广东省广州第六中学2024-2025学年高二上学期期中考试数学试题

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

一、单选题

1．已知全集$U=R$，集合$A=\{x\mid y=\lg x\}$，集合$B=\{y\mid y=\sqrt{x}+1\}$，那么$A\cap C_U B=$

A．ϕ　B．$(0,1]$　C．$(0,1)$　D．$(1,+\infty)$

2．已知i为虚数单位，若$\dfrac{m+2i}{1-i}$是纯虚数，则实数m的值为（　）

A．$\dfrac{1}{2}$　B．$-\dfrac{1}{2}$　C．2　D．-2

3．“$1<m<3$”是“方程$\dfrac{x^2}{m-1}+\dfrac{y^2}{3-m}=1$表示椭圆”的（　　）

A．必要不充分条件　B．充分不必要条件

C．充要条件　D．既不充分也不必要条件

4.若直线l：$ax+by=1$（$a>0$，$b>0$）平分圆$x^2+y^2-x-2y=0$，则$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$的最小值为(　　　　)

A．$2\sqrt{2}$　B．2　C．$\dfrac{1}{2}\left(3+2\sqrt{2}\right)$　D．$3+2\sqrt{2}$

5．已知$\tan\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{3}$，则$\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)-2\sin(\pi-\alpha)\cos(\pi+\alpha)=$（　）

A．$\dfrac{7}{5}$　B．$\dfrac{1}{5}$　C．$-\dfrac{1}{5}$　D．$\dfrac{31}{25}$

6．已知函数$f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$，且满足$f\left(m^2\right)+f(m-2)>0$，则实数$m$的取值范围是（　）

A．$(1,+\infty)$　B．$(-\infty,-2)$　C．$(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$　D．$(-2,1)$

7．在三棱锥$P-ABC$中，$\vee ABC$是边长为2的等边三角形，$PA=PB=2$，$PC=\sqrt{6}$，则该三棱锥外接球的表面积为（　）

A．$\dfrac{16}{3}\pi$　B．$\dfrac{20}{3}\pi$　C．8π　D．$\dfrac{28}{3}\pi$

8．$f(x)$是定义在R上周期为4的函数，且$f(x)=\begin{cases}2\sqrt{1-x^2},x\in(-1,1]\\1-|x-2|,x\in(1,3]\end{cases}$，则下列说法中不正确的是（　）

A．$f(x)$的值域为[0,2]

B．当$x\in(3,5]$时，$f(x)=2\sqrt{-x^2+8x-15}$

C．$f(x)$图象的对称轴为直线$x=4k,k\in\mathbf{Z}$

D．方程$3f(x)=x$恰有 5 个实数解

二、多选题

9．下列命题是真命题的有（　　）

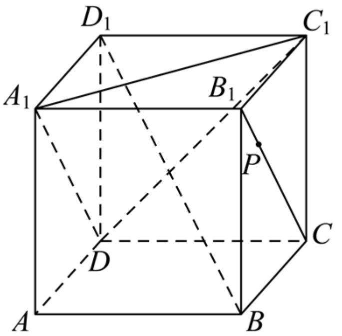
A．直线l的方向向量为$\vec{a}=(1,-1,2)$，直线m的方向向量为$\vec{b}=\left(2,1,-\frac{1}{2}\right)$，则$l$与$m$垂直

B．直线l的方向向量为$\vec{a}=(0,1,-1)$，平面α的法向量为$\vec{n}=(1,-1,-1)$，则$l\perp\alpha$

C．平面α，β的法向量分别为$\vec{n_1}=(0,1,3)$，$\vec{n_2}=(1,0,2)$，则$\alpha//\beta$

D．平面α经过三点$A(1,0,-1)$，$B(0,1,0)$，$C(-1,2,0)$，向量$\vec{n}=(1,u,t)$是平面α的法向量，则$u+t=1$

10．如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P在线段B_1C上运动，则下列结论正确的是（　　）



A．直线$BD_1\perp$平面A_1C_1D

B．三棱锥$P-A_1C_1D$的体积为定值

C．异面直线AP与A_1D所成角的取值范围是$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

D．直线C_1P与平面A_1C_1D所成角的正弦值的最大值为$\frac{\sqrt{6}}{3}$

11．中国结是一种手工编制工艺品，它有着复杂奇妙的曲线，却可以还原（成单纯的二维线条，其中的数字“8”对应着数学曲线中的双纽线.在xOy平面上，把与定点$M(-a,0)$，$N(a,0)$距离之积等于$a^2(a>0)$的动点的轨迹称为双纽线.若P

是该双组线上的一个动点，则下列结论正确的是（   ）

A．点 P 的横坐标的取值范围是 $\left[-a,a\right]$

B．OP^2 的最大值是 $2a^2$

C．$\triangle PMN$ 面积的最大值为 $\frac{1}{2}a^2$

D．$\left|PM\right|+\left|PN\right|$ 的取值范围是 $\left[2a,2\sqrt{2}a\right]$

三、填空题

12．第 33 届夏季奥林匹克运动会女子 10 米跳台跳水决赛中，全红禅以 425.60 分的高分拿下冠军.下面统计某社团一位运动员 10 次跳台跳水的训练成绩：68，80，74，63，66，84，78，66，70，76，则这组数据的 60%分位数为________.

13．已知点 $M\left(3,0\right)$ 关于直线 $x-y-1=0$ 的对称点为 P，经过点 P 作直线 l，若直线 l 与连接 $A\left(9,1\right)$，$B\left(5,8\right)$ 两点的线段总有公共点，则直线 l 的斜率 k 的取值范围为_______.

14．古希腊数学家阿波罗尼斯的著作《圆锥曲线论》中有这样一个结论: 平面内与两点距离的比为常数 $\lambda\left(\lambda\neq1\right)$ 的点的轨迹是圆，后人称这个圆为阿波罗尼斯圆.已知点 $A\left(-7,0\right)$，B 为直线 $l:4x+3y+11=0$ 上的动点，P 为圆 $C:(x-2)^2+y^2=9$ 上的动点，则 $\left|PA\right|+3\left|PB\right|$ 的最小值为________.

四、解答题

15．设三角形 ABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c 且 $\sin\left(B+C\right)=2\sqrt{3}\sin^2\frac{A}{2}$.

(1)求角 A 的大小；

(2)若 $b=3$，BC 边上的高为 $\frac{3\sqrt{21}}{7}$，求三角形 ABC 的周长.

16．已知圆 M：$x^2+\left(y-4\right)^2=4$，点 P 是直线 l：$x-2y=0$ 上的一动点，过点 P 作圆 M 的切线 PA、PB，切点为 A、B.

(1)当切线 PA 的长度为 $2\sqrt{3}$ 时，求点 P 的坐标；

(2)求线段 AB 长度的最小值.

17．“中式八球”是受群众欢迎的台球运动项目之一.在一场“中式八球”邀请赛中，甲、乙、丙、丁4人角逐最后的冠军，本次邀请赛采取“双败淘汰制”.具体赛制如下：

首先，4人通过抽签两两对阵，胜者进入“胜区”，败者进入“败区”；

接下来，“胜区”的2人对阵，胜者进入最后的决赛，“败区”的2人对阵，败者直接淘汰出局，获得第四名；

紧接着，“败区”的胜者和“胜区”的败者对阵，胜者晋级最后的决赛，败者获得第三名；最后，剩下的2人进行最后的冠亚军决赛，胜者获得冠军，败者获得第二名.

现假定甲对阵乙、丙、丁获胜的概率均为$p\left(0<p<1\right)$，且不同对阵的结果相互独立.

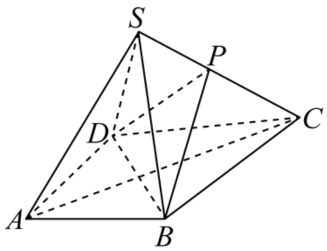
(1)经抽签，第一轮由甲对阵乙，丙对阵丁.若$p=0.6$.

（I）求甲连胜三场获得冠军的概率；

（Ⅱ）求甲在“双败淘汰制”下获得冠军的概率；

(2)除“双败淘汰制”外，“中式八球”也经常采用传统的“单败淘汰制”；抽签决定两两对阵，胜者晋级，败者淘汰，直至决出最后的冠军.问当p满足什么条件时，“双败淘汰制”比“单败淘汰制”更利于甲在此次邀请赛中夺冠?

18．如图，在四棱锥$S-ABCD$中，底面$ABCD$是由等边三角形ABD和等腰三角形CBD构成，其中$SC=CD=CB=\sqrt{13},SA=AB=2,\angle SAD=\angle SAB,P$为棱$SC$上一点，$SA//$平面$PDB$.



(1)求$\dfrac{CP}{PS}$的值；

(2)求平面PDB与平面PDC夹角的余弦值.

19．已知函数$f(x)=\log_2\dfrac{x}{4}\cdot\log_2\dfrac{x}{2}(1\le x\le 4)$，$g\left(x\right)=4^x+4^{-x}-a\cdot 2^x-a\cdot 2^{-x}+1$.

(1)求函数$f\left(x\right)$的最大值；

(2)设不等式$f\left(x\right)\le 0$的解集为A，若对任意$x_1\in A$，存在$x_2\in\left[0,1\right]$，使得$x_1=g\left(x_2\right)$，求实数a的值.

参考答案：

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	A	C	A	C	B	C	AD	ABD
题号	11									
答案	BCD									

1．C

【分析】先化简集合 A 和 B,再求$C_U B$和$A\cap C_U B$.

【详解】由题得 A={x|x>0},B={y|y≥1}，所以$C_U B=\{y\mid y<1\}$,$\therefore A\cap C_U B=(0,1)$.

故答案为 C

【点睛】(1)本题主要考查集合的化简和运算，意在考查学生对这些知识的掌握水平和分析推理能力.(2) 集合的运算要注意灵活运用维恩图和数轴，一般情况下，有限集的运算用维恩图分析，无限集的运算用数轴，这实际上是数形结合的思想的具体运用.

2．C

【解析】先化简复数$\frac{m+2i}{1-i}$，再根据复数是纯虚数即可列式求解.

【详解】Q $\frac{m+2i}{1-i}=\frac{(m+2i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{m-2}{2}+\frac{m+2}{2}i$,

又$\frac{m+2i}{1-i}$是纯虚数，$\therefore\begin{cases}\frac{m-2}{2}=0\\\frac{m+2}{2}\neq 0\end{cases}$，解得$m=2$.

故选：C.

3．A

【分析】由方程$\frac{x^2}{m-1}+\frac{y^2}{3-m}=1$表示椭圆求出参数$m$的取值范围，利用集合的包含关系判断可得出结论.

【详解】若方程$\frac{x^2}{m-1}+\frac{y^2}{3-m}=1$表示椭圆，则$\begin{cases}m-1>0\\3-m>0\\m-1\neq 3-m\end{cases}$，解得$1<m<3$且$m\neq 2$，

因此，“$1<m<3$”是“方程$\frac{x^2}{m-1}+\frac{y^2}{3-m}=1$表示椭圆”的必要不充分条件.

故选：A

4．C

【分析】求得圆心，代入直线l的方程，然后利用基本不等式求得$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$的最小值.

【详解】圆的圆心为$\left(\frac{1}{2},1\right)$，由于直线$l$平分圆，故圆心在直线$l$上，即$\frac{1}{2}a+b=1$，所以

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{2}a+b\right)=\frac{3}{2}+\frac{a}{2b}+\frac{b}{a}\geq\frac{3}{2}+2\sqrt{\frac{a}{2b}\cdot\frac{b}{a}}=\frac{3}{2}+\sqrt{2}$，当且仅当

$\frac{a}{2b}=\frac{b}{a},a=2\sqrt{2}-2,b=2-\sqrt{2}$时等号成立.

故选：C

【点睛】本小题主要考查直线和圆的位置关系，考查利用基本不等式求最小值.

5．A

【分析】利用两角差的正切公式求出$\tan\alpha$的值，然后利用诱导公式、二倍角公式结合弦化切的思想可求出所求代数式的值.

【详解】$\because \tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\frac{\tan\alpha-1}{1+\tan\alpha}=-\frac{1}{3}$，解得$\tan\alpha=\frac{1}{2}$.

因此，$\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-2\sin\left(\pi-\alpha\right)\cos\left(\pi+\alpha\right)=\cos2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$

$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$

$=\frac{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{1-\tan^2\alpha+2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{7}{5}$.

故选：A.

【点睛】本题考查两角差的正切公式、诱导公式、二倍角公式求值，解题的关键就是利用弦化切思想进行化简，同时也要注意弦化切所适用的基本类型，考查运算求解能力，属于中等题.

6．C

【分析】先用定义法证明$f\left(x\right)$为奇函数，化简$f(x)$解析式可知$f(x)$为增函数，然后结合函数的奇偶性与单调性解不等式即可.

【详解】因为$f\left(-x\right)=\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{1-e^x}{e^x+1}=-f\left(x\right)$，所以$f\left(x\right)$为奇函数，

又因为$f\left(x\right)=\frac{e^x+1-2}{e^x+1}=1-\frac{2}{e^x+1}$，

所以 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数.

因为 $f(m^2)+f(m-2)>0$，$f(x)$ 为奇函数，

所以 $f(m^2)>-f(m-2)=f(2-m)$，

又 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，所以 $m^2>2-m$，

即 $m^2+m-2>0$，解得 $m<-2$ 或 $m>1$，

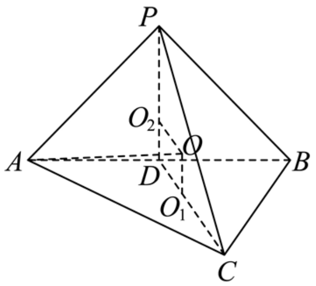
所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

故选：C.

7．B

【分析】利用给定条件找到外接球球心，利用勾股定理得到半径，再求解面积即可.

【详解】



如图，取 AB 的中点 D，连接 PD,CD，

则 $PD=CD=\sqrt{3}$，又 $PC=\sqrt{6}$，所以 $PD^2+CD^2=PC^2$，

故 $PD\perp CD$，因为 $\triangle ABC$ 是边长为 2 的等边三角形，

所以 $CD\perp AB$，因为 $PD\cap AB=D$，$PD,AB\subset$ 平面 PAB，

所以 $CD\perp$ 平面 PAB，因为 $CD\subset$ 平面 ABC，

所以平面 $PAB\perp$ 平面 ABC，

设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle PAB$ 的外心分别为 O_1,O_2，

则 O_1,O_2 分别在线段 CD,PD 上，

且 $O_1D=O_2D=\frac{1}{3}CD=\frac{\sqrt{3}}{3}$，设外接球的球心为 O，

连接 OO_1,OO_2,OD,OA，

在正方形 OO_1DO_2 中，由勾股定理得 $OD=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

由勾股定理得 $R^2=OA^2=AD^2+OD^2=1+\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2=\frac{5}{3}$，

故 $S=4\pi R^2=\frac{20}{3}\pi$，故 B 正确.

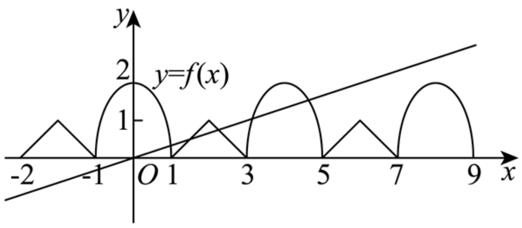
故选：B

8．C

【分析】画出 $f(x)$ 的部分图象结合图形分析每一个选项即可.

【详解】根据周期性，画出 $f(x)$ 的部分图象如上图所示，由图可知，选项 A，D 正确，C 不正确；

根据周期为 4，当 $x\in(3,5]$ 时，$f(x)=f(x-4)=2\sqrt{1-(x-4)^2}=2\sqrt{-x^2+8x-15}$，故 B 正确.



故选：C.

【点睛】方法点睛：图象法判断函数零点个数，作出函数 f(x)的图象，观察与 x 轴公共点个数或者将函数变形为易于作图的两个函数，作出这两个函数的图象，观察它们的公共点个数.

9．AD

【分析】根据直线的方向向量、平面法向量的性质，结合空间向量数量积的运算性质逐一判断即可.

【详解】A：$\because \vec{a}=(1,-1,2)$，$\vec{b}=\left(2,1,-\frac{1}{2}\right)$，

$\therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2-1\times1+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=0$，则 $\vec{a}\perp\vec{b}$，

$\therefore$直线 l 与 m 垂直，故 A 正确；

B：$\vec{a}=(0,1,-1)$，$\vec{n}=(1,-1,-1)$，则 $\vec{a}\cdot\vec{n}=0\times1+1\times(-1)+(-1)\times(-1)=0$，

则 $\vec{a}\perp\vec{n}$，$\therefore l//\alpha$ 或 $l\subset\alpha$，故 B 错误；

C：$\because \vec{n_1}=(0,1,3)$，$\vec{n_2}=(1,0,2)$，$\therefore \vec{n_1}$ 与 $\vec{n_2}$ 不共线，

$\therefore \alpha//\beta$ 不成立，故 C 错误；

D：$\because$点 $A(1,0,-1)$，$B(0,1,0)$，$C(-1,2,0)$，

$\therefore \overrightarrow{AB}=(-1,1,1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,1,0)$.

$\because$向量$\vec{n}=(1,u,t)$是平面α的法向量，$\therefore\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\end{cases}$，

即$\begin{cases}-1+u+t=0\\ -1+u=0\end{cases}$，解得$u+t=1$，故 D 正确.

故选：AD

10．ABD

【分析】在选项 A 中，利用线面垂直的判定定理，结合正方体的性质进行判断即可；

在选项 B 中，根据线面平行的判定定理、平行线的性质，结合三棱锥的体积公式进行求解判断即可；

在选项 C 中，根据异面直线所成角的定义进行求解判断即可；

在选项 D 中，以D为原点，DA为x轴，DC为y轴，DD_1为z轴，建立空间直角坐标系，利用向量法进行求解即可.

【详解】在选项 A 中，$\because A_1C_1\perp B_1D_1$，$A_1C_1\perp BB_1$，$B_1D_1\cap BB_1=B_1$，

且$B_1D_1,BB_1\subset$平面BB_1D_1，

$\therefore A_1C_1\perp$平面BB_1D_1，$BD_1\subset$平面BB_1D_1，

$\therefore A_1C_1\perp BD_1$，

同理，$DC_1\perp BD_1$，

$\because A_1C_1\cap DC_1=C_1$，且$A_1C_1,DC_1\subset$平面$A_1C_1D$，

$\therefore$直线$BD_1\perp$平面A_1C_1D，故 A 正确；

在选项 B 中，

$\because A_1D//B_1C$，$A_1D\subset$平面A_1C_1D，$B_1C\not\subset$平面A_1C_1D，

$\therefore B_1C//$平面A_1C_1D，

$\because$点P在线段B_1C上运动，

$\therefore P$到平面A_1C_1D的距离为定值，又$\triangle A_1C_1D$的面积是定值，

$\therefore$三棱锥$P-A_1C_1D$的体积为定值，故 B 正确；

在选项 C 中，