

第十五章 分式压轴训练

01 压轴总结

目录

压轴题型一 求使分式为正(负)数时未知数的取值范围	1
压轴题型二 求使分式值为整数时未知数的整数值	4
压轴题型三 与分式有关的规律性问题	9
压轴题型四 与分式方程有关的规律性问题	18
压轴题型五 与分式及分式运算有关的新定义型问题	24

02 压轴题型

压轴题型一 求使分式为正(负)数时未知数的取值范围

例题：(23-24 八年级下·广东揭阳·阶段练习) 已知分式 $\frac{x+4}{x^2}$ 的值是非负数，那么 x 的取值范围是 ()

- A. $x > -4$ 且 $x \neq 0$ B. $x \geq -4$ C. $x \neq 0$ D. $x \geq -4$ 且 $x \neq 0$

巩固训练

1. (23-24 八年级上·湖南长沙·阶段练习) 若分式 $\frac{2x+1}{x^2}$ 的值为正，则 x 的取值范围是 ()

- A. $x > 0$ B. $x > -\frac{1}{2}$ C. $x \neq -\frac{1}{2}$ D. $x > -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 0$

2. (23-24 八年级上·山东菏泽·期中) 若分式 $\frac{x-3}{x^2}$ 的值为负数，则 x 的取值范围是_____.

3. (23-24 八年级上·全国·课后作业) 若分式 $\frac{2x-1}{x^2+5}$ 的值为正数，则 x 的取值范围是_____.

4. (23-24 八年级上·山东威海·阶段练习) 若分式 $-\frac{a^2}{2a-7}$ 的值为正，则 a 的取值范围为_____.

5. (23-24 八年级下·全国·假期作业) 当 x 的取值范围是多少时：

(1) 分式 $\frac{3x-6}{x^2+1}$ 的值为负数？

(2) 分式 $\frac{5x+7}{1-x}$ 的值为正数？

(3) 分式 $\frac{5x+7}{1-x}$ 的值为负数？

压轴题型二 求使分式值为整数时未知数的整数值

例题：（2024 七年级下·浙江·专题练习）对于非负整数 x ，使得 $\frac{x^2+2}{x+2}$ 是一个正整数，则 x 可取的个数有

()

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

巩固训练

1. (23-24 八年级上·全国·课堂例题) 若分式 $\frac{6}{m-2}$ 的值是正整数，则 m 可取的整数有 ()

A. 4 个

B. 5 个

C. 6 个

D. 8 个

2. (23-24 八年级下·浙江宁波·期末) 若 x 及 $\frac{x+8}{2x+1}$ 都是正整数，则所有满足条件的 x 的值的和是_____.

3. (23-24 七年级下·浙江杭州·阶段练习) 若分式 $\frac{10x-11}{2x-1}$ 的值为整数，则整数 x 的值为_____.

4. (23-24 八年级上·北京海淀·阶段练习) 若代数式 $\frac{5}{x-2}$ 的值为正整数，则整数 x 的值为_____.

5. (23-24 八年级上·全国·课后作业) 若 x 取整数，则使分式 $\frac{6x+3}{2x-1}$ 的值为整数的 x 的值有_____个.

6. (2024 八年级下·全国·专题练习) 阅读下列材料：通过小学的学习我们知道，分数可分为“真分数”和“假分数”，而假分数都可以化为带分数，如： $\frac{8}{3} = \frac{6+2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$. 我们定义：在分式中，对于只含有一个字母的分式，当分子的次数大于或等于分母的次数时，我们称之为“假分式”；当分子的次数小于分母的次数时，我们称之为“真分式”. 如 $\frac{x-1}{x+1}$ ， $\frac{x^2}{x-1}$ ，这样的分式就是假分式；再如： $\frac{3}{x+1}$ ， $\frac{2x}{x^2+1}$ 这样的分式就是真分式. 类似的，假分式也可以化为带分式（即：整式与真分式的和的形式），如 $\frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$.

解决下列问题：

(1) 分式 $\frac{1}{5x}$ 是_____（填“真分式”或“假分式”）；

(2) 将假分式 $\frac{x^2+4x-3}{x+2}$ 化为带分式；

(3) 先化简 $\frac{3x-6}{x-1} - \frac{x+1}{x} \div \frac{x^2-1}{x^2-2x}$ ，并求 x 取什么整数时，该式的值为整数.

压轴题型三 与分式有关的规律性问题

例题：（2024 九年级下·安徽·专题练习）观察下列等式：

第 1 个等式： $\frac{2^2}{1}-1-2=1$ ；

第 2 个等式： $\frac{3^2}{2}-2-2=\frac{1}{2}$ ；

第 3 个等式： $\frac{4^2}{3}-3-2=\frac{1}{3}$ ；

第 4 个等式： $\frac{5^2}{4}-4-2=\frac{1}{4}$ ；

第 5 个等式： $\frac{6^2}{5}-5-2=\frac{1}{5}$ ；

…；

按照以上规律，解决下列问题

(1)写出第 6 个等式：_；

(2)写出你猜想的第 n 个等式（用含 n 的式子表示），并验证其正确性.

巩固训练

1.（2024·安徽六安·模拟预测）观察下列等式：

第 1 个等式： $\frac{1}{1+1}-\frac{1}{1+1}=\left(\frac{1}{1+1}\right)^2-\left(\frac{1}{1+1}\right)^2$ ；

第 2 个等式： $\frac{2}{2+1}-\frac{1}{2+1}=\left(\frac{2}{2+1}\right)^2-\left(\frac{1}{2+1}\right)^2$ ；

第 3 个等式： $\frac{3}{3+1}-\frac{1}{3+1}=\left(\frac{3}{3+1}\right)^2-\left(\frac{1}{3+1}\right)^2$ ；

第 4 个等式： $\frac{4}{4+1}-\frac{1}{4+1}=\left(\frac{4}{4+1}\right)^2-\left(\frac{1}{4+1}\right)^2$ ；

……

根据以上规律，解决下列问题.

(1)直接写出第 5 个等式：_____；

(2)写出你猜想的第 n 个等式：_____（用含 n 的等式表示），并证明.

2. (24-25 九年级上·安徽宣城·开学考试) ① $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{1 \times 2 \times 3}$; ② $\frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{2}{2 \times 3 \times 4}$; ③ $\frac{1}{12} - \frac{1}{20} = \frac{2}{3 \times 4 \times 5}$; ...

(1) 根据上面 3 个等式存在的规律写出第 4 个等式;

(2) 用含 n 的代数式表示出第 n 个等式, 并证明.

3. (24-25 八年级上·全国·课后作业) 观察下面一系列分式: $\frac{x^3}{y}, -\frac{x^5}{y^2}, \frac{x^7}{y^3}, -\frac{x^9}{y^4}, \dots$ (其中 $x \neq 0$).

(1) 根据上述分式的规律写出第 6 个分式;

(2) 根据你发现的规律, 试写出第 n (n 为正整数) 个分式, 并简单说明理由.

4. (22-23 八年级下·山东青岛·阶段练习) 观察下列各式:

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \times 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{20} = \frac{1}{4 \times 5} = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{30} = \frac{1}{5 \times 6} = \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$$

(1) 由此推测 $\frac{1}{42} =$ _____

(2) 请你用含字母 m 的等式表示一般规律 (m 表示整数)

(3) 请直接利用 (2) 的规律计算 $\frac{1}{(x-2)(x-3)} - \frac{2}{(x-1)(x-3)} + \frac{1}{(x-1)(x-2)}$ 的值.

5. (23-24 七年级下·安徽安庆·阶段练习) 观察下列等式:

第 1 个等式: $\frac{3}{1} \times \left(2 - \frac{3}{1+1} \right) = 2 - \frac{1}{1+1},$

第 2 个等式: $\frac{5}{3} \times \left(2 - \frac{3}{2+1} \right) = 2 - \frac{1}{2+1},$

第 3 个等式: $\frac{7}{5} \times \left(2 - \frac{3}{3+1} \right) = 2 - \frac{1}{3+1},$

第 4 个等式: $\frac{9}{7} \times \left(2 - \frac{3}{4+1} \right) = 2 - \frac{1}{4+1},$

.....

按照以上规律, 解答下列问题:

(1)写出第5个等式: _____;

(2)写出你猜想的第 n 个等式 (用含 n 的等式表示), 并证明.

6. (23-24 八年级下·安徽滁州·期末) 有下列等式:

$$\textcircled{1} 1 \times \frac{2}{2^2-1} = \frac{2}{3 \times 1},$$

$$\textcircled{2} \frac{4}{3} \times \frac{3}{3^2-1} = \frac{3}{3 \times 2},$$

$$\textcircled{3} \frac{5}{3} \times \frac{4}{4^2-1} = \frac{4}{3 \times 3},$$

$$\textcircled{4} 2 \times \frac{5}{5^2-1} = \frac{5}{3 \times 4},$$

.....

按照以上规律, 解决下面问题:

(1)写出第⑤个等式: _____;

(2)写出你猜想的第 n 个等式 (用含正整数 n 的等式表示), 并说明猜想的正确性.

7. (23-24 九年级下·安徽合肥·阶段练习) 观察下列等式:

$$\text{第 1 个等式: } \frac{3 \times 1 - 1}{3 \times 1 + 1} \times \left(1 + \frac{2 \times 1}{1 + 1} \right) = 3 - \frac{4}{1 + 1};$$

$$\text{第 2 个等式: } \frac{3 \times 2 - 1}{3 \times 2 + 1} \times \left(1 + \frac{2 \times 2}{2 + 1} \right) = 3 - \frac{4}{2 + 1};$$

$$\text{第 3 个等式: } \frac{3 \times 3 - 1}{3 \times 3 + 1} \times \left(1 + \frac{2 \times 3}{3 + 1} \right) = 3 - \frac{4}{3 + 1};$$

$$\text{第 4 个等式: } \frac{3 \times 4 - 1}{3 \times 4 + 1} \times \left(1 + \frac{2 \times 4}{4 + 1} \right) = 3 - \frac{4}{4 + 1};$$

.....

按照以上规律, 解答下列问题:

(1)写出第5个等式: _____;

(2)写出你猜想的第 n 个等式: _____ (用含 n 的等式表示), 并证明.

压轴题型四 与分式方程有关的规律性问题

例题：（2024 八年级下·全国·专题练习）解方程：

① $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+1} - 1$ 的解 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

② $\frac{2}{x+1} = \frac{4}{x+1} - 1$ 的解 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

③ $\frac{3}{x+1} = \frac{6}{x+1} - 1$ 的解 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

④ $\frac{4}{x+1} = \frac{8}{x+1} - 1$ 的解 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

……

(1) 根据你发现的规律直接写出⑤，⑥个方程及它们的解；

(2) 请你用一个含正整数 n 的式子表示上述规律，并求出它的解.

巩固训练

1. （22-23 八年级下·江苏常州·期中）先阅读下面的材料，然后回答问题：

方程 $x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2}$ 的解为 $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}$ ；

方程 $x + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{3}$ 的解为 $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{3}$ ；

方程 $x + \frac{1}{x} = 4 + \frac{1}{4}$ 的解为 $x_1 = 4, x_2 = \frac{1}{4}$ ；

…

(1) 根据上面的规律，猜想关于 x 的方程 $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ 的两个解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 解方程 $y + \frac{2y+5}{y+2} = \frac{17}{4}$ ，可以变形转化为 $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ 的形式，写出你的变形求解过程，运用（1）的结论求解.

(3) 方程 $\frac{2x-3}{x+1} + \frac{x+1}{2x-3} = \frac{37}{6}$ 的解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

2. (23-24 八年级下·甘肃天水·阶段练习) 解方程:

① $\frac{1}{x+1} = \frac{2}{x+1} - 1$ 的解是 $x=0$;

② $\frac{2}{x+1} = \frac{4}{x+1} - 1$ 的解是 $x=1$;

③ $\frac{3}{x+1} = \frac{6}{x+1} - 1$ 的解是 $x=2$;

④ $\frac{4}{x+1} = \frac{8}{x+1} - 1$ 的解是 $x=$ _;

(1) 请完成上面的填空;

(2) 根据你发现的规律直接写出第⑤个方程和它的解_;

(3) 请你用一个含正整数 n 的式子表述上述规律, 并写出它的解?

3. (21-22 八年级下·江苏盐城·阶段练习) 阅读理解: 下列一组方程: ① $x + \frac{2}{x} = 3$, ② $x + \frac{6}{x} = 5$,

③ $x + \frac{12}{x} = 7$, ... 小明通过观察, 发现了其中蕴含的规律, 并顺利地求出了前三个方程的解, 他的解过程如

下: 由① $x + \frac{1 \times 2}{x} = 1 + 2$ 得 $x=1$ 或 $x=2$; 由② $x + \frac{2 \times 3}{x} = 2 + 3$ 得 $x=2$ 或 $x=3$; 由③ $x + \frac{3 \times 4}{x} = 3 + 4$ 得 $x=3$ 或 $x=4$,

(1) 问题解决: 请写出第四个方程_____;

(2) 规律探究: 若 n 为正整数, 则第 n 个方程是_____ 其解为_____;

(3) 变式拓展: 若 n 为正整数, 关于 x 的方程 $x + \frac{n^2 + n}{x + 2} = 2n - 1$ 的一个解是 $x=10$, 求 n 的值.

4. (21-22 八年级上·云南昭通·期末) 先阅读下面的材料, 然后回答问题:

方程 $x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2}$ 的解为 $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$;

方程 $x + \frac{1}{x} = 3 + \frac{1}{3}$ 的解为 $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{1}{3}$;

方程 $x + \frac{1}{x} = 4 + \frac{1}{4}$ 的解为 $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{4}$;

...

(1) 观察上述方程的解, 猜想关于 x 的方程 $x + \frac{1}{x} = 6 + \frac{1}{6}$ 的解是_;

(2) 根据上面的规律, 猜想关于 x 的方程 $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ 的解是_;

(3) 由(2)可知, 在解方程 $y + \frac{y+2}{y+1} = \frac{10}{3}$ 时, 可以变形转化为 $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$ 的形式求值, 按要求写出你的变形求解过程.

(4) 利用(2)的结论解方程: $\frac{2x-1}{x+2} + \frac{x+2}{2x-1} = \frac{17}{4}$.

压轴题型五 与分式及分式运算有关的新定义型问题

例题: (23-24 八年级下·江苏宿迁·期末) 定义: 如果一个分式能化成一个整式与一个分子为常数的分式的和的形式, 则称这个分式为“和谐分式”

$$\text{如 } \frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1},$$

$$\frac{a^2-2a+3}{a-1} = \frac{(a-1)^2+2}{a-1} = a-1 + \frac{2}{a-1},$$

则 $\frac{x+1}{x-1}$ 和 $\frac{a^2-2a+3}{a-1}$ 都是“和谐分式”.

(1) 下列分式中, 属于“和谐分式”的是: _____ (填序号);

① $\frac{x+1}{x}$; ② $\frac{x+2}{2}$; ③ $\frac{x+2}{x+1}$; ④ $\frac{y^2+1}{y^2}$.

(2) 将“和谐分式” $\frac{x^2-2x-3}{x-1}$ 化成一个整式与一个分子为常数的分式的和的形式为: $\frac{x^2-2x-3}{x-1} =$ _____.

(3) 当 x 取什么整数时, “和谐分式” $\frac{x^2-2x-3}{x-1}$ 的值为整数.

巩固训练

1. (23-24 八年级下·陕西咸阳·阶段练习) 定义一种新运算: $a※b = 3a - \frac{1}{b}$, 例: $2※4 = 3 \times 2 - \frac{1}{4} = \frac{23}{4}$. 根据这种运算法则, 完成下列各题:

(1) 计算: $\frac{1}{x}※2y$;

(2) 计算: $(x+1)※(x-2)$;

(3) 计算: $\frac{1}{x-y}※(x+y) - \frac{2y}{x^2-y^2}$.

2. (22-23 九年级上·江苏南通·阶段练习) 定义: 若两个分式的差为 2, 则称这两个分式属于“友好分式组”.

(1) 下列 3 组分式:

① $\frac{3a}{a+1}$ 与 $\frac{a}{a+1}$; ② $\frac{3a}{a-1}$ 与 $\frac{a+2}{a-1}$; ③ $\frac{a}{2a+1}$ 与 $\frac{5a+2}{2a+1}$. 其中属于“友好分式组”的有 _____ (只填序号);

(2) 若正实数 a, b 互为倒数, 求证 $\frac{3a^2}{a^2+b}$ 与 $\frac{a-2b^2}{a+b^2}$ 属于“友好分式组”;

(3) 若 a, b 均为非零实数, 且分式 $\frac{3a^2}{a^2-4b^2}$ 与 $\frac{a}{a+2b}$ 属于“友好分式组”, 求分式 $\frac{a^2-2b^2}{ab}$ 的值.

3. (23-24 八年级上·湖南长沙·阶段练习) 定义: 形如 $\frac{A}{B}$ ($B \neq 0$) 的式子, 若 $A > B$, 则称 $\frac{A}{B}$ 为“勤业式”; 若 $A < B$, 则称 $\frac{A}{B}$ 为“求真式”; 若 $\frac{A}{B}$ 的值为整数, 则称 $\frac{A}{B}$ 为“至善式”.

(1) 下列式子是“求真式”的有 _____ (只填序号);

① $\frac{2}{\sqrt{2}+1}$ ② $\frac{2023^0}{\pi-3.14}$ ③ $\frac{a^2+2a+1}{a^2+2a+2}$

(2) 若 $A = 4x^2 - x + 1$, $B = 2x^2 + 3x - 4$, 请判断 $\frac{A}{B}$ 为“勤业式”还是“求真式”, 并说明理由;

(3) 若 $A = x^3 + 3x^2 - 4$, $B = x^2 + 3x + 2$, 且 x 为整数, 当 $\frac{A}{B}$ 为“至善式”时, 求 x 的值.

4. (23-24 七年级下·浙江金华·阶段练习) 定义: 如果一个分式能化成一个整式与一个分子为常数的分式的和的形式, 则称这个分式为“和谐分式”. 如若

$\frac{x+1}{x-1} = \frac{x-1+2}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} + \frac{2}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1}$, $\frac{2x-3}{x+1} = \frac{2x+2-5}{x+1} = \frac{2x+2}{x+1} + \frac{-5}{x+1} = 2 + \frac{-5}{x+1}$, 则 $\frac{x+1}{x-1}$ 和 $\frac{2x-3}{x+1}$ 都是“和谐分式”.

(1) 下列式子中, 属于“和谐分式”的是_____ (填序号):

① $\frac{x+1}{x}$; ② $\frac{2+x}{2}$; ③ $\frac{x+3}{x+1}$; ④ $\frac{y^2+1}{y^2}$; ⑤ $\frac{y^2+6y+1}{y+3}$

(2) 将“和谐分式” $\frac{a^2-2a+5}{a-1}$ 化成一个整式与一个分子为常数的分式的和的形式为.

(3) 应用先化简 $\frac{2x^2+1}{x+1} - \frac{x-1}{x} \div \frac{x^2-1}{x^2-x}$, 并求 x 取什么整数时, 该式的值为整数.

5. (23-24 八年级下·全国·期中) 阅读理解:

定义: 若分式 A 和分式 B 满足 $A-B=n$ (n 为正整数), 则称 A 是 B 的“ n 差分式”.

例如: $\frac{3x}{x-1} - \frac{3}{x-1} = 3$, 我们称 $\frac{3x}{x-1}$ 是 $\frac{3}{x-1}$ 的“3 差分式”,

解答下列问题:

(1) 分式 $\frac{1}{1-x}$ 是分式 $\frac{x}{1-x}$ 的“_差分式”.

(2) 分式 $A = \frac{C}{9-x^2}$ 是分式 $B = \frac{2x}{3-x}$ 的“2 差分式”.

① $C = _$ (含 x 的代数式表示);

② 若 A 的值为正整数, x 为正整数, 求 A 的值.

(3) 已知 $xy=1$, 分式 $\frac{x-3y}{y}$ 是 $-\frac{y+x}{x}$ 的“4 差分式” (其中 x, y 为正数), 求 $x-y$ 的值.

6. (23-24 八年级下·江苏泰州·期中) 定义: 如果两个分式 A 与 B 的差为常数, 且这个常数为正数, 则称 A

是 B 的“差常分式”, 这个常数称为 A 关于 B 的“差常值”. 如分式 $A = \frac{2x}{x-1}$, $B = \frac{2}{x-1}$,

$A - B = \frac{2x}{x-1} - \frac{2}{x-1} = 2$, 则 A 是 B 的“差常分式”, A 关于 B 的“差常值”为 2.

(1) 已知分式 $C = \frac{-3x}{x+1}$, $D = \frac{3}{x+1}$, 判断 C 是否是 D 的“差常分式”, 若不是, 请说明理由, 若是, 请证明并求出 C 关于 D 的“差常值”.

(2) 已知分式 $E = \frac{(x+1)(x-a)}{x+2}$, $F = \frac{x(x-b)}{x+2}$, 其中 E 是 F 的“差常分式”, E 关于 F 的“差常值”为 2, 求 $a+b$ 的值;

(3) 已知分式 $M = \frac{P}{x^2-9}$, $N = \frac{x}{x-3}$, 其中 M 是 N 的“差常分式”, M 关于 N 的“差常值”为 1. 若 x 为整数, 且 M 的值也为整数, 求满足条件的 x 的值.

第十五章 分式压轴训练

01 压轴总结

目录

压轴题型一 求使分式为正(负)数时未知数的取值范围	1
压轴题型二 求使分式值为整数时未知数的整数值	4
压轴题型三 与分式有关的规律性问题	9
压轴题型四 与分式方程有关的规律性问题	18
压轴题型五 与分式及分式运算有关的新定义型问题	24

02 压轴题型

压轴题型一 求使分式为正(负)数时未知数的取值范围

例题：(23-24 八年级下·广东揭阳·阶段练习) 已知分式 $\frac{x+4}{x^2}$ 的值是非负数，那么 x 的取值范围是 ()

- A. $x > -4$ 且 $x \neq 0$ B. $x \geq -4$ C. $x \neq 0$ D. $x \geq -4$ 且 $x \neq 0$

【答案】 D

【知识点】 求分式值为正(负)数时未知数的取值范围、求不等式组的解集

【分析】 本题考查分式值的正负性问题，也考查了解一元一次不等式。根据 $\frac{x+4}{x^2}$ 的值是非负数得到 $x+4 \geq 0$ 且 $x \neq 0$ ，进而能求出 x 的取值范围。

【详解】 解：∵ $\frac{x+4}{x^2} \geq 0$ ，

∴ $x+4 \geq 0$ 且 $x \neq 0$ ，

∴ $x \geq -4$ 且 $x \neq 0$ 。

故选：D。

巩固训练

1. (23-24 八年级上·湖南长沙·阶段练习) 若分式 $\frac{2x+1}{x^2}$ 的值为正，则 x 的取值范围是 ()

- A. $x > 0$ B. $x > -\frac{1}{2}$ C. $x \neq -\frac{1}{2}$ D. $x > -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 0$

【答案】 D

【知识点】 求分式值为正(负)数时未知数的取值范围

【分析】 本题考查不等式的解法和分式值的正负条件. 解不等式时当未知数的系数是负数时, 两边同除以未知数的系数需改变不等号的方向, 当未知数的系数是正数时, 两边同除以未知数的系数不需改变不等号的方向.

根据题意, 因为任何实数的平方都是非负数, 分母不能为 0, 所以分母是正数, 主要分子的值是正数则可, 从而列出不等式求解即可.

【详解】 解: 由题意得, $x^2 > 0$, 且 $x \neq 0$,

\therefore 分式 $\frac{2x+1}{x^2}$ 的值为正,

$\therefore 2x+1 > 0$,

$\therefore x > -\frac{1}{2}$,

$\therefore x > -\frac{1}{2}$ 且 $x \neq 0$.

故选: D.

2. (23-24 八年级上·山东菏泽·期中) 若分式 $\frac{x-3}{x^2}$ 的值为负数, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x < 3$ 且 $x \neq 0$

【知识点】 分式有意义的条件、求分式值为正(负)数时未知数的取值范围

【分析】 本题主要考查了分式有意义的条件、分式值为负数时未知数的取值范围; 根据分式的分母不能为 0 得出 $x \neq 0$, 再根据分式的值为负数得出 $x-3 < 0$, 进行计算即可得到答案.

【详解】 解: 根据题意得: $x^2 \neq 0$,

$\therefore x \neq 0$,

Q 分式 $\frac{x-3}{x^2}$ 的值为负数, $x^2 > 0$,

$\therefore x-3 < 0$,

$\therefore x < 3$,

$\therefore x$ 的取值范围是 $x < 3$ 且 $x \neq 0$,

故答案为: $x < 3$ 且 $x \neq 0$.

【点睛】

3. (23-24 八年级上·全国·课后作业) 若分式 $\frac{2x-1}{x^2+5}$ 的值为正数, 则 x 的取值范围是_____.

【答案】 $x > \frac{1}{2}$

【知识点】 求分式值为正(负)数时未知数的取值范围

【分析】根据平方的非负性、分式的值为正数可得 $x^2+5>0$ ， $2x-1>0$ ，由此即可得。

【详解】∵分式 $\frac{2x-1}{x^2+5}$ 的值为正数， $x^2+5>0$ ，

∴ $2x-1>0$ ，解得 $x>\frac{1}{2}$ ，

故答案为： $x>\frac{1}{2}$ 。

【点睛】本题考查了分式的值为正数，正确列出不等式是解题关键。

4. (23-24 八年级上·山东威海·阶段练习) 若分式 $-\frac{a^2}{2a-7}$ 的值为正，则 a 的取值范围为_____。

【答案】 $a<\frac{7}{2}$ 且 $a\neq 0$

【知识点】求分式值为正（负）数时未知数的取值范围

【分析】本题考查的是分式性质，根据分式为正数的条件列出不等式，解不等式得到答案。

【详解】解：∵分式 $-\frac{a^2}{2a-7}$ 的值为正，

∴ $a\neq 0$ ， $2a-7<0$ ，

解得， $a<\frac{7}{2}$ 且 $a\neq 0$

故答案为： $a<\frac{7}{2}$ 且 $a\neq 0$ 。

5. (23-24 八年级下·全国·假期作业) 当 x 的取值范围是多少时：

(1) 分式 $\frac{3x-6}{x^2+1}$ 的值为负数？

(2) 分式 $\frac{5x+7}{1-x}$ 的值为正数？

(3) 分式 $\frac{5x+7}{1-x}$ 的值为负数？

【答案】(1) $x<2$

(2) $-\frac{7}{5}<x<1$

(3) $x>1$ 或 $x<-\frac{7}{5}$

【知识点】求分式值为正（负）数时未知数的取值范围、求一元一次不等式的解集、求不等式组的解集

【分析】本题考查的是分式的值为正数或负数时，字母的取值范围，一元一次不等式组的应用，理解题意是关键；

(1) 由分式的值为负数可得 $3x-6<0$ ，再解不等式即可；

(2) 由分式的值为正数可得 $\begin{cases} 5x+7 > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 5x+7 < 0 \\ 1-x < 0 \end{cases}$ ，再解不等式组即可；

(3) 结合(2)的结论可得分式 $\frac{5x+7}{1-x}$ 的值为负数时 x 的范围.

【详解】(1) 解： $\mathbb{Q} x^2+1 > 0$ ， $\frac{3x-6}{x^2+1} < 0$ ，

$$\therefore 3x-6 < 0,$$

$$\therefore x < 2,$$

$\therefore x < 2$ 时，分式 $\frac{3x-6}{x^2+1}$ 值为负数.

(2) \because 分式 $\frac{5x+7}{1-x}$ 的值为正数，

$$\therefore \begin{cases} 5x+7 > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} 5x+7 < 0 \\ 1-x < 0 \end{cases},$$

$$\text{当 } \begin{cases} 5x+7 > 0 \\ 1-x > 0 \end{cases} \text{ 时,}$$

$$\text{解得: } -\frac{7}{5} < x < 1,$$

$$\text{当 } \begin{cases} 5x+7 < 0 \\ 1-x < 0 \end{cases} \text{ 时,}$$

不等式组无解，

综上：当 $-\frac{7}{5} < x < 1$ 时；分式 $\frac{5x+7}{1-x}$ 的值为正数，

(3) \because 由(2)得：当 $-\frac{7}{5} < x < 1$ 时；分式 $\frac{5x+7}{1-x}$ 的值为正数，

\therefore 分式 $\frac{5x+7}{1-x}$ 的值为负数时，则 $x < -\frac{7}{5}$ 或 $x > 1$ ；

压轴题型二 求使分式值为整数时未知数的整数值

例题：(2024 七年级下·浙江·专题练习) 对于非负整数 x ，使得 $\frac{x^2+2}{x+2}$ 是一个正整数，则 x 可取的个数有

()

A. 3

B. 4

C. 5

D. 6

【答案】A

【知识点】求使分式值为整数时未知数的整数值

【分析】本题主要考查了分式的化简变形，解题时要能熟练掌握并理解。依据题意，由 $\frac{x^2+2}{x+2} = x-2 + \frac{6}{x+2}$ ，再结合 $\frac{x^2+2}{x+2}$ 为正整数， x 为非负整数，进而可以得解。

【详解】解：由题意， $Q \frac{x^2+2}{x+2} = \frac{x^2-4+6}{x+2} = \frac{(x+2)(x-2)+6}{x+2} = x-2 + \frac{6}{x+2}$ ，且 $\frac{x^2+2}{x+2}$ 为正整数， x 为非负整数， $\therefore \frac{6}{x+2}$ 必为正整数。

$\therefore x+2$ 为 6 的正因数，可能为 1, 2, 3, 6,

$Q x$ 为非负整数，

$\therefore x$ 可能为 0, 1, 4.

又 $\frac{x^2+2}{x+2}$ 为正整数，

$\therefore x=0$ 或 $x=1$ 或 $x=4$ 均符合题意，共 3 种可能。

故选：A.

巩固训练

1. (23-24 八年级上·全国·课堂例题) 若分式 $\frac{6}{m-2}$ 的值是正整数，则 m 可取的整数有 ()

A. 4 个

B. 5 个

C. 6 个

D. 8 个

【答案】A

【知识点】求使分式值为整数时未知数的整数值

【分析】本题主要考查了分式的值，利用已知条件得到关于 m 的不等式，再利用有理数的整除的性质解答即可。

【详解】解：若分式 $\frac{6}{m-2}$ 的值是正整数，且 m 为整数，

则 $m-2$ 是 6 的约数， $m-2 > 0$ 。

$\therefore m-2=6$ 或 $m-2=3$ 或 $m-2=2$ 或 $m-2=1$ ，

即 m 的值为 8 或 5 或 4 或 3，共 4 个。

2. (23-24 八年级下·浙江宁波·期末) 若 x 及 $\frac{x+8}{2x+1}$ 都是正整数，则所有满足条件的 x 的值的和是_____。

【答案】10

【知识点】求一元一次不等式的解集、求使分式值为整数时未知数的整数值

【分析】本题考查了使分式值为整数时未知数的整数值，一元一次不等式的应用，根据题意建立不等式并求解是解题关键。根据 x 为整数，且 $\frac{x+8}{2x+1}$ 的值也为正整数，列出不等式，求出 x 的取值范围，再枚举求出符合题意的 x 的值，即可求解。

【详解】解：∵ x 及 $\frac{x+8}{2x+1}$ 都是正整数，

$$\therefore \frac{x+8}{2x+1} \geq 1,$$

$$\text{即 } x+8 \geq 2x+1,$$

解得： $x \leq 7$ ，

$$\text{故当 } x=1 \text{ 时， } \frac{x+8}{2x+1} = 1 + \frac{7-x}{2x+1} = 1 + \frac{7-1}{2+1} = 1+2=3,$$

$$\text{当 } x=2 \text{ 时， } \frac{x+8}{2x+1} = 1 + \frac{7-x}{2x+1} = 1 + \frac{7-2}{4+1} = 1+1=2,$$

$$\text{当 } x=3 \text{ 时， } \frac{x+8}{2x+1} = 1 + \frac{7-x}{2x+1} = 1 + \frac{7-3}{6+1} = 1 + \frac{4}{7},$$

$$\text{当 } x=4 \text{ 时， } \frac{x+8}{2x+1} = 1 + \frac{7-x}{2x+1} = 1 + \frac{7-4}{8+1} = 1 + \frac{1}{3},$$

$$\text{当 } x=5 \text{ 时， } \frac{x+8}{2x+1} = 1 + \frac{7-x}{2x+1} = 1 + \frac{7-5}{10+1} = 1 + \frac{2}{11},$$

$$\text{当 } x=6 \text{ 时， } \frac{x+8}{2x+1} = 1 + \frac{7-x}{2x+1} = 1 + \frac{7-6}{12+1} = 1 + \frac{1}{13},$$

$$\text{当 } x=7 \text{ 时， } \frac{x+8}{2x+1} = 1 + \frac{7-x}{2x+1} = 1 + \frac{7-7}{14+1} = 1,$$

故所有满足条件的 x 的值有：1、2、7，

∴所有满足条件的 x 的值的和是 $1+2+7=10$ 。

故答案为：10。

3. (23-24 七年级下·浙江杭州·阶段练习) 若分式 $\frac{10x-11}{2x-1}$ 的值为整数，则整数 x 的值为_____。

【答案】-1或0或1或2

【知识点】求使分式值为整数时未知数的整数值

【分析】本题考查了求使分式值为整数时未知数的整数值问题，将分式化为 $5 - \frac{6}{2x-1}$ ，分别代值计算，即

可求解；掌握这类典型问题的解法是解题的关键。

【详解】解： $\frac{10x-11}{2x-1}$

$$= \frac{5(2x-1)-6}{2x-1}$$

$$= 5 - \frac{6}{2x-1},$$

Q 分式 $\frac{10x-11}{2x-1}$ 的值为整数，且 x 是整数，

$$\therefore 2x-1 = -3 \text{ 或 } 2x-1 = -1$$

$$\text{或 } 2x-1 = 1 \text{ 或 } 2x-1 = 3,$$

解得： $x = -1$ 或 0 或 1 或 2 ，

故答案： -1 或 0 或 1 或 2 。

4. (23-24 八年级上·北京海淀·阶段练习) 若代数式 $\frac{5}{x-2}$ 的值为正整数，则整数 x 的值为_____。

【答案】3 或 7/7 或 3

【知识点】求使分式值为整数时未知数的整数值

【分析】分子为正整数 5，若分式值为正整数，且 x 为整数，则 $x-2$ 等于 1 或 5，从而问题可解。

【详解】解：∵ $\frac{5}{x-2}$ 的值为正整数，

∴ $x-2=1$ 或 $x-2=5$ ，

∴ $x=7$ 或 $x=3$ ，

故答案为：3 或 7。

【点睛】本题考查了分式求值，根据题意得出 $x-2$ 等于 1 或 5 是解题的关键。

5. (23-24 八年级上·全国·课后作业) 若 x 取整数，则使分式 $\frac{6x+3}{2x-1}$ 的值为整数的 x 的值有_____个。

【答案】4

【知识点】求使分式值为整数时未知数的整数值

【分析】先将假分式 $\frac{6x+3}{2x-1}$ 分离可得出 $3+\frac{6}{2x-1}$ ，根据题意只需 $2x-1$ 是 6 的整数约数即可。

【详解】解： $\frac{6x+3}{2x-1} = \frac{3(2x-1)+6}{2x-1} = 3 + \frac{6}{2x-1}$

由题意可知， $2x-1$ 是 6 的整数约数，

∴ $2x-1=1, 2, 3, 6, -1, -2, -3, -6$

解得： $x=1, \frac{3}{2}, 2, \frac{7}{2}, 0, -\frac{1}{2}, -1, -\frac{5}{2}$ ，

其中 x 的值为整数有： $x=0, 1, -1, 2$ 共 4 个。

故答案为：4。

【点睛】本题考查的知识点是分式的值是整数的条件，分离假分式是解此题的关键，通过分离假分式得到

$3 + \frac{6}{2x-1}$ ，从而使问题简单

6. (2024 八年级下·全国·专题练习) 阅读下列材料：通过小学的学习我们知道，分数可分为“真分数”和“假

分数”，而假分数都可以化为带分数，如： $\frac{8}{3} = \frac{6+2}{3} = 2 + \frac{2}{3} = 2\frac{2}{3}$

· 我们定义：在分式中，对于只含有一个字母的分式，当分子的次数大于或等于分母的次数时，我们称之为“假分式”；当分子的次数小于分母的次数时，我们称之为“真分式”。如 $\frac{x-1}{x+1}$, $\frac{x^2}{x-1}$ ，这样的分式就是假分式；再如： $\frac{3}{x+1}$, $\frac{2x}{x^2+1}$ 这样的分式就是真分式。类似的，假分式也可以化为带分式（即：整式与真分式的和的形式），如 $\frac{x-1}{x+1} = \frac{(x+1)-2}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$ 。

解决下列问题：

(1) 分式 $\frac{1}{5x}$ 是_____（填“真分式”或“假分式”）；

(2) 将假分式 $\frac{x^2+4x-3}{x+2}$ 化为带分式；

(3) 先化简 $\frac{3x-6}{x-1} - \frac{x+1}{x} \div \frac{x^2-1}{x^2-2x}$ ，并求 x 取什么整数时，该式的值为整数。

【答案】(1) 真分式

(2) $x+2 - \frac{7}{x+2}$

(3) 化简得 $\frac{2x-4}{x-1}$ ； $x=3$

【知识点】 分式的判断、求使分式值为整数时未知数的整数值、分式加减乘除混合运算、分式加减混合运算

【分析】 本题考查分式的化简及分式的分离整数法，理解材料并掌握分式的运算是解题关键。

(1) 根据真分式的定义判断即可；

(2) 根据材料给出的方法运算即可；

(3) 先化简，再将分式化为带分式，最后再求解，注意分式有意义的条件。

【详解】(1) 解：因为分式 $\frac{1}{5x}$ 的分子次数 0 小于分母次数 1，

所以分式 $\frac{1}{5x}$ 是真分式，

故答案为：真分式；

(2) $\frac{x^2+4x-3}{x+2} = \frac{x^2+4x+4-4-3}{x+2} = \frac{(x+2)^2-7}{x+2} = x+2 - \frac{7}{x+2}$ ；

(3) $\frac{3x-6}{x-1} - \frac{x+1}{x} \div \frac{x^2-1}{x^2-2x}$
 $= \frac{3x-6}{x-1} - \frac{x+1}{x} \cdot \frac{x(x-2)}{(x-1)(x+1)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{3x-6}{x-1} - \frac{x-2}{x-1} \\ &= \frac{3x-6-x+2}{x-1} \end{aligned}$$

$$= \frac{2x-4}{x-1},$$

$$\therefore \frac{2x-4}{x-1} = \frac{2(x-1)-2}{x-1} = 2 - \frac{2}{x-1},$$

$$\therefore 2 - \frac{2}{x-1} \text{ 是整数,}$$

$$\therefore x-1 = \pm 1 \text{ 或 } \pm 2,$$

$$\text{解得: } x = 0, 2, 3 \text{ 或 } -1,$$

$$\therefore x = 0, 1, -1 \text{ 或 } 2 \text{ 时, 原分式无意义,}$$

$$\therefore x = 3,$$

即当 $x = 3$ 时, 该式的值为整数.

压轴题型三 与分式有关的规律性问题

例题: (2024 九年级下·安徽·专题练习) 观察下列等式:

$$\text{第 1 个等式: } \frac{2^2}{1} - 1 - 2 = 1;$$

$$\text{第 2 个等式: } \frac{3^2}{2} - 2 - 2 = \frac{1}{2};$$

$$\text{第 3 个等式: } \frac{4^2}{3} - 3 - 2 = \frac{1}{3};$$

$$\text{第 4 个等式: } \frac{5^2}{4} - 4 - 2 = \frac{1}{4};$$

$$\text{第 5 个等式: } \frac{6^2}{5} - 5 - 2 = \frac{1}{5};$$

...

按照以上规律, 解决下列问题

(1) 写出第 6 个等式: ;

(2) 写出你猜想的第 n 个等式 (用含 n 的式子表示), 并验证其正确性.

【答案】 (1) $\frac{7^2}{6} - 6 - 2 = \frac{1}{6}$

(2) $\frac{(n+1)^2}{n} - n - 2 = \frac{1}{n}$, 证明见解析

【分析】 此题考查了数字类规律探究, 分式的加减运算;

(1) 根据前 5 个等式规律写出第 6 个等式;

(2) 根据前 5 个等式猜想出第 n 个等式并验证.

【详解】(1) 解: Q 第 1 个等式: $\frac{2^2}{1}-1-2=1$;

第 2 个等式: $\frac{3^2}{2}-2-2=\frac{1}{2}$;

第 3 个等式: $\frac{4^2}{3}-3-2=\frac{1}{3}$;

第 4 个等式: $\frac{5^2}{4}-4-2=\frac{1}{4}$;

第 5 个等式: $\frac{6^2}{5}-5-2=\frac{1}{5}$;

可得第 6 个等式为: $\frac{7^2}{6}-6-2=\frac{1}{6}$,

故答案为: $\frac{7^2}{6}-6-2=\frac{1}{6}$;

(2) 由题意可猜想得, 第 n 个等式为: $\frac{(n+1)^2}{n}-n-2=\frac{1}{n}$,

证明: Q $\frac{(n+1)^2}{n}-n-2$

$$= \frac{n^2+2n+1}{n} - \frac{n(n+2)}{n}$$

$$= \frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{n}$$

$$= \frac{1}{n},$$

\therefore 第 n 个等式为: $\frac{(n+1)^2}{n}-n-2=\frac{1}{n}$.

巩固训练

1. (2024·安徽六安·模拟预测) 观察下列等式:

第 1 个等式: $\frac{1}{1+1}-\frac{1}{1+1}=\left(\frac{1}{1+1}\right)^2-\left(\frac{1}{1+1}\right)^2$;

第 2 个等式: $\frac{2}{2+1}-\frac{1}{2+1}=\left(\frac{2}{2+1}\right)^2-\left(\frac{1}{2+1}\right)^2$;

第 3 个等式: $\frac{3}{3+1}-\frac{1}{3+1}=\left(\frac{3}{3+1}\right)^2-\left(\frac{1}{3+1}\right)^2$;

第 4 个等式: $\frac{4}{4+1}-\frac{1}{4+1}=\left(\frac{4}{4+1}\right)^2-\left(\frac{1}{4+1}\right)^2$;

.....

根据以上规律, 解决下列问题.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/238013060061006137>