

# 青海省青海师范大学第二附属中学 2024 年高三第三次测评数学试卷

## 注意事项

1. 考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前，请务必将自己的姓名、准考证号用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 请认真核对监考员在答题卡上所粘贴的条形码上的姓名、准考证号与本人是否相符。
4. 作答选择题，必须用 2B 铅笔将答题卡上对应选项的方框涂满、涂黑；如需改动，请用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。作答非选择题，必须用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
5. 如需作图，须用 2B 铅笔绘、写清楚，线条、符号等须加黑、加粗。

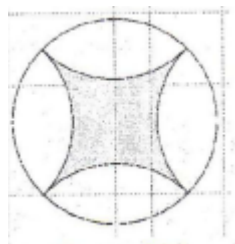
一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知  $S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，若  $S_{2018} < S_{2020} < S_{2019}$ ，设  $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$ ，则数列  $\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$  的前  $n$  项和  $T_n$  取最

大值时  $n$  的值为( )

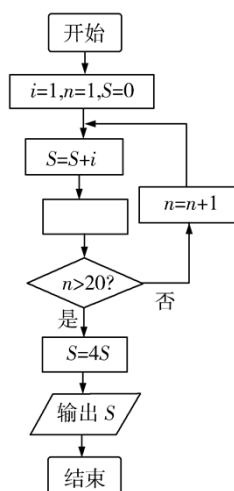
- A. 2020                      B. 2019                      C. 2018                      D. 2017

2. 下图中的图案是我国古代建筑中的一种装饰图案，形若铜钱，寓意富贵吉祥。在圆内随机取一点，则该点取自阴影区域内（阴影部分由四条四分之一圆弧围成）的概率是（ ）



- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{4}{\pi} - 1$                       D.  $2 - \frac{4}{\pi}$

3. 已知  $\frac{\pi}{4} \approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$ ，如图是求  $\pi$  的近似值的一个程序框图，则图中空白框中应填入



- A.  $i = -\frac{1}{2n-1}$

- B.  $i = -\frac{1}{i+2}$

C.  $i = \frac{(-1)^n}{2n+1}$

D.  $i = \frac{(-1)^n}{i+2}$

4. 命题“ $\forall x \in (0,1), e^{-x} > \ln x$ ”的否定是 ( )

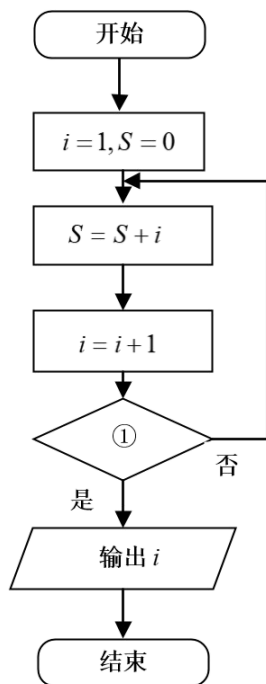
A.  $\forall x \in (0,1), e^{-x} \leq \ln x$

B.  $\exists x_0 \in (0,1), e^{-x_0} > \ln x_0$

C.  $\exists x_0 \in (0,1), e^{-x_0} < \ln x_0$

D.  $\exists x_0 \in (0,1), e^{-x_0} \leq \ln x_0$

5. 执行如图所示的程序框图，若输出的值为 8，则框图中①处可以填 ( )。



A.  $S \geq 7?$

B.  $S \geq 21?$

C.  $S \geq 28?$

D.  $S \geq 36?$

6. 已知复数  $\frac{2-ai}{i} = 1-bi$ ，其中  $a, b \in R$ ， $i$  是虚数单位，则  $|a+bi| =$  ( )

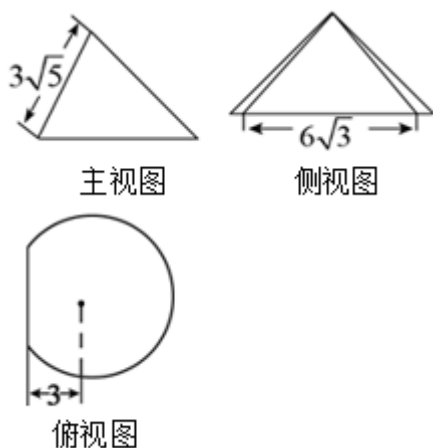
A.  $-1+2i$

B. 1

C. 5

D.  $\sqrt{5}$

7. 木匠师傅对一个圆锥形木件进行加工后得到一个三视图如图所示的新木件，则该木件的体积 ( )



A.  $24\pi+9\sqrt{3}$       B.  $48\pi+9\sqrt{3}$       C.  $48\pi+18\sqrt{3}$       D.  $144\pi+18\sqrt{3}$

8. 已知函数  $f(x) = \frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a$  在区间  $(1, +\infty)$  上恰有四个不同的零点, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

A.  $(e, 3) \cup (3, +\infty)$       B.  $[0, e)$       C.  $(e^2, +\infty)$       D.  $(-\infty, e) \cup \{3\}$

9. 从抛物线  $y^2 = 4x$  上一点  $P$  ( $P$  点在  $x$  轴上方) 引抛物线准线的垂线, 垂足为  $M$ , 且  $|PM| = 5$ , 设抛物线的焦点为  $F$ , 则直线  $MF$  的斜率为 ( )

A.  $-2$       B.  $2$       C.  $-\frac{4}{3}$       D.  $\frac{4}{3}$

10. 已知函数  $f(x) = \frac{e \ln x}{x^2}$ , 若关于  $x$  的方程  $[f(x)]^2 - mf(x) + \frac{1}{8} = 0$  有 4 个不同的实数根, 则实数  $m$  的取值范围为 ( )

A.  $(0, \frac{3}{4})$       B.  $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$       C.  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$       D.  $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$

11. 设曲线  $y = a(x-1) - \ln x$  在点  $(1, 0)$  处的切线方程为  $y = 3x - 3$ , 则  $a =$  ( )

A. 1      B. 2      C. 3      D. 4

12. 设  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $i$  是虚数单位, 则“复数  $z = a + bi$  为纯虚数”是“ $ab = 0$ ”的 ( )

A. 充要条件      B. 必要不充分条件  
C. 既不充分也不必要条件      D. 充分不必要条件

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知  $(1+2x)^{11} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{10}x^{10} + a_{11}x^{11}$ , 则  $a_1 - 2a_2 + \dots - 10a_{10} + 11a_{11} =$  \_\_\_\_\_.

14. 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 已知  $2S_n - a_n + 1 = n(a_n + 1)$ , 且  $a_2 = 5$ . 若  $m > \frac{S_n}{2^n}$ , 则实数  $m$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

15. 记等差数列  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和分别为  $S_n$  和  $T_n$ , 若  $\frac{S_n}{T_n} = \frac{3n+5}{n+7}$ , 则  $\frac{a_7}{b_7} =$  \_\_\_\_\_.

16. 函数  $f(x) = (a-1)^x - 3$  ( $a > 1, a \neq 2$ ) 过定点 \_\_\_\_\_.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

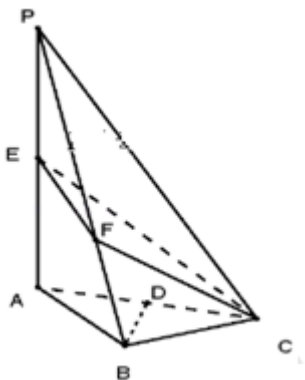
17. (12 分) 设  $a \in \mathbb{R}$ , 函数  $f(x) = x^2 e^{1-x} - a(x-1)$ .

(1) 当  $a=1$  时, 求  $f(x)$  在  $(\frac{3}{4}, 2)$  内的极值;

(2) 设函数  $g(x) = f(x) + a(x-1-e^{1-x})$ , 当  $g(x)$  有两个极值点  $x_1, x_2$  ( $x_1 < x_2$ ) 时, 总有  $x_2 g(x_1) \leq \lambda f'(x_1)$ , 求实数

$\lambda$  的值.

18. (12 分) 已知三棱锥  $P-ABC$  中,  $\triangle ABC$  为等腰直角三角形,  $AB=AC=1$ ,  $PB=PC=\sqrt{5}$ , 设点  $E$  为  $PA$  中点, 点  $D$  为  $AC$  中点, 点  $F$  为  $PB$  上一点, 且  $PF=2FB$ .



(1) 证明:  $BD \parallel$  平面  $CEF$ ;

(2) 若  $PA \perp AC$ , 求直线  $CE$  与平面  $PBC$  所成角的正弦值.

19. (12 分) 已知函数  $f(x) = |x-1| - 2|x+3|$ .

(1) 求不等式  $f(x) < 1$  的解集;

(2) 若存在实数  $x$ , 使得不等式  $m^2 - 3m - f(x) < 0$  成立, 求实数  $m$  的取值范围.

20. (12 分) 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - (a+1)x + \ln x, a \in \mathbb{R}$ .

(1) 当  $a=0$  时, 求曲线  $f(x)$  在点  $(2, f(2))$  的切线方程;

(2) 讨论函数  $f(x)$  的单调性.

21. (12 分) 已知函数  $f(x) = e^{ax} \sin x$ .

(1) 若  $f(x)$  在  $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$  上单调递增, 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 若  $a=1$ , 对  $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ , 恒有  $f(x) \geq bx$  成立, 求实数  $b$  的最小值.

22. (10 分) 椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > b > 0$ ) 的离心率为  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ , 它的四个顶点构成的四边形面积为  $2\sqrt{2}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 设  $P$  是直线  $x = a^2$  上任意一点, 过点  $P$  作圆  $x^2 + y^2 = a^2$  的两条切线, 切点分别为  $M, N$ , 求证: 直线  $MN$

恒过一个定点.

## 参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

根据题意计算  $a_{2019} > 0$ ， $a_{2020} < 0$ ， $a_{2019} + a_{2020} > 0$ ，计算  $\frac{1}{b_{2018}} < 0$ ， $\frac{1}{b_{2019}} > 0$ ， $\frac{1}{b_{2018}} + \frac{1}{b_{2019}} > 0$ ，得到答案.

【详解】

$S_n$  是等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和，若  $S_{2018} < S_{2020} < S_{2019}$ ，

故  $a_{2019} > 0$ ， $a_{2020} < 0$ ， $a_{2019} + a_{2020} > 0$ ， $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$ ，故  $\frac{1}{b_n} = \frac{1}{a_n a_{n+1} a_{n+2}}$ ，

当  $n \leq 2017$  时， $\frac{1}{b_n} > 0$ ， $\frac{1}{b_{2018}} = \frac{1}{a_{2018} a_{2019} a_{2020}} < 0$ ， $\frac{1}{b_{2019}} = \frac{1}{a_{2019} a_{2020} a_{2021}} > 0$ ，

$\frac{1}{b_{2018}} + \frac{1}{b_{2019}} = \frac{1}{a_{2018} a_{2019} a_{2020}} + \frac{1}{a_{2019} a_{2020} a_{2021}} = \frac{a_{2019} + a_{2020}}{a_{2018} a_{2019} a_{2020} a_{2021}} > 0$ ，

当  $n \geq 2020$  时， $\frac{1}{b_n} < 0$ ，故前 2019 项和最大.

故选：B.

【点睛】

本题考查了数列和的最值问题，意在考查学生对于数列公式方法的综合应用.

2、C

【解析】

令圆的半径为 1，则  $P = \frac{S'}{S} = \frac{\pi - 2(\pi - 2)}{\pi} = \frac{4}{\pi} - 1$ ，故选 C.

3、C

**【解析】**

由于  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$  中正项与负项交替出现, 根据  $S = S + i$  可排除选项 A、B; 执行第一次循环:  $S = 0 + 1 = 1$ , ①若图中空白框中填入  $i = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ , 则  $i = -\frac{1}{3}$ , ②若图中空白框中填入  $i = \frac{(-1)^n}{i+2}$ , 则  $i = -\frac{1}{3}$ , 此时  $n > 20$  不成立,  $n = 2$ ; 执行第二次循环: 由①②均可得  $S = 1 - \frac{1}{3}$ , ③若图中空白框中填入  $i = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ , 则  $i = \frac{1}{5}$ , ④若图中空白框中填入  $i = \frac{(-1)^n}{i+2}$ , 则  $i = \frac{3}{5}$ , 此时  $n > 20$  不成立,  $n = 3$ ; 执行第三次循环: 由③可得  $S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ , 符合题意, 由④可得  $S = 1 - \frac{1}{3} + \frac{3}{5}$ , 不符合题意, 所以图中空白框中应填入  $i = \frac{(-1)^n}{2n+1}$ , 故选 C.

4、D

**【解析】**

根据全称命题的否定是特称命题, 对命题进行改写即可.

**【详解】**

全称命题的否定是特称命题, 所以命题“ $\forall x \in (0, 1), e^{-x} > \ln x$ ”的否定是:  $\exists x_0 \in (0, 1), e^{-x_0} \leq \ln x_0$ .

故选 D.

**【点睛】**

本题考查全称命题的否定, 难度容易.

5、C

**【解析】**

根据程序框图写出几次循环的结果, 直到输出结果是 8 时.

**【详解】**

第一次循环:  $S = 0, i = 1$

第二次循环:  $S = 1, i = 2$

第三次循环:  $S = 3, i = 3$

第四次循环:  $S = 6, i = 4$

第五次循环:  $S = 10, i = 5$

第六次循环:  $S = 15, i = 6$

第七次循环:  $S = 21, i = 7$

第八次循环:  $S = 28, i = 8$

所以框图中①处填  $S \geq 28?$  时，满足输出的值为 8.

故选：C



【点睛】

此题考查算法程序框图，根据循环条件依次写出每次循环结果即可解决，属于简单题目。

6、D

【解析】

试题分析：由  $\frac{2-ai}{i} = 1-bi$ ，得  $2-ai = i(1-bi) = b+i$ ， $\therefore a = -1, b = 2$ ，则

$$a+bi = -1+2i, \therefore |a+bi| = |-1+2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \text{ 故选 D.}$$

考点：1、复数的运算；2、复数的模。

7、C

【解析】

由三视图知几何体是一个从圆锥中截出来的锥体，圆锥底面半径为  $r = \sqrt{3^2 + (\frac{6\sqrt{3}}{2})^2}$ ，圆锥的高  $h = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 3^2}$ ，截去

的底面劣弧的圆心角为  $\frac{2\pi}{3}$ ，底面剩余部分的面积为  $S = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \pi r^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{3}$ ，利用锥体的体积公式即可求得。

【详解】

由已知中的三视图知圆锥底面半径为  $r = \sqrt{3^2 + (\frac{6\sqrt{3}}{2})^2} = 6$ ，圆锥的高  $h = \sqrt{(3\sqrt{5})^2 - 3^2} = 6$ ，圆锥母线

$l = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ ，截去的底面弧的圆心角为  $120^\circ$ ，底面剩余部分的面积为

$$S = \frac{2}{3} \pi r^2 + \frac{1}{2} r^2 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3} \pi \times 6^2 + \frac{1}{2} \times 6^2 \times \sin \frac{2\pi}{3} = 24\pi + 9\sqrt{3}, \text{ 故几何体的体积为:}$$

$$V = \frac{1}{3} Sh = \frac{1}{3} \times (24\pi + 9\sqrt{3}) \times 6 = 48\pi + 18\sqrt{3}.$$

故选 C.

【点睛】

本题考查了三视图还原几何体及体积求解问题，考查了学生空间想象，数学运算能力，难度一般。

8、A

【解析】

函数  $f(x) = \frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a$  的零点就是方程  $\frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a = 0$  的解，设  $g(x) = \frac{x}{\ln x}$ ，方程可化为

$(g(x)-3)(g(x)-a) = 0$ ，即  $g(x) = 3$  或  $g(x) = a$ ，求出  $g(x)$  的导数  $g'(x)$ ，利用导数得出函数的单调性和最值，由

此可根据方程解的个数得出  $a$  的范围。

【详解】

由题意得  $\frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a = 0$  有四个大于1的不等实根，记  $g(x) = \frac{x}{\ln x}$ ，则上述方程转化为

$$(g(x) - 3) + a \left( \frac{3}{g(x)} - 1 \right) = 0,$$

即  $(g(x) - 3)(g(x) - a) = 0$ ，所以  $g(x) = 3$  或  $g(x) = a$ 。

因为  $g'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$ ，当  $x \in (1, e)$  时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$  单调递减；当  $x \in (e, +\infty)$  时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$  单调递增；

所以  $g(x)$  在  $x = e$  处取得最小值，最小值为  $g(e) = e$ 。因为  $3 > e$ ，所以  $g(x) = 3$  有两个符合条件的实数解，故

$f(x) = \frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a$  在区间  $(1, +\infty)$  上恰有四个不相等的零点，需  $a > e$  且  $a \neq 3$ 。

故选：A。

【点睛】

本题考查复合函数的零点。考查转化与化归思想，函数零点转化为方程的解，方程的解再转化为研究函数的性质，本题考查了学生分析问题解决问题的能力。

9、A

【解析】

根据抛物线的性质求出点  $P$  坐标和焦点  $F$  坐标，进而求出点  $M$  的坐标，代入斜率公式即可求解。

【详解】

设点  $P$  的坐标为  $(x_0, y_0)$ ， $y_0 > 0$ ，

由题意知，焦点  $F(1, 0)$ ，准线方程  $l: x = -1$ ，

所以  $|PM| = x_0 + 1 = 5$ ，解得  $x_0 = 4$ ，

把点  $P(4, y_0)$  代入抛物线方程可得，

$y_0 = \pm 4$ ，因为  $y_0 > 0$ ，所以  $y_0 = 4$ ，

所以点  $M$  坐标为  $(-1, 4)$ ，

代入斜率公式可得， $k_{MF} = \frac{4 - 0}{-1 - 1} = -2$ 。

故选：A

【点睛】

本题考查抛物线的性质，考查运算求解能力；属于基础题。

10、C

【解析】

求导，先求出  $f(x)$  在  $x \in (0, \sqrt{e})$  单增，在  $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$  单减，且  $f(x)_{\max} = f(\sqrt{e}) = \frac{1}{2}$  知设  $f(x) = t$ ，则方程

$[f(x)]^2 - mf(x) + \frac{1}{8} = 0$  有 4 个不同的实数根等价于方程

$t^2 - mt + \frac{1}{8} = 0$  在  $(0, \frac{1}{2})$  上有两个不同的实数根，再利用一元二次方程根的分布条件列不等式组求解可得.

【详解】

依题意，
$$f'(x) = \frac{\frac{e}{x} \cdot x^2 - 2xe \ln x}{x^4} = \frac{e(1 - 2 \ln x)}{x^3},$$

令  $f'(x) = 0$ ，解得  $\ln x = \frac{1}{2}$ ， $x = \sqrt{e}$ ，故当  $x \in (0, \sqrt{e})$  时， $f'(x) > 0$ ，

当  $x \in (\sqrt{e}, +\infty)$ ， $f'(x) < 0$ ，且  $f(\sqrt{e}) = \frac{e \ln \sqrt{e}}{e} = \frac{1}{2}$ ，

故方程  $t^2 - mt + \frac{1}{8} = 0$  在  $(0, \frac{1}{2})$  上有两个不同的实数根，

$$\text{故} \begin{cases} \Delta > 0 \\ (t_1 - \frac{1}{2})(t_2 - \frac{1}{2}) > 0 \\ 0 < t_1 + t_2 < 1 \\ t_1 t_2 > 0 \end{cases}, \begin{cases} m^2 - \frac{1}{2} > 0 \\ \frac{1}{8} - \frac{m}{2} + \frac{1}{4} > 0 \\ 0 < m < 1 \end{cases}$$

解得  $m \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4})$ .

故选：C.

【点睛】

本题考查确定函数零点或方程根个数.其方法：

(1)构造法：构造函数  $g(x)$  ( $g'(x)$  易求， $g'(x)=0$  可解)，转化为确定  $g(x)$  的零点个数问题求解，利用导数研究该函数的单调性、极值，并确定定义区间端点值的符号(或变化趋势)等，画出  $g(x)$  的图象草图，数形结合求解；

(2)定理法：先用零点存在性定理判断函数在某区间上有零点，然后利用导数研究函数的单调性、极值(最值)及区间端点值符号，进而判断函数在该区间上零点的个数.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/237043026052006116>