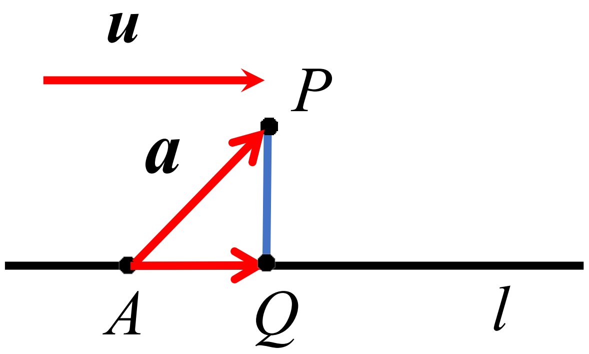
$$|\overrightarrow{AQ}|=|a\cdot u|$$

设$\overrightarrow{AP}=a$

2. 点到直线的距离

直线 l的单位方向向量为$\boldsymbol{u}$

A是直线 l上的定点

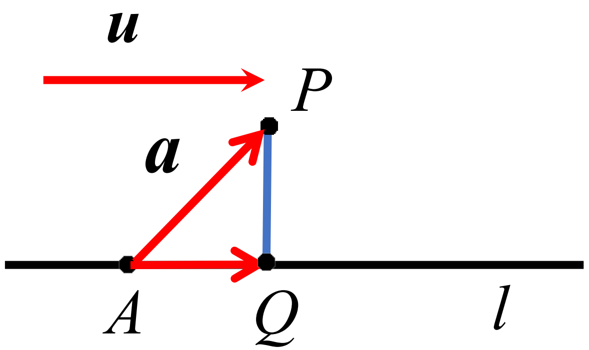


点 P到直线l的距离

$$PQ=\sqrt{\overrightarrow{AP}^2-\overrightarrow{AQ}^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u})^2}$$

追问3 如果条件改为“直线l 的方向向量”呢？

直线 l的单位方向向量为$\boldsymbol{u}$
A是直线 l上的定点

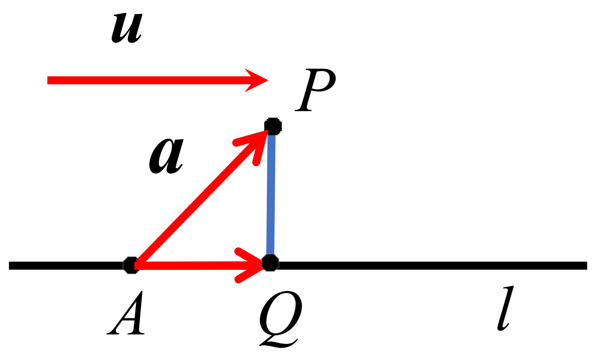


点 P到l的距离 ?

直线 l的方向向量为$\boldsymbol{u}$

A是直线 l上的定点

点 P到l的距离?



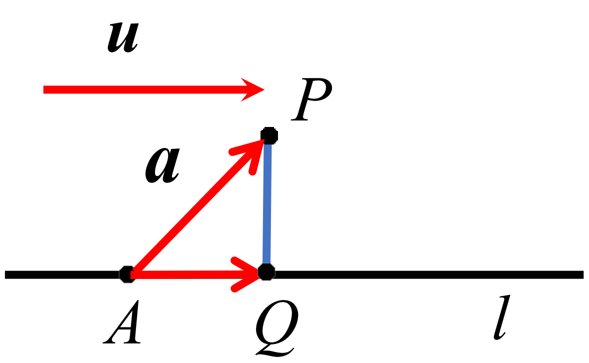
$\dfrac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}$为直线$l$的单位方向向量

$\overrightarrow{AP}$在直线l 上的投影向量 $\overrightarrow{AQ}=(\boldsymbol{a}\cdot\dfrac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|})\dfrac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}$

$$|\overrightarrow{AQ}|=\left|\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}\right|=\left|\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}\right|=\frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}|}{|\boldsymbol{u}|}$$

直线 l 的方向向量为 $\boldsymbol{u}$

A 是直线 l 上的定点



点 P 到直线 l 的距离

$$PQ=\sqrt{\overrightarrow{AP}^2-\overrightarrow{AQ}^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}\right)^2}$$

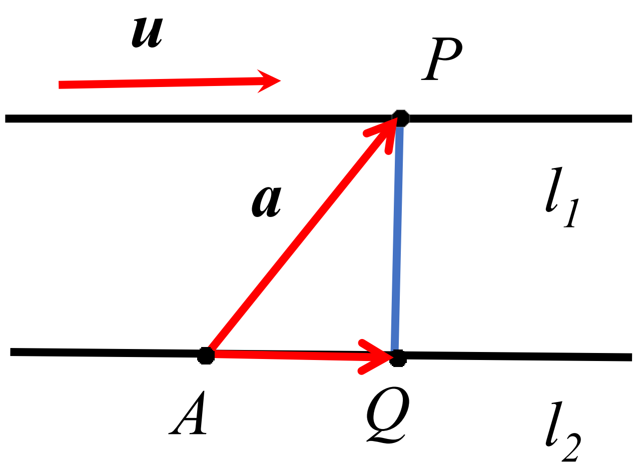
3. 两平行线间的距离

追问4　如何用向量方法求两平行线之间的距离？

需要具备哪些条件？

两直线的方向向量为$\boldsymbol{u}$

P，A分别是直线 l_1，l_2上的点



$$PQ=\sqrt{\overrightarrow{AP}^2-\overrightarrow{AQ}^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}\right)^2}$$

当堂训练

1.已知$A(0, 0, 2)$，$B(1, 0, 2)$，$C(0, 2, 0)$，则点A到直线BC的距离为

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$　　B. 1　　C. $\sqrt{2}$　　D. $2\sqrt{2}$

解析　∵$A(0, 0,2)$，$B(1, 0,2)$，$C(0, 2,0)$，

$\overrightarrow{AB}=(1, 0,0)$，$\overrightarrow{BC}=(-1, 2, -2)$，

∴点A到直线BC的距离为

$$d=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2-\left(\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BC}|}\right)^2}=\sqrt{1-\left(\frac{-1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

2.已知直线l经过点$A(2,3,1)$，且向量$\boldsymbol{n}=(1,0，-1)$所在直线与l垂直，则点$P(4,3,2)$到l的距离为 $\underline{\quad\dfrac{\sqrt{2}}{2}\quad}$.

解析 因为$\overrightarrow{PA}=(-2,0，-1)$，又$\boldsymbol{n}$与$l$垂直，

所以点P到l的距离为$\dfrac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-2+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

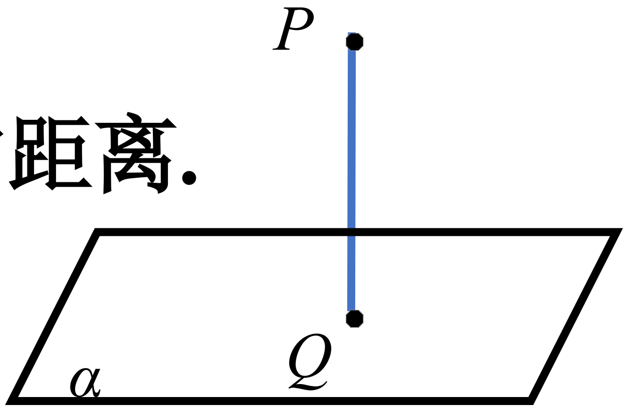
4. 点到平面的距离

问题3 P 是平面 α外的一点，如何求点P到平面 α的距离？

追问1 如何作出点P 到平面 α的距离？

过点P作$PQ\perp\alpha$， 垂足为Q

垂线段PQ的长度为点P到平面α的距离.



追问2 如何利用这些条件求点P到平面 α的距离？

平面 α的法向量为$\boldsymbol{n}$

A是平面α内的定点

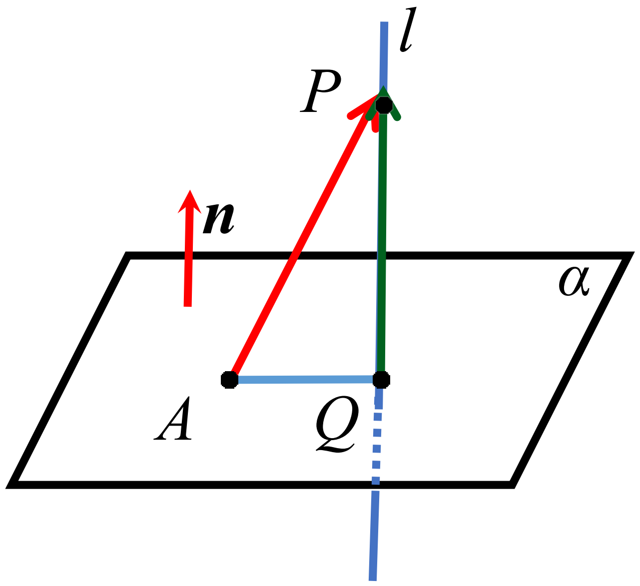
①求$\overrightarrow{AP}$

②求$\overrightarrow{AP}$在l上的投影向量$\overrightarrow{QP}$

③求PQ的长度

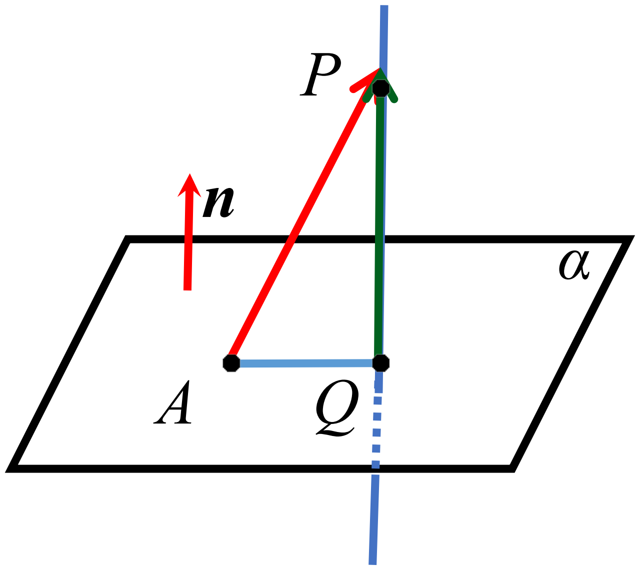
$$\overrightarrow{QP}=(\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|})\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}$$

$$|\overrightarrow{QP}|=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|$$



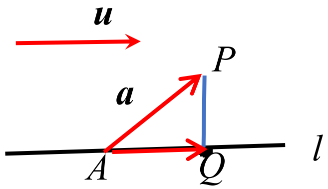
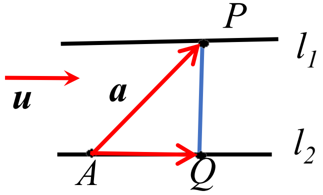
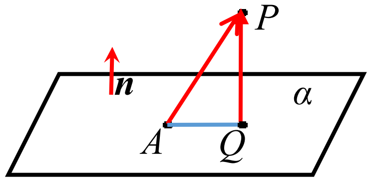
平面 α的法向量为$\boldsymbol{n}$
A是平面α内的定点

点P 到平面 α的距离



$$PQ=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

小结：整理向量方法求距离的相关公式

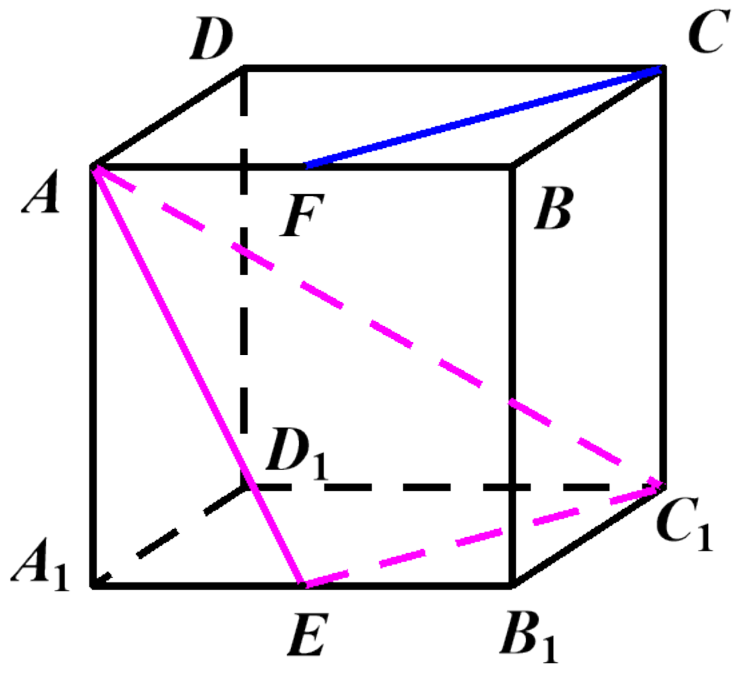
距离问题	图示	向量法距离公式
两点间的距离		$PQ=\lvert\overrightarrow{PQ}\rvert$
点到直线的距离		$PQ=\sqrt{\overrightarrow{AP}^2-\overrightarrow{AQ}^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}}{\lvert\boldsymbol{u}\rvert})^2}$
两平行线之间的距离		$PQ=\sqrt{\overrightarrow{AP}^2-\overrightarrow{AQ}^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}}{\lvert\boldsymbol{u}\rvert})^2}$
点到平面的距离		$PQ=\left\lvert\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{\lvert\boldsymbol{n}\rvert}\right\rvert=\frac{\lvert\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}\rvert}{\lvert\boldsymbol{n}\rvert}$

投影向量+勾股定理

例6. 如图，在棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E为线段A_1B_1的中点，F为线段AB的中点.

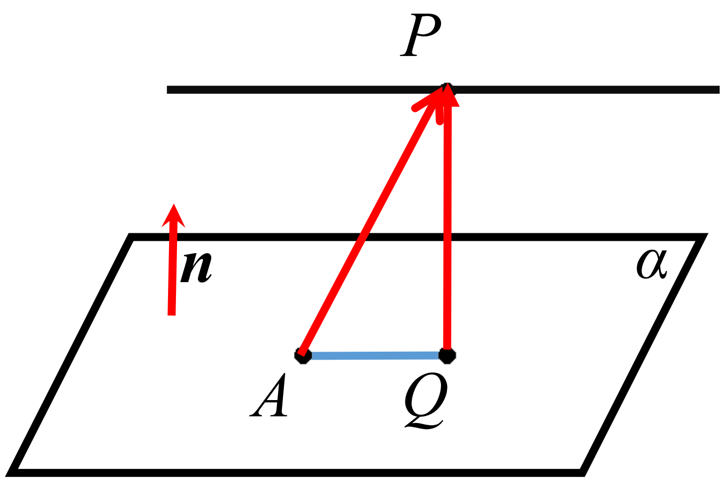
（1）求点B到直线AC_1的距离；

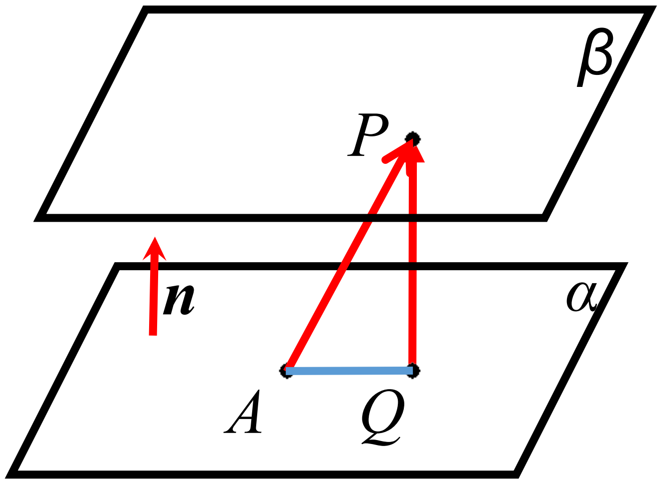
（2）判断直线FC与平面AEC_1的位置关系；如果平行，求直线FC到平面AEC_1的距离.



例题小结

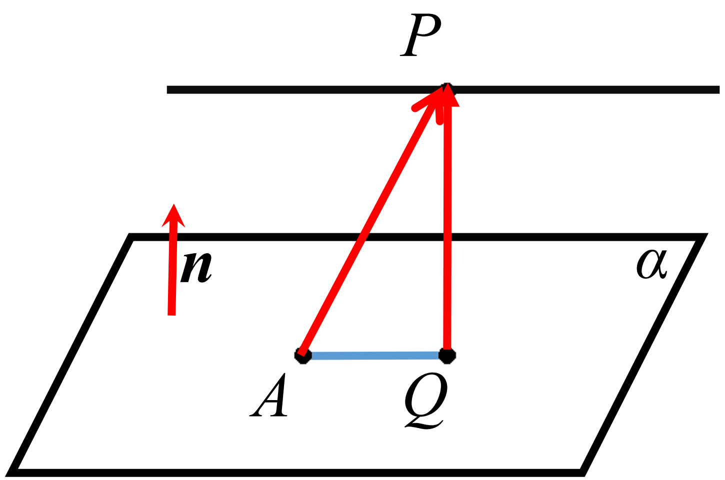
1. 求直线到平面的距离、两个平行平面间的距离可以转化为点到平面的距离.



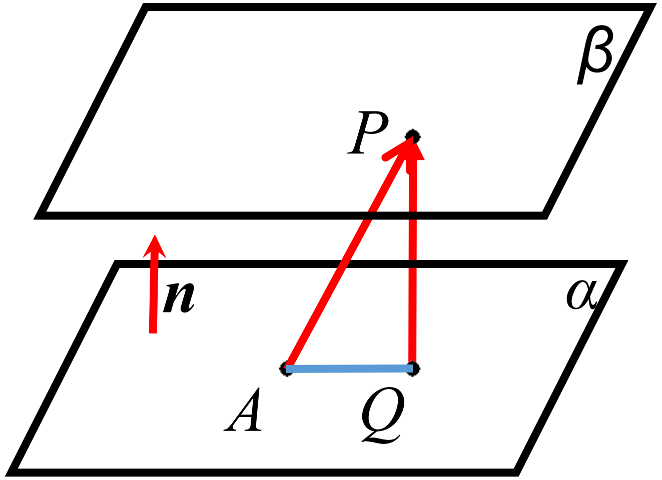


$$PQ=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

直线到平面的距离



两个平行平面间的距离



例题小结

2. 用向量方法解决距离问题的“三步曲”：

化为向量问题 —— ①建立空间直角坐标系，求所需向量的坐标

↓

进行向量运算 —— ②应用距离的向量计算公式

↓

回到图形问题 —— ③得到所求距离

学习小结

问题4　　本节课研究的主要内容有哪些？

- 空间中的距离问题
- 投影向量、勾股定理、向量数量积运算相结合
- 距离的向量计算公式

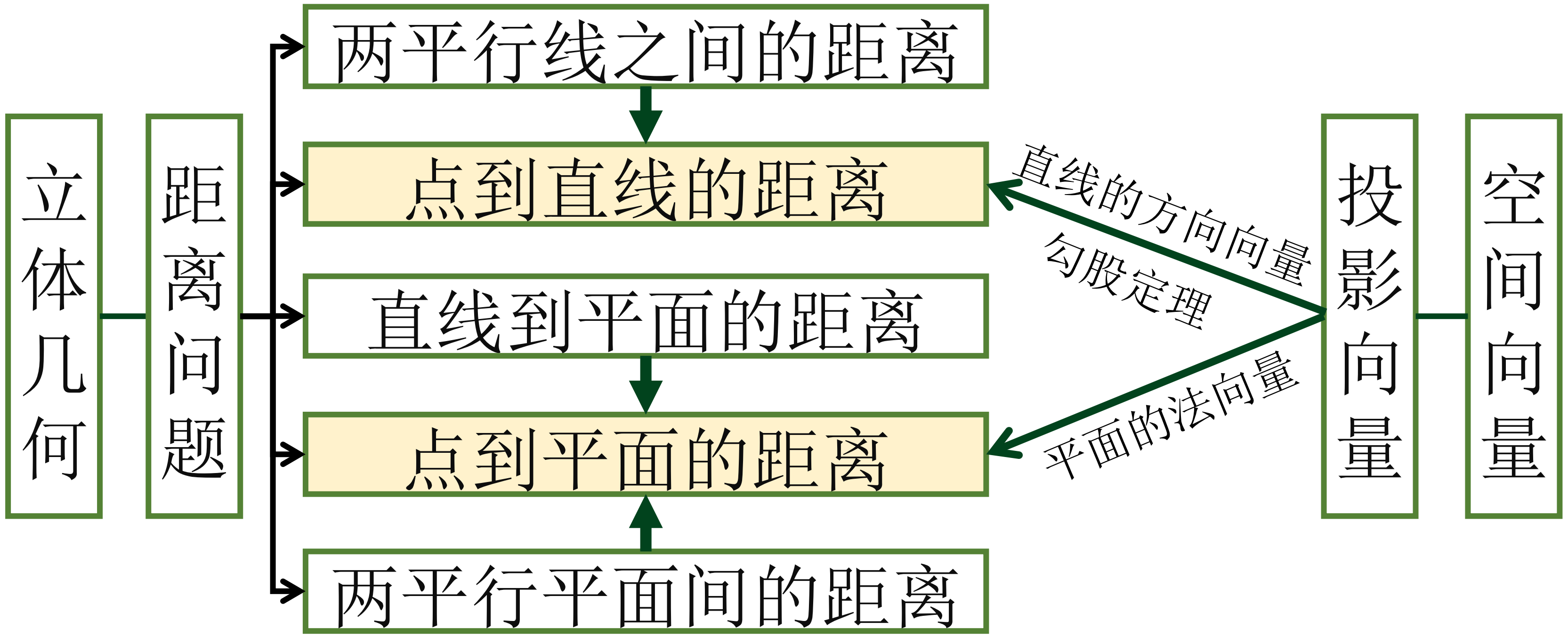
$$PQ=|\overrightarrow{PQ}|$$

$$PQ=\left|\overrightarrow{AP}\cdot\frac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}\right|=\frac{|\overrightarrow{AP}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$$

$$PQ=\sqrt{\overrightarrow{AP}^2-\overrightarrow{AQ}^2}=\sqrt{\boldsymbol{a}^2-\left(\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{u}}{|\boldsymbol{u}|}\right)^2}$$

学习小结

问题5　　本节课我们采用的研究方法是什么？



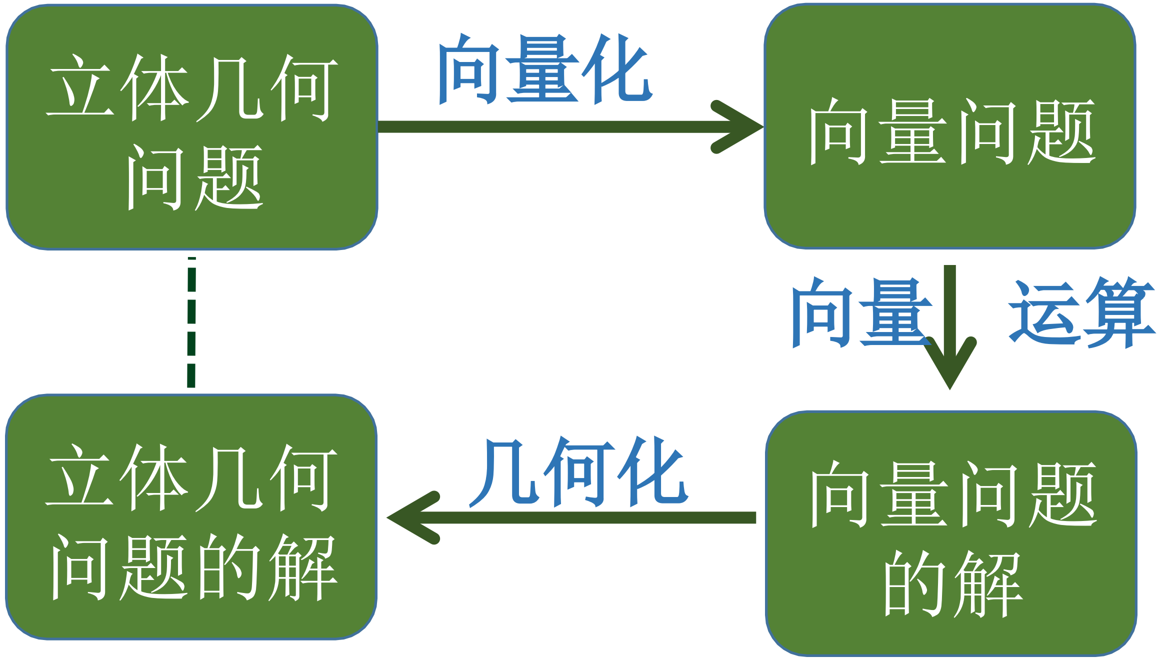
用空间向量解决立体几何问题的“三步曲”：

(1)建立立体图形与空间向量的联系，用空间向量表示问题中涉及的点、直线、平面，把立体几何问题转化为向量问题；

(2)通过向量运算，研究点、直线、平面之间的位置关系以及它们之间的距离和夹角等问题；

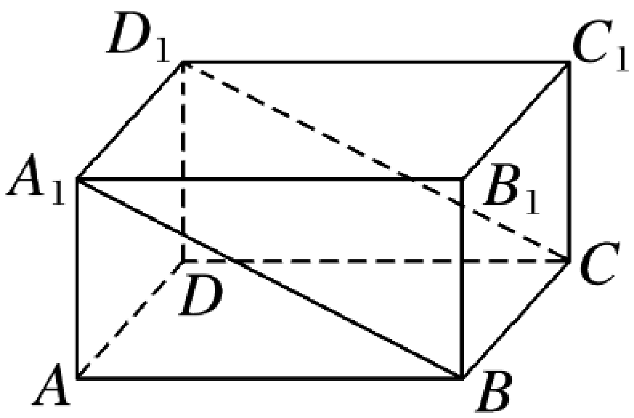
(3)把向量运算的结果“翻译”成相应的几何结论.

问题6 本节课的学习你体会到向量方法解决立体几何问题的“三步曲”吗？



当堂训练

3.如图，已知长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，$A_1A=5$，$AB=12$，则直线B_1C_1到平面A_1BCD_1的距离是

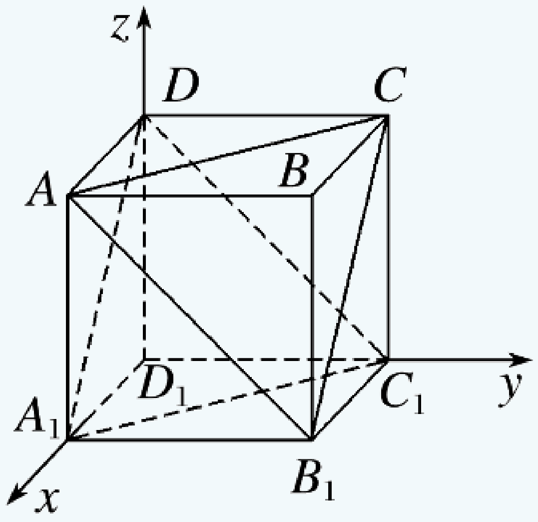


A.5　　B.8　　C.$\frac{60}{13}$　　D.$\frac{13}{3}$

4.已知棱长为1的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，则平面AB_1C与平面A_1C_1D之间的距离为

A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$　　　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

解析 建立如图所示的空间直角坐标系，



则$A_1(1,0,0),C_1(0,1,0),D(0,0,1),A(1,0,1)$，

所以 $\overrightarrow{DA_1}=(1,0，-1)$，$\overrightarrow{DC_1}=(0,1，-1)$，$\overrightarrow{AD}=(-1,0,0)$，

设平面A_1C_1D的一个法向量为$\boldsymbol{m}=(x，y，1)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{DA_1},\\ \boldsymbol{m}\perp\overrightarrow{DC_1},\end{cases}$ 即$\begin{cases}x-1=0,\\ y-1=0,\end{cases}$

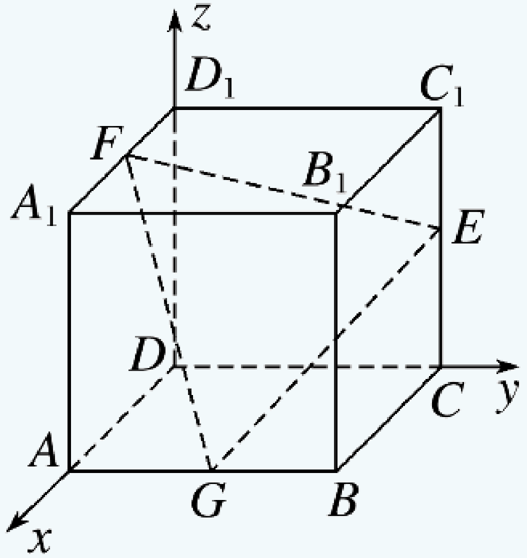
解得$\begin{cases}x=1,\\ y=1,\end{cases}$ 故 $\boldsymbol{m}=(1,1,1)$，

显然平面AB_1C∥平面A_1C_1D，

所以平面 AB_1C 与平面 A_1C_1D 之间的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{m}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

6.已知正方体$ABCD$ - $A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，E，F，G分别是C_1C，D_1A_1，AB的中点，则点A到平面EFG的距离为$\underline{\quad \frac{\sqrt{3}}{3} \quad}$.

解析　建系如图，



则$A(2,0,0)$，$E(0,2,1)$，$F(1,0,2)$，$G(2,1,0)$，

所以$\overrightarrow{AG}=(0,1,0)$，$\overrightarrow{GE}=(-2,1,1)$，$\overrightarrow{GF}=(-1，-1,2)$.

设$\boldsymbol{n}=(x，y，z)$是平面EFG的法向量，

点A到平面EFG的距离为d，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{GE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{GF}=0,\end{cases}$　所以$\begin{cases}-2x+y+z=0,\\ -x-y+2z=0,\end{cases}$　所以$\begin{cases}x=z,\\ y=z,\end{cases}$

令$z=1$，此时$\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，

所以 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AG}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.　即点 A 到平面 EFG 的距离为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

课后作业

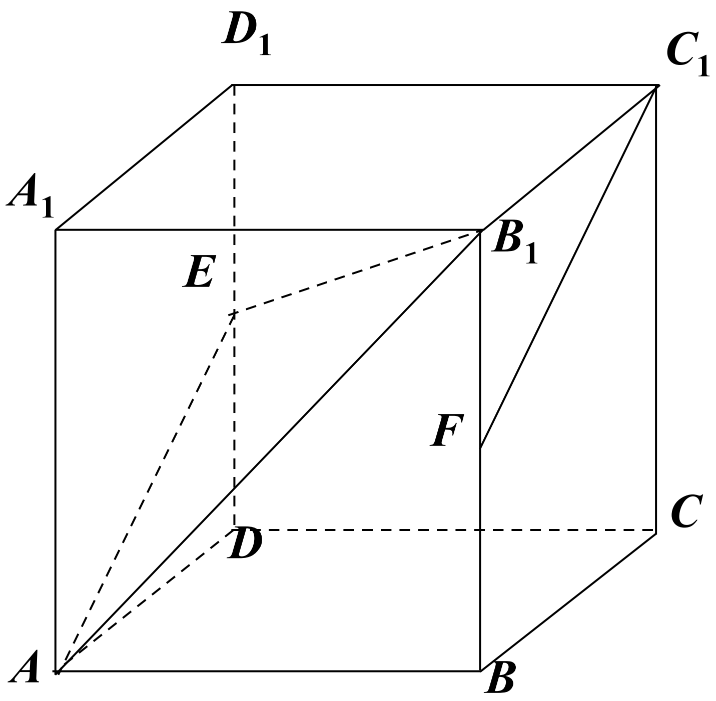
1.如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为线段 DD_1 的中点， F 为线段 BB_1 的中点.

（1） 求点 A_1 到直线 B_1E 的距离；

（2）求直线 FC_1 到直线 AE 的距离；

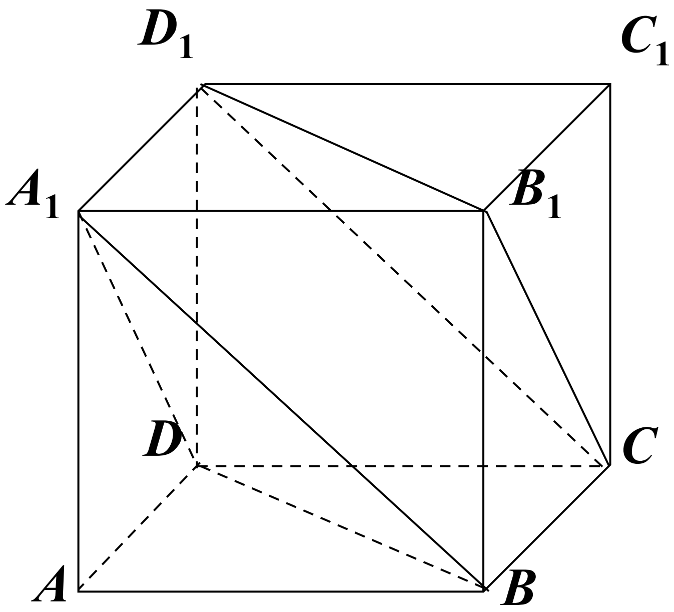
（3）求点 A_1 到平面 AB_1E 的距离；

（4）求直线 FC_1 到平面 AB_1E 的距离.



课后作业

2．如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，连接 A_1D，BD，CD_1，求平面 A_1DB 与平面 D_1CB_1 的距离．



对点训练

1.已知平面α的一个法向量$\boldsymbol{n}=(-2，-2,1)$，点$A(-1,3,0)$在α内，则平面外一点$P(-2,1,4)$到α的距离为

A.10　　B.3　　C.$\frac{8}{3}$　　D.$\frac{10}{3}$

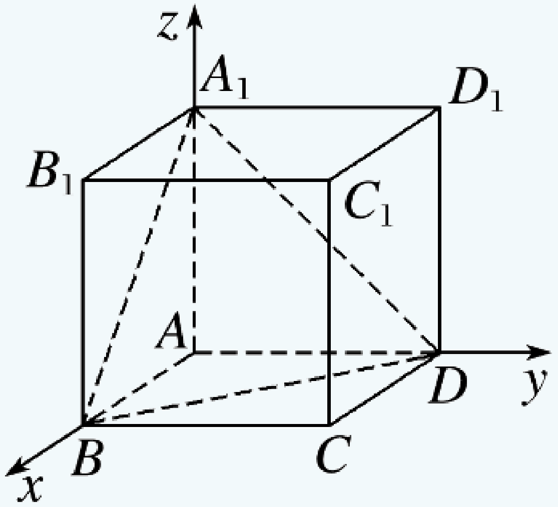
解析　$\overrightarrow{PA}=(1,2，-4)$，

则点 P 到 α 的距离 $d=\frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|-2-4-4|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{10}{3}$.

2.正方体$ABCD$－$A_1B_1C_1D_1$的棱长为a，则点C_1到平面A_1BD的距离是

A.$\frac{\sqrt{2}}{2}a$　　B.$\frac{\sqrt{3}}{3}a$　　C.$\sqrt{3}a$　　D.$\frac{2\sqrt{3}}{3}a$

解析　以A为原点，AB，AD，AA_1所在直线分别为x轴，y轴，z轴建立空间直角坐标系，如图.



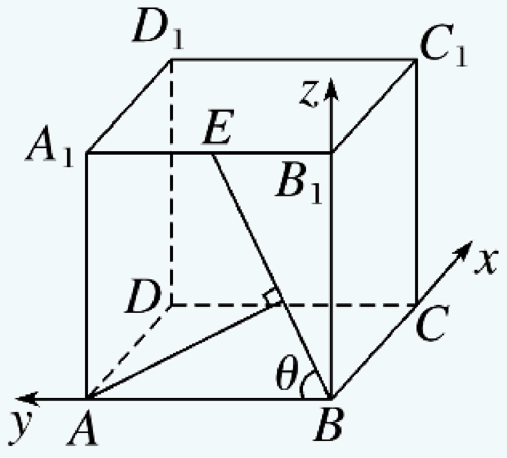
则$\overrightarrow{AC_1}=(a, a, a)$，$\overrightarrow{BC_1}=(0, a, a)$，

由于$AC_1\perp$平面A_1BD，所以点C_1到平面A_1BD的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{BC_1}|}{|\overrightarrow{AC_1}|}=\frac{2a^2}{\sqrt{3}a}=\frac{2\sqrt{3}}{3}a.$$

3.已知正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，点E是A_1B_1的中点，则点A到直线BE的距离是

A. $\dfrac{6\sqrt{5}}{5}$　　B. $\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$　　C. $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$　　D. $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$



解析　建立空间直角坐标系如图所示，

则$\overrightarrow{BA}=(0,2,0)$，$\overrightarrow{BE}=(0,1,2)$，

设$\angle ABE=\theta$，则 $\cos\theta=\dfrac{|\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BE}|}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BE}|}=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，

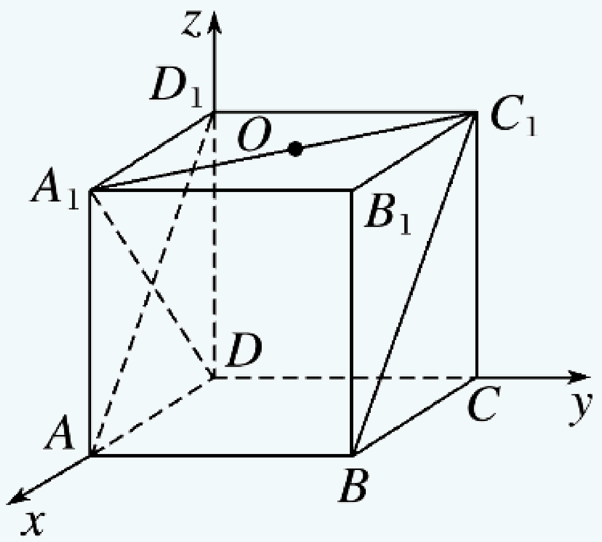
$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

故 A 到直线 BE 的距离 $d=|\overrightarrow{AB}|\sin\theta=2\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}$.

4.正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为1，O是A_1C_1的中点，则O到平面ABC_1D_1的距离为

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

解析　以$\{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DD_1}\}$为正交基底建立空间直角坐标系，



则 $A_1(1,0,1)$，$C_1(0,1,1)$，$\overrightarrow{C_1O}=\frac{1}{2}\overrightarrow{C_1A_1}=\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$，

平面 ABC_1D_1 的一个法向量为$\overrightarrow{DA_1}=(1,0,1)$，

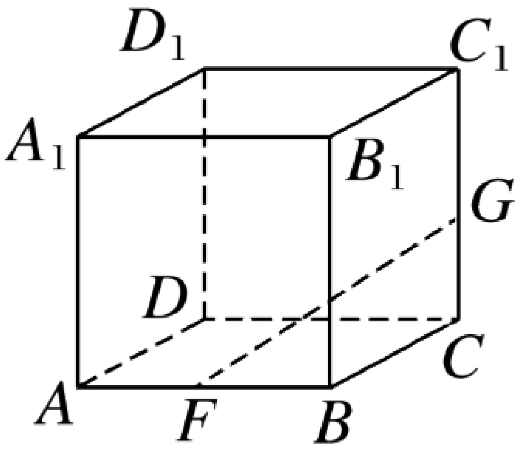
点O到平面ABC_1D_1的距离

$$d=\frac{|\overrightarrow{DA_1}\cdot\overrightarrow{C_1O}|}{|\overrightarrow{DA_1}|}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}.$$故选 B.

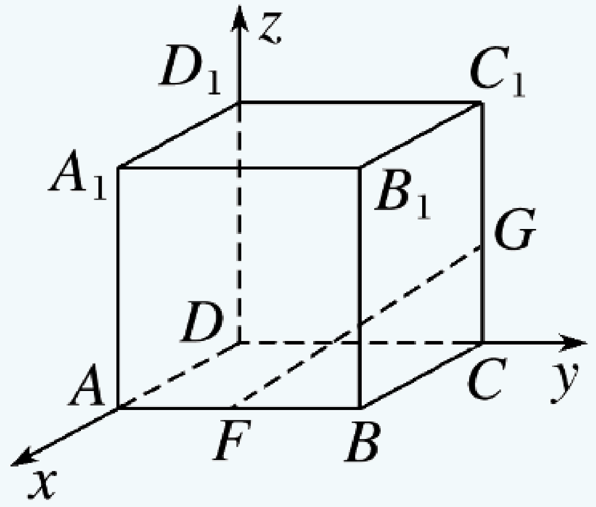
5.在空间直角坐标系$Oxyz$中，平面OAB的一个法向量为$\boldsymbol{n}=(2，-2,1)$.已知点$P(-1,3,2)$，则点P到平面OAB的距离$d=$__2__.

解析 $d=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{OP}|}{|\boldsymbol{n}|}=\dfrac{|-2-6+2|}{\sqrt{4+4+1}}=2.$

6.如图，在长方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$AA_1=AB=2$，$AD=1$，点F，G分别是AB，CC_1的中点，则点D_1到直线GF的距离为$\underline{\quad \frac{\sqrt{42}}{3} \quad}$.



解析　如图，以D为坐标原点，分别以DA，DC，DD_1所在的直线为坐标轴建立如图所示的空间直角坐标系，



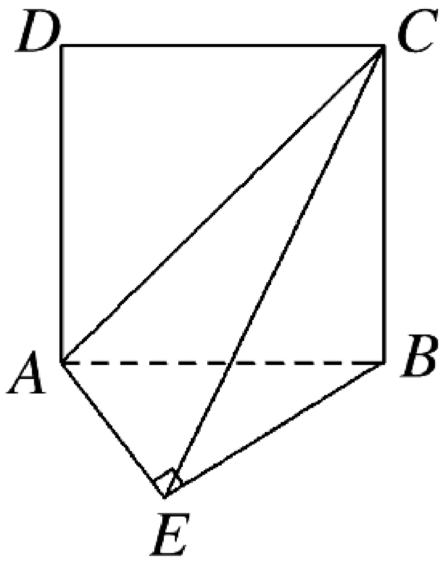
则$D_1(0,0,2)$，$F(1,1,0)$，$G(0,2,1)$，

于是有$\overrightarrow{GF}=(1，-1，-1)$，$\overrightarrow{GD_1}=(0，-2,1)$，

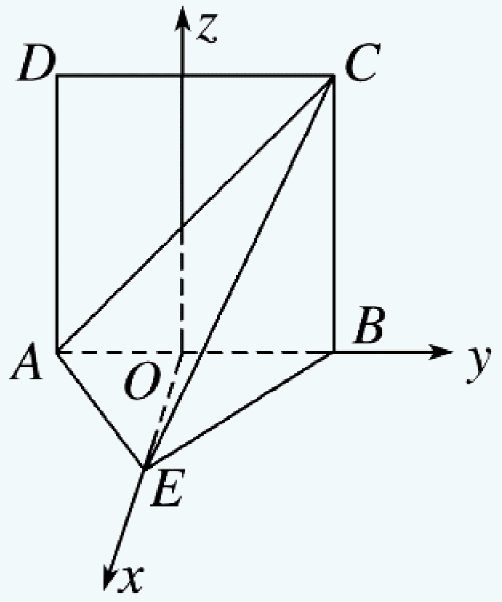
所以$\dfrac{|\overrightarrow{GF}\cdot\overrightarrow{GD_1}|}{|\overrightarrow{GF}|}=\dfrac{2-1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，$|\overrightarrow{GD_1}|=\sqrt{5}$，

所以点 D_1 到直线 GF 的距离为$\sqrt{5-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{42}}{3}$.

7.如图所示，在直二面角$D-AB-E$中，四边形$ABCD$是边长为2的正方形，$\triangle AEB$是等腰直角三角形，其中$\angle AEB=90°$，则点D到平面ACE的距离为$\underline{\quad \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \quad}$.



解析　以AB的中点O为坐标原点，分别以OE，OB所在的直线为x轴、y轴，建立如图所示的空间直角坐标系，



则$A(0，-1,0)$，$E(1,0,0)$，$D(0，-1,2)$，$C(0,1,2)$.

$\overrightarrow{AD}=(0,0,2)$，$\overrightarrow{AE}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{AC}=(0,2,2)$，

设平面ACE的法向量$\boldsymbol{n}=(x，y，z)$，

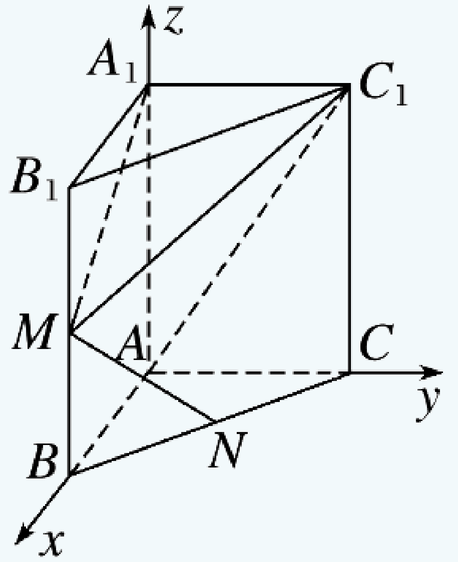
则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0.\end{cases}$　即$\begin{cases}x+y=0,\\ 2y+2z=0.\end{cases}$

令$y=1$，$\therefore \boldsymbol{n}=(-1,1，-1)$.

故点 D 到平面 ACE 的距离 $d=\dfrac{|\overrightarrow{AD}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\left|\dfrac{-2}{\sqrt{3}}\right|=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

8.在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AC=AA_1=2$，$\angle BAC=90°$，M为BB_1的中点，N为BC的中点.

(1)求点M到直线AC_1的距离；(2)求点N到平面MA_1C_1的距离.



解　建立如图所示的空间直角坐标系，

则$A(0,0,0)$，$A_1(0,0,2)$，$M(2,0,1)$，$C_1(0,2,2)$，

直线AC_1的一个单位方向向量为

$\boldsymbol{s}_0=\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\overrightarrow{AM}=(2,0,1)$，

故点M到直线AC_1的距离$d=\sqrt{|\overrightarrow{AM}|^2-|\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{s}_0|^2}=\sqrt{5-\frac{1}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.