

第四章运动稳定性和分叉

一、自治系统平衡点的稳定性

由于实际系统总有干扰或误差，稳定性的意义在于任何初始扰动导致随后的运动任意小，稳定性包括三种：稳定、渐近稳定和不稳定。稳定性的定义具有多个，Lyapunov意义的稳定性是最基本的一个，它包括线性系统的稳定性问题。线性系统稳定性属于全局稳定性，而非线性系统的稳定性是一个局部性概念。

考察如下自治系统

$$u = f(u), f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1)$$

式中 U 为定义域，是欧氏空间中的一个子集，平衡点满足 $f(u) = 0$ 。

可将平衡点或周期解的稳定性化为零解的稳定性问题。一般地，例如对于一般非自治系统 $u = f(t, u)$ ，其周期解为 $u(t)$ ，令 $u = x + u(t)$ ，可得 $x = f(t, u) - u(t) = f(t, x + u) - f(t, u)$ ，此时该方程的零解 $x = 0$ 对应于原系统的平衡点或周期解。

1. Lyapunov直接方法

(1) Lyapunov 函数
单值可微函数 $V(u) = V(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ，满足 $V(0) = 0$ ，其定义域为 $U = \{u \mid \|u\| < H\}$ ，

$H = \text{const} > 0$ (这里 $\|\cdot\|$ 表示连续系统的范数， $|\cdot|$ 表示离散系统的范数)。

[定义1] 若在 U 内恒有 $V(u) > 0$ ——正常号函数； $V(u) < 0$ ——负常号函数，统称为常号函数，否则称为变号函数。

[定义2] 当且仅当 $u = 0$ 时， $V(0) = 0$ ，称正常号函数为正定函数；负常号函数为负定函数，统称为定号函数。若 $V = 0 = u = 0$ 时，称正常号函数为半正定函数；称负常号函数为半负定函数，统称为半定号函数。

例 1. $V(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ ，正定函数

$V(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + u_2^2$ ，正常号函数，除 $(0,0,0)$ 外，还有 $(0,0,u_3)$ 使 $V = 0$

$V(u_1, u_2, u_3) = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2$ ，变号函数

例 2. $V(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2)^2 + (u_2 - u_3)^2 + (u_3 - u_1)^2$ ，当 $u_1 = u_2 = u_3$ 时， $V = 0$ ，所以 V 常正。

$V(u_1, u_2) = u_1^2 + \sin u_2$ ，正常号函数，除 $(0,0)$ 外，还有 $(0, n\pi)$ 使 $V = 0$

$V(u_1, u_2, u_3) = (u_1 - u_2)^2 + (u_1 - u_3)^2 + (u_1 + u_2)^2$, 除(0,0,0)外, $V > 0$, 所以 V 定正。 123 1 2 2

$V(u_1, u_2, u_3) = k_2(1 - \cos u_1) + \frac{1}{2}u_2^2$ u_3 可取任意值, 所以 V 常正。

(2) Lyapunov 定理

定理1 (稳定性定理): 若存在正定(负定) 函数 $V(u)$, 其沿解曲线全导数 $\dot{V}(u)$ 为半负定(半正定)或等于零, 则原点稳定。这里全导数为

$$\dot{V}(u) = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial u_1} \dot{u}_1 + \frac{\partial V}{\partial u_2} \dot{u}_2 + \dots + \frac{\partial V}{\partial u_n} \dot{u}_n \quad (2)$$

其中 $N(u) = (\dot{u}_1, \dot{u}_2, \dots, \dot{u}_n)$ 。

定理2 (渐近稳定性) 若存在正定 (负定) 函数 $V(u)$, 其沿解曲线全导数 $\dot{V}(u)$ 为负定(正定), 则原点渐近稳定。

定理3 (不稳定性) 若存在正定(负定)、半正定(半负定)或不定函数 $V(u)$, 其沿解曲线全导数 $\dot{V}(u)$ 正定(负定), 则原点不稳定。

证明: 以二维系统为例作几何直观证明。在三维空间 (u_1, u_2, V) 作正定曲面 Σ 与原点相切, 如图1所示。

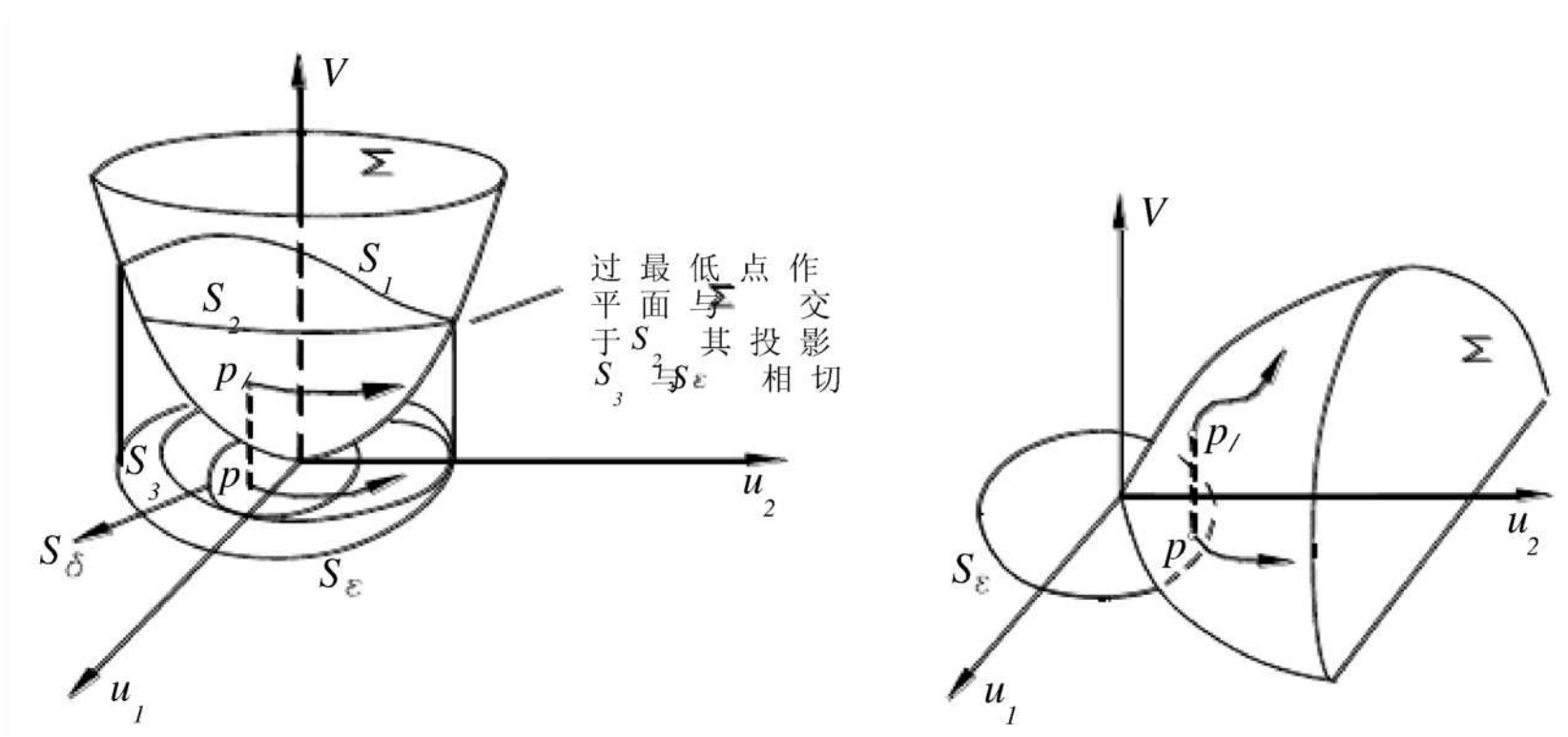


图 1. 定理 1 和 2 几何解释

图 2. 定理 3 几何解释

(a) 若 $V(u)$ 半负定或等于零, 则从 S_δ 内出发的任意相点 p 在 Σ 上对应点 p_1 的运动不可能上行而必局限于 S_2 曲线的下方, 导致从 S_δ 内出发的相轨线不能越出 S_δ , 根据Lyapunov稳定性的定义, 稳定。

(b) 若 $V(u)$ 负定, 则对应点 p_1 必沿曲面向行至最低点, 导致 p 趋于原点, 渐近稳定。

(c) 若 $v(u)$ 不定，而 $V(u)$ 正定，则 p 必沿曲面上行，以致 p 将达到 S 的边界，不稳定，如图2所示。

说明：

- (1) 不稳定性并不意味着系统轨迹随时间无限“膨胀”，例如 van der Pol 自激系统的零平衡点在 Lyapunov 意义下是不稳定的，但系统趋于定幅为2的运动，而不是趋于无限。在这个意义上，可以认为该系统的性能仍是好的。可见，“膨胀”只是不稳定性出现的一种形式，而不是唯一形式。
- (2) 不稳定性意味着：只要对于某一个 ϵ ，不论 δ 如何小，使得起始于初值的轨迹最终要离开 ϵ 球域，仅仅在这个定义上才是不稳定的。在如图3所示情况下，可以有另外的概念：即该平衡点虽不稳定但具有吸引性。

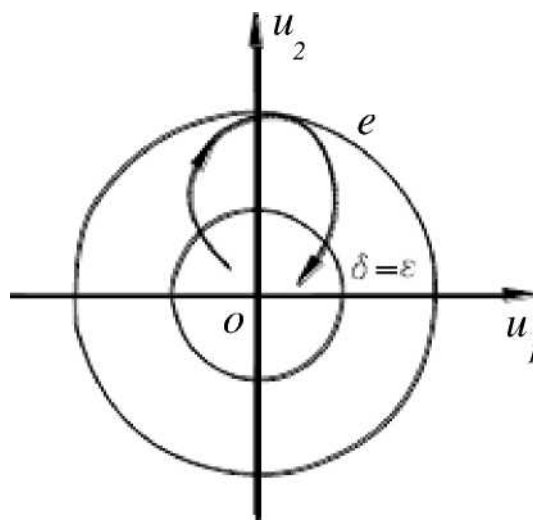


图3不稳定但具有吸引性的平衡点

例3考察刚度软化的Duffing系统

$$u + 2^{\circ} \textcircled{1} U + \textcircled{1}_2 (u - \epsilon U^3) = 0 \tag{a}$$

式中参数均为正，研究其平衡点的稳定性。

解：将方程(a)改写为

$$\dot{\mathbf{u}} = \begin{matrix} u \\ -\textcircled{1}^2 (u - \epsilon u^3) \end{matrix} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) \tag{b}$$

该系统具有三个平衡点 $(0, 0)$ 及 $(\pm 1/\epsilon, 0)$ ，以下分别讨论它们的稳定性。

a. 对于平衡点 $(0, 0)$ ，取系统总能量为 Lyapunov 函数

$$V = \frac{1}{2} u^2 - \frac{\epsilon}{2} u^4 + \frac{1}{2} u^2 \tag{c}$$

显然，在除去 $(0, 0)$ 的邻域中 $V(u_1, u_2) > 0$ ，而根据方程(b)

$$\dot{V} = \mathbf{V}'(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \left[\frac{1}{2} u - \frac{2\epsilon}{2} u^3 + u \right] u = -2^{\circ} \textcircled{1} u^2 < 0 \tag{d}$$

根据定理2，该系统的平衡点 $(0, 0)$ 渐近稳定。

b. 平衡点 $(\pm 1/\epsilon, 0)$ 是对称的，我们只需研究 $(1/\epsilon, 0)$ 。通过坐标平移

(e)

将方程 (b) 转化为

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -v_1 \\ \dot{v}_2 &= (1 - 2v_2 + 3v_3) v_2 - 2v_2^2 \end{aligned} = \mathbf{g}(\mathbf{v}) \quad (f)$$

仍以系统总能量构成Lyapunov函数

$$V(v_1, v_2) = \frac{1}{2} v_1^2 + \frac{1}{4} (v_2^2 + 3v_3 v_2 - 2v_2^2) + \frac{1}{2} v_2^2 \quad (g)$$

$V(v_1, v_2)$ 为不定函数。而在除去(0,0)的邻域中, 恒有

$$\begin{aligned} \dot{V} = \nabla V(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{g}(\mathbf{v}) &= -v_1(2v_2 + 3v_3) + v_2(1 - 2v_2 + 3v_3)v_2 - 2v_2^2 v_2 \\ &= [-v_1(2v_2 + 3v_3) + v_2] v_2 = -2v_2^2 v_2 < 0 \end{aligned} \quad (h)$$

根据定理3, 该系统的平衡点(±1/(8),0)皆不稳定。

(3) 吸引盆

稳定性是一个局部概念, 说明初始扰动充分小时, 受扰运动足够接近未扰运动。实际系统当这个扰动足够大时可能呈现不稳定, 例如

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_1 + u_2(u_1 + u_2 - 10^{-5}) \\ \dot{u}_2 &= -u_2 + u_1(u_1 + u_2 - 10^{-5}) \end{aligned} \quad (a)$$

选定正定函数 $V = u_1^2 + u_2^2$ 为Lyapunov函数, 其全导数为

$$\dot{V} = -2(u_1^2 + u_2^2)[u_1^2 + u_2^2 - 10^{-5}] \quad (b)$$

只有 $u_1^2 + u_2^2 < 10^{-5}$ 时, $V(u)$ 负定, 零解渐近稳定。但当 $u_1^2 + u_2^2 > 10^{-5}$ 时, $V(u)$ 正定, 零解不稳定。

吸引盆: 能使扰动运动逐渐地趋于未扰运动的初值范围称为吸引盆。

说明: 在实际问题中, 不仅需要判定稳定性问题, 还要给出渐近稳定运动的初始扰动范围, 即吸引盆的范围。尽可能找到大的Lyapunov函数以确定较大范围的稳定区域, 否则, 虽然Lyapunov函数存在, 但是若其稳定区域很小或空集, 同样是无意义的。

2. 根据派生系统判定稳定性

将方程(1)在 $\mathbf{u} = 0$ 附近作Taylor展开得

$$\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{Df}(0)\mathbf{u} + O(\|\mathbf{u}\|^2) = \mathbf{A}\mathbf{u} + O(\|\mathbf{u}\|^2) \quad (3)$$

其中矩阵

$$\mathbf{A} = \mathbf{Df}(0) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (4)$$

是向量函数 $f(u)$ 在 $u=0$ 处的 Jacobi 矩阵。因此，系统 (3) 对应的派生系统为

$$\dot{u} = Au \tag{5}$$

期望从派生系统 (5) 的稳定性来判断系统 (3) 的稳定性。为此，我们先回顾有关线性系统稳定性的研究结果，然后给出对非线性系统稳定性判断的二个充分条件。

(1) 线性系统的稳定性

定理4 记矩阵 A 的特征值为 $\lambda_r, r=1,2,\dots,n$ ，系统 (5) 的稳定性分为三种情况：

- a. 如果 $\text{Re}(\lambda_r) < 0, r=1,2,\dots,n$ ，则系统渐近稳定；反之亦然。
- b. 如果存在某一 λ_r 使得 $\text{Re}(\lambda_r) > 0$ ，则系统不稳定。
- c. 如果在 $\lambda_r, r=1,2,\dots,n$ 中有 m 重特征值（代数重数）满足 $\text{Re}(\lambda_r) = 0, r=1, \dots, m$ ，当对应的特征子空间维数（几何重数）为 m 时，系统稳定，但非渐近稳定；当特征子空间维数小于 m 时，系统不稳定。

特征值 λ 满足一元 n 次代数方程

$$\det(A - \lambda Z) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{6}$$

若系统维数 $n \leq 5$ ，则可用代数方法求解，否则只能用数值方法求 λ 。Routh 和 Hurwitz 提出了一种方法，可以根据方程 (6) 的系数判断特征值 λ 的实部是否为负，从而免去求解方程 (6)。它特别适用于含参数高维线性系统的渐近稳定性分析。

定理5 (Routh-Hurwitz判据) 方程 (6) 的所有根有负实部等价于下述所有行列式同号

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \tag{7}$$

构造上述行列式时，若 $r > n$ 则取 $a_r = 0$ 。

(2) 非线性系统的稳定性

定理6 若派生系统 (5) 渐近稳定，则系统 (3) 的原点亦如此。

证明：先取一待定的对称矩阵 $B \in R_{n \times n}$ ，构造二次型作为 Lyapunov 函数

$$V(u) = u^T B u \tag{8}$$

它沿派生系统 (5) 相轨线的全导数为

$$V(\mathbf{u}(t)) = \mathbf{u}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{u}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{u}^T (\mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A}^T) \mathbf{u} = \mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u} \quad (9)$$

显然

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \mathbf{B} + \mathbf{B} \mathbf{A}^T \quad (10)$$

是对称矩阵。由于派生系统渐近稳定，矩阵 \mathbf{A} 的特征值 $\lambda_r, r = 1, \dots, n$ 皆有负实部。根据附录，如果取负定矩阵 $\mathbf{C} = -\mathbf{I}$ ，可由方程(10)解出唯一的对称矩阵 \mathbf{B} 。

现证明这样的矩阵 \mathbf{B} 正定。若不然，则二次型(8)将是不定号函数、常负函数或常正函数中的一种。

对于前两种情况，总有某一 $\mathbf{u}_0 \neq 0$ 使 $V(\mathbf{u}_0) < 0$ ，进而对一切常数 $c > 0$ 有 $V(c\mathbf{u}_0) = c^2 V(\mathbf{u}_0) < 0$ ，这说明在除去原点的邻域内恒有 $V(\mathbf{u}) < 0$ 。根据定理3，这将出现系统(5)不稳定的矛盾。对于第三种情况，

必有某一 $\mathbf{u}_0 \neq 0$ 使 $V(\mathbf{u}_0) = 0$ 。但沿过该点的相轨线上仍有

$$V(\mathbf{u}(t)) = -\mathbf{u}^T \mathbf{C} \mathbf{u} = -\|\mathbf{u}\|^2 < 0 \quad (11)$$

这与 $V(\mathbf{u}_0) = 0$ 矛盾。

最后，我们用正定二次型(8)来证明系统(3)原点渐近稳定性。根据式(2)和(11)， $V(\mathbf{u})$ 沿系统(3)相轨线的全导数为

$$\dot{V}(\mathbf{u}(t)) = \nabla V(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{f}(\mathbf{u}) = -\|\mathbf{u}\|^2 + \nabla V(\mathbf{u}) \cdot O(\|\mathbf{u}\|^2) \quad (12)$$

由于 $\|\nabla V(\mathbf{u})\| = O(\|\mathbf{u}\|)$ ，只要 $\|\mathbf{u}\|$ 足够小，上式可保持负定。根据定理2，系统(3)的原点渐近稳定。证毕。

定理7若派生系统(5)的某一特征值有正实部，则系统(3)的原点不稳定。

上述两定理表明：只要派生系统的特征值实部不为零，就可免去构造Lyapunov函数，用Routh-Hurwitz判据确定派生系统的特征值实部的符号，从而推断非线性系统的渐近稳定性或不稳定性。这是工程中最常用的方法。

需要注意的是：这两个定理恰好对应于定理4中的前二种情况。对于第三种情况，非线性系统原点的稳定性将取决于系统的非线性项。

例4考察含立方非线性阻尼的系统

$$\dot{u} + c u^3 + u = 0 \quad (a)$$

分析其平衡点的稳定性。

解：将方程(a)改写为

$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ -u_1 - cu_1^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -cu_1^3 \end{pmatrix} \quad (b)$$

$$\lfloor 2 \rceil \quad 1 \quad 2 \rceil \quad -2 \rceil \quad 2 \rceil$$

该系统有唯一平衡点 $(0,0)$ ，对于派生系统，它是一中心。取系统总能量为Lyapunov函数

$$V(u_1, u_2) = \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}u_2^2 - cu_1^3 \quad (c) \quad (d)$$

显然，在除去 $(0,0)$ 的邻域中 $u_i \neq 0$ ，而

$$V = \frac{1}{2}u_1^2 + \frac{1}{2}u_2^2 - cu_1^3 = (u_1 + u_2)u_1 = -Cu_1^3 \quad (d)$$

存在如下三种可能性：

a. 系统原点稳定，但非渐近稳定；

b. 若 $c > 0$ ，系统原点渐近稳定；

c. 若 $c < 0$ ，系统原点不稳定。

这说明，非线性项将使派生系统的中心成为稳定或不稳定焦点。因此，派生系统的稳定性并非能保证原系统的稳定性。

例5 考察含立方非线性弹性力的保守系统

$$u + ku^3 = 0 \quad (a)$$

分析其平衡点的稳定性

解：将方程 (a) 改写为

$-\frac{u_1}{1}$	$-\frac{u_2}{2}$	0	1	3	0
$\frac{u_1}{1}$	$-\frac{ku_2^2}{2}$	0	0	u_2	$-ku_2^2$

(b)

该派生系统有2重特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ，但仅有1个特征向量 $(1, 0)^T$ 。根据定理4，派生系统不稳定，但 该保守系统的平衡点为3阶中心，是稳定的。

构造正定Lyapunov函数 $V = \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}ku^4 > 0$ ，全导数 $V' = 0$ ，原非线性系统稳定，但非渐近稳定。

二、非自治系统平衡点的稳定性

1. 稳定性概念的拓广

$$U = f(u, t), \quad f: U \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (13)$$

式中 $\mathbb{R}^+ = \{t \mid t_0 < t\}$ 为时间正半轴。记 u_s 为式 (13) 的孤立平衡点，满足 $f(u_s, t) = 0$ ，与时间有关。

[定义1] (孤立平衡点) 若在 \mathbb{R}^n 中存在一个邻域 N ，使得除 u_s 外， N 只包含 (13) 的不平衡点，则

称平衡点 u_s 是孤立的。

例如：保守系统的中心，单摆的平衡点均为孤立平衡点；而位于一条水平直线上的小球处于随遇平衡，这些平衡点是非孤立的。

[定义 2] $\forall \delta > 0, \exists S(s, t) > 0$, 使 $\|M(t) - u\| < \delta(s, t)$ 时, 运动满足

$$\|u(t) - u_j\| < \delta, \quad t > t_0 \quad (14)$$

则平衡点是稳定的, 否则为不稳定。在稳定的条件下, 有 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u$, 则平衡点是渐近稳定的。

说明:

- (1) 与自治系统的区别: δ 与 t_0 有关。若 δ 与 t_0 无关, 则称平衡点是一致稳定的或一致渐近稳定的。
- (2) 在自治和周期系统的情况下, 稳定性等价于一致稳定性; 渐近稳定性等价于一致渐近稳定性。

2. Lyapunov 直接方法

(1) 预备知识

考察单值可微函数: $V(u, t) = V(u_1, u_2, \dots, u_n, t)$, $V(0, t) = 0$, 其定义域为

$$Q = \{(u, t) \mid u < H, \quad t > t_0\}, \quad H = \cos nt, \quad t > 0 \quad (15)$$

[定义 1] 若 $V(u, t)$ 在定义域 Q 内恒有 $V(u, t) > 0$ 或 $V(u, t) < 0$, 则称 $V(u, t)$ 分别为正常号函数或负常号函数, 统称为常号函数。

[定义 2] 若存在正定函数 $W(u)$, 使得 $V(u, t) - W(u) > 0$, 则称 $V(u, t)$ 为正定函数; 若 $V(u, t) + W(u) < 0$,

则称 $V(u, t)$ 为负定函数, 统称为定号函数。

[定义 3] 若 $V(u, t)$ 在 Q 上有界, 且 $\forall \delta > 0, t > t_0, \exists \epsilon > 0$ 使得当 $\|u\| < \epsilon$ 时, 恒有 $\|V(u, t)\| < \delta$,

则称 $V(u, t)$ 具有无穷小上界。

说明:

- (1) 不显含时间的连续函数具有无穷小上界。
- (2) 当显含时间时, 有界函数不一定具有无穷小上界, 如函数 $W = \sin[(u_1 + u_2 + \dots + u_n)t] < 1$

例 1 判定 V 是何种符号函数

$$(1) \quad V(u, u, t) = \frac{1}{2} u_2^2 + (1 + \sin t) u_2; \quad (2) \quad V(u, u, t) = (1 + e^{-t}) u_2^2 + \frac{1}{2} u_2^2$$

解: (1) 当 $t > 1$ 时, $V > 0$, 常正函数。取 $W(u, u) = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{1}{2} u_2^2$, $V - W = \frac{1}{2} u_2 \sin t - \frac{1}{2} u_2^2$ 符号不定,

... V 常正, 非正定。(2) 取 $W(u, u) = \frac{1}{2} u_2^2 + \frac{1}{2} u_2^2 > 0$ 定正, $V - W = e^{-t} u_2^2 + \frac{1}{2} u_2^2$, 当 $t > 3$

时, $V - W > 0$, V 定正。

例2 判定 V 是否有无穷小上界

$$(1) V = (1 + \cos t)u_2 - \sin(u_1 t); \quad (2) V = tu_2 + u_2 \sin t; \quad (3) V = \frac{1}{1 + I_1} u_2 + (1 + e^{-t})u_2.$$

解: (1) 当 $t \rightarrow 0, u_2 \rightarrow 0$ 时, $\sin(u_1 t)$ 可以比较大, 没有无穷小上界。(2) V 无界, 没有无穷小上界。(3)

当 $t > 0$ 时, 若 $t \rightarrow 0, u_2 \rightarrow 0$ 则 $V \rightarrow 0$, 有无穷小上界。

(2) Lyapunov 定理

将平衡点平移到原点, 下面研究原点的稳定性问题

定理1 (稳定性定理) 若存在定号函数 $V(u, t)$, 沿解曲线全导数 $\dot{V} = \frac{d}{dt} V(u, t) = -f(u, t)$ 是与 $V(u, t)$ 异号的常号函数或恒为零, 则原点稳定。

定理2 (渐近稳定性定理) 若存在无穷小上界定号函数 $V(u, t)$, 沿解曲线全导数 $\dot{V}(u(t), t)$ 是与 $V(u, t)$ 异号的定号函数, 则原点渐近稳定。

定理3 (不稳定定理) 若存在连续可微、具有无穷小上界函数 $V(u, t)$, 在原点任意邻域内总有 u 使得 $V(u, t) > 0$ 或 $V(u, t) < 0$, 而沿解曲线全导数正定或负定, 则原点不稳定。

例3 考察参激系统 $\begin{cases} \dot{u}_1 = (1 + \sin 2t)u_1 + (1 - \sin t \cos t)u_2 \\ \dot{u}_2 = -(1 + \sin t \cos t)u_1 - (1 + \cos 2t)u_2 \end{cases}$ 平衡点的稳定性。

解: 取正定函数 $V(u_1, u_2) = u_1^2 + u_2^2$, $\dot{V} = 2(u_1 \dot{u}_1 + u_2 \dot{u}_2) = -2(u_2^2 + u_1^2) - 2(u_1 \sin t + u_2 \cos t)u_2 < 0$, 常负, 原点稳定。

判定 V 的定号性, 取 $W = u_1^2 + u_2^2$, $\dot{V} + W = -2(u_1 \sin t + u_2 \cos t)^2 < 0$, 二 V 为负定函数, 原点渐近稳定。

例4 考察系统 $\begin{cases} \dot{u}_1 = -e^{-2t}u_1 - (4 + 2 \sin t)u_2 \\ \dot{u}_2 = (1 + e^{-2t})u_1 - 4u_2 \end{cases}$ 平衡点的稳定性。

解: $V = (1 + e^{-2t})u_2 + (4 + 2 \sin t)u_1$, $W = u_1^2 + 4u_2^2$ 正定, $V - W = e^{-2t}u_2 + 2u_1 \sin t$, 当 $t > 0$ 时 $V > 0$,

V 定正。全导数为 $\dot{V} = -2[e^{-2t}(2 + e^{2t})u_2 + (1 - \cos t)u_1]$, 当 $t > 0$ 时 $\dot{V} < 0$, \therefore 原点稳定。

例5 考察 Mathieu 方程 $\ddot{u} + u + (2 + \sin t)u = 0$ 原点的稳定性。

解：状态方程为 $\dot{u} = -\frac{1}{2 + \sin t} u$ ，取正定函数 $V = \frac{1}{2} u^2$ ，全导数为

$$V' = -\frac{1}{2 + \sin t} u^2 < 0, \forall t > 0, u \neq 0$$

一致稳定的。

例6 Lyapunov理论的一个重要用途是获得稳定性的条件，考察系统 $\dot{u} + p(t)u + e^{-t}u = 0$ 。将之表示为状

态方程的形式 $\dot{u} = -e^{-t}u - p(t)u$ ，目的是选取参数 $p(t)$ 使得原点稳定。为此，取正定函数

$V = \frac{1}{2} u^2 e^{2t}$ ，全导数为 $V' = e^{-t} u^2 [1 - 2p(t)]$ 。因此，只要 $p(t) > 2$ ， $V' < 0$ ， V 总是非正的，平衡点是稳定的。

说明：对于非自治系统，一般无法根据派生系统的稳定性来推断原系统的稳定性，如 $\dot{u} = \frac{t}{1+t} - u^3$ ，其派生系统的解为 $u(t) = u(t_0) e^{-t}$ ，当 $t > t_0 > -1$ 时，原点不稳定，但是原系统的原点是渐近稳定的。

习题：考察系统 $\dot{u} = -(1 + e^{-t})u - (4 + \sin t)u$ 平衡点的稳定性。

三、平衡点附近相轨线的结构

(1) 线性系统 [定义1] 设 $u = Au$ 的矩阵特征值重数 (代数重数) 与特征向量所张成的子空间维数 (几何重数) 相同 (半简情况), 定义

a. 对应 $\text{Re}(\lambda) < 0, E_s = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ 稳定子空间;

b. 对应 $\text{Re}(\lambda) = 0, E_c = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ 中心子空间;

c. 对应 $\text{Re}(\lambda) > 0, E_u = \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ 不稳定子空间。

其中 $n_s + n_c + n_u = n$ 。从线性代数知 R^n 应为以上三个子空间的直和: $R^n = E_s \oplus E_c \oplus E_u$ 。

直和: 设 Z_1, Z_2, \dots, Z_r 为线性空间 V 的子空间, 若 $Z = Z_1 + \dots + Z_r$, 且 Z 中每一元素只能唯一地表示为

$x = \alpha + \beta (\alpha \in L_1, \beta \in L_2)$, 则称 L 是 L_1 与 L_2 的直和, 记为 $L = L_1 \oplus L_2$ 。

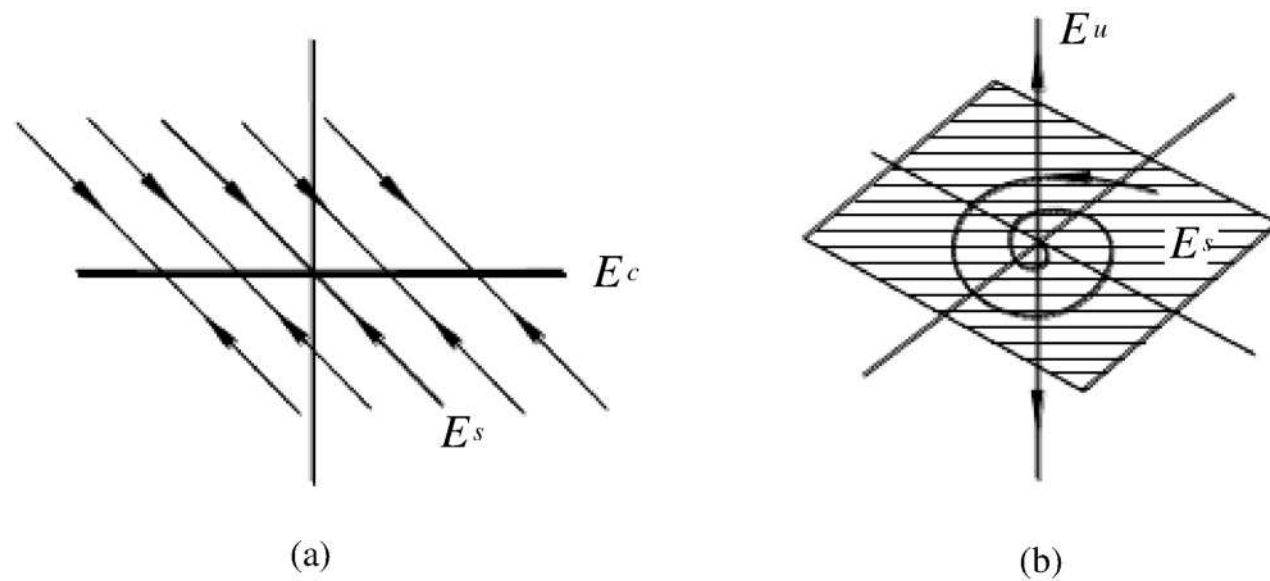


图4 不变子空间

$$(a) A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, (E_s = \text{span}(1,4), E_c = \text{span}(1,0), E_u = \emptyset)$$

$$-1 \quad -1 \quad 0$$

$$(b) A = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & 0 \\ & 0 & 0 \end{bmatrix}, (E_s = \text{span}\{(1,0,0), (1,1,0)\}, E_c = 0, E_u = \text{span}(0,0,1))$$

$$0 \quad 0 \quad 2$$

说明: (1) 子空间 E_s, E_c, E_u 对系统是不变子空间, 含义: 任取初始点 $u(0) \in E_r, r = s, c, u$, 当 $t \rightarrow \infty$

后相轨线恒有 $u(t) \in E_r$; (2) 流: 由定义域所有点到值域的所有解曲线的总称。

证明：对于半简情况，化为Jordan型 $A = TJT^{-1}$, $\Phi_t = Te^{tJ}T^{-1} =$

当 $t \rightarrow s$ 时 $e^{tAu} \rightarrow 0$ ；若 $u \in E_u$, 当 $t \rightarrow s$ 时 e^{tAu} 对任意 t , e^{tAu_0} 保持不变。

(2) 非线性系统

非线性系统一般不存在上述三个不变子空间，但具有类似不变性质的集合。将平衡点平移至原点，记以原点为中心的一个邻域为 $\delta(0) > 0$ ，从其中出发的相轨线为 $V(u)$ ，引入三个集合：

- a. $W^s = \{u \in \delta(0) \mid \forall t > t_0, \varphi_t(u) \in \delta(0) \text{ 且 } \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(u) = 0\}$ —— 局部稳定流形；
- b. $W^c = \{u \in \delta(0) \mid \forall t > t_0, \varphi_t(u) \in \delta(0) \text{ 且 } \lim_{h \rightarrow \infty} \varphi_{h+t}(u) = 0\}$ —— 局部中心流形；
- c. $W^u = \{u \in \delta(0) \mid \forall t \geq t_0, \varphi_t(u) \in \delta(0) \text{ 且 } \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(u) = 0\}$ —— 局部不稳定流形。

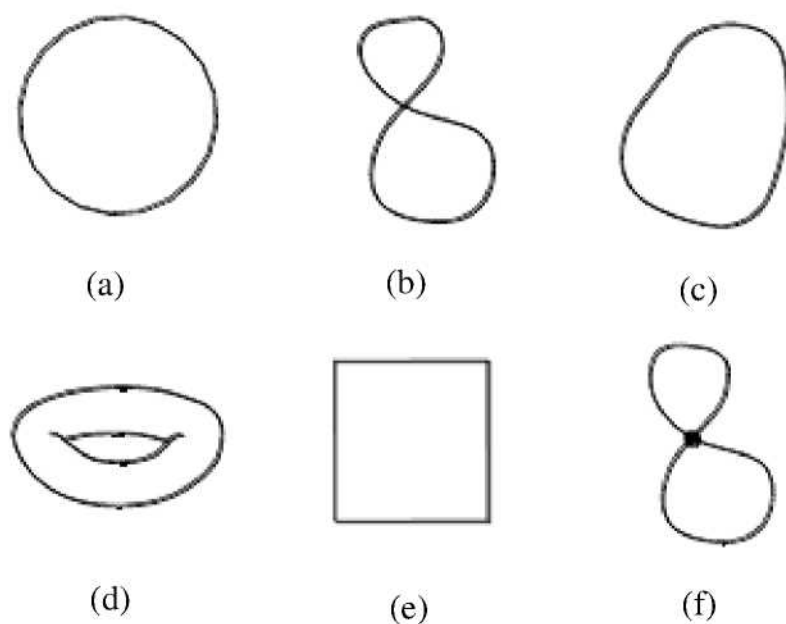


图 5 (a)~(b) 是流形；(e) 和 (f) 不是流形

说明：(1) 流形：降维光滑映射，有严格的数学定义，这里可简单理解为相空间中的曲线或曲面，如图 5 所示；(2) 线性常微分方程系统，其流形为 u_0 的邻域： $W^s \cup E^s$, $W^u \cup E^u$ ；(3) W^s , W^u 和对向量场而言是不变的，即若起始点在流形上则整条相轨迹也在此流形上，统称为不变流形；(4) W^s , W^u

是唯一的，而 W^c 并不唯一，即 $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} g(u_0)$ 方向不定，并可能失去光滑性。

定理 1 (中心流形定理) 设向量函数 $f(u) \in C_r$, $r > 1$ (r 阶导数存在且连续)，则存在

a, 在 $S(0)$ 内并且在原点与 E_s 和 E_u 分别相切、唯一 C^r 阶光滑的流形 W^s ； b, 在 $S(0)$ 内并且在原点与 E_c 相切、但不唯一的 C^r -阶光滑的 W_c 。

几何解释: 在 W_s 上相轨线收缩；在 W_u 上相轨线扩张； 在 W_c 上系统的局部可能扩张，也可能收缩或更复杂，这取决于系统的非线性，如图6所示。

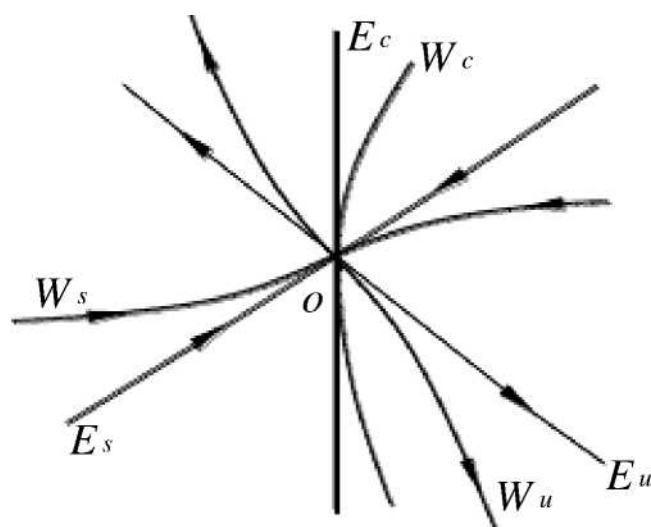


图6平衡点的子空间和流形

双曲平衡点: 与 W_c 对应的中心子空间为零维(矩阵 A 每个特征值都有非零实部)，否则为**非双曲平衡点**。

若平衡点为双曲的，则非线性系统和线性系统是局部拓扑等价的(局部具有相同的轨线结构)。

例1考察系统
$$\begin{cases} \dot{U} = -U \\ \dot{U}_2 = U_2 \end{cases}$$
 在平衡点 $(0,0)$ 附近的相流结构。

解: 线性化系统为
$$\begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$
, 其中 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 矩阵 A 特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$, 相应

特征向量为 $e_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。特征子空间: $E_s = span(1,0)$ u_2 轴; $E_u = span(0,1)$ u_1 轴。

因此线性化系统的平衡点 $(0,0)$ 为双曲鞍点，线性系统的稳定和不稳定流形与稳定子空间和不稳定子空间重合，如图7(a)所示。

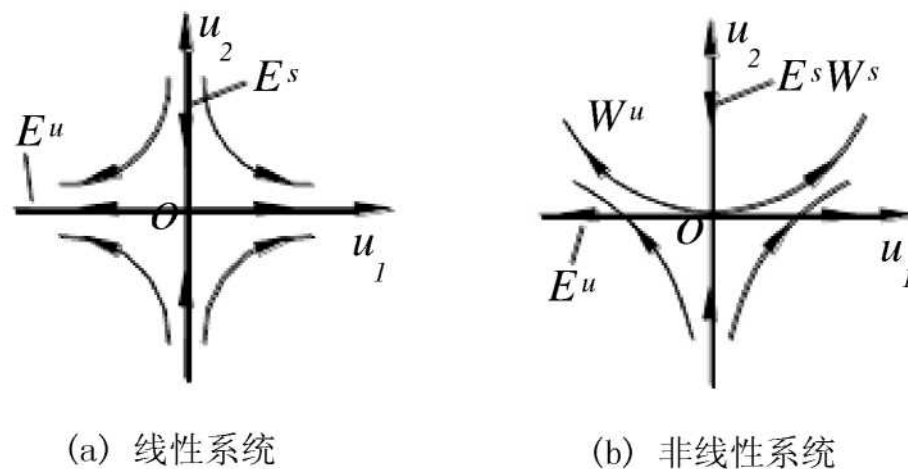


图7

原非线性系统可以化为 $\frac{du_1}{dt} = u_1 - u_1^2$, 过 $(0,0)$ 的特解为 $u_1 = \frac{1}{1 + e^{-t}}$ (a)

稳定流形: $W^s = \{(u_1, u_2) | u_2 = 0\}$; 不稳定流形: $W^u = \{(u_1, u_2) | u_1 = \frac{1}{1 + e^{-t}}\}$ (b)

稳定流形上的相轨迹: $(u_1, u_2) = (0, u_2 e^{-t})$; 不稳定流形上的相轨迹: $(u_1, u_2) = (\frac{1}{1 + e^{-t}}, u_2 e^{-t})$

对于非线性系统, 子空间和流形如图7(b)所示。

例2 考察系统 $\begin{cases} \dot{u}_1 = -u_1 \\ \dot{u}_2 = u_2^2 \end{cases}$ 在平衡点 $(0,0)$ 附近的相流结构。

解: 线性化系统为 $\begin{bmatrix} \dot{u}_1 \\ \dot{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, 矩阵 A 特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1$, 相应特征向量为

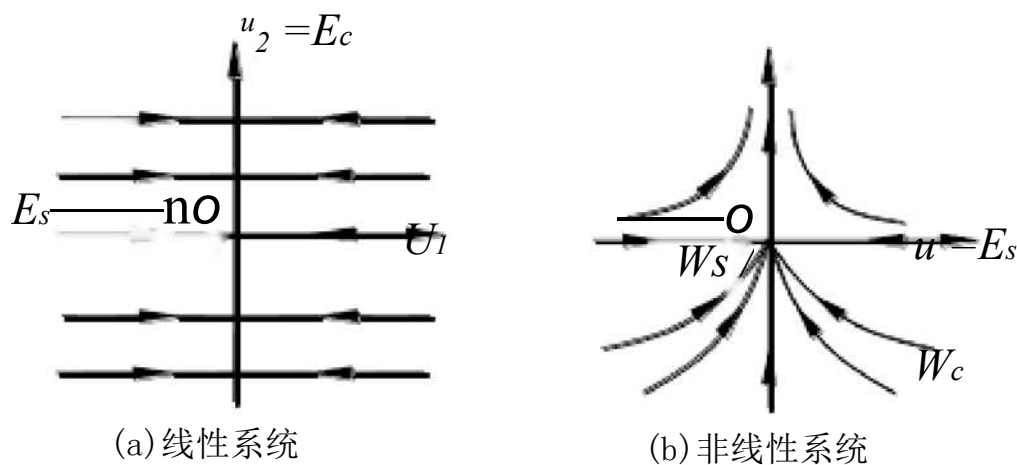
中 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 中 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。特征子空间: $E_s = \text{span}(1,0) = u_1$ 轴, $E_c = \text{span}(0,1) = u_2$ 轴。线性化系统

精确解为

$$(u_1, u_2) = (u_1 e^{-t}, \text{const.}) \quad (a)$$

因线性化系统的平衡点为 $(0, \text{const.})$, 其流形如图8(a)所示, 分别是

$$W^s = \{(u_1, u_2) | u_1, u_2 \text{ 满足 (a)}\}; \quad W^c = \{(0, u_2)\} \quad (b)$$



原非线性系统第二个方程精确解为 $u_2 = \frac{1}{K - u_2^2}$, 联立第一个方程精确解(a), 从中消去 t 得到

$$u_2 = \frac{1}{K - u_2^2} \quad (c)$$

由方程(c)可知, 当 u_2 从负方向趋于零时 $u_1 \rightarrow 0$; 当 u_2 从正方向趋于零时 $u_1 \rightarrow \infty$ 。因此, 相迹在原点的导数不连续, 说明 W^c 不唯一, 如图8(b)所示。为了使相迹在原点的导数连续, 可取中心流形为

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：
<https://d.book118.com/237002133020006065>