第21课　三角形与全等三角形

基础知识　自主学习

要点梳理

1．三角形边、角关系：

三角形的任何两边之和__大于__第三边；三角形的内角和等于__$180°$__.

2．三角形的分类：

按角可分为__直角三角形__和__斜三角形__，按边可分为__不等边三角形__和__等边三角形__.

3．三角形中的主要线段：

(1) **角平分线**：一个角的顶点和这个角的平分线与对边的交点之间的线段叫做三角形的角平分线；三角形三条角平分线的交点，则叫三角形的内心，它到各边的距离相等.

(2) **中线**：连结三角形的一个顶点和它对边中点的线段叫做三角形的中线；三角形三条中线的交点，叫三角形的重心.

(3) **高**：三角形的一个顶点和它对边所在直线的垂线段叫做三角形的高；三角形三条高线的交点，叫三角形的垂心.

(4) **中位线**：连结三角形两边中点的线段，叫做三角形的中位线.

4．外心：

三角形三边的中垂线的交点，叫三角形的外心，它到各顶点的距离相等；锐角三角形的外心在形内，钝角三角形的外心在形外，直角三角形的外心在斜边中点.

5．全等三角形的性质和判定：

(1) 性质：全等三角形对应边相等，对应角相等．注意：全等三角形对应边上的高、中线相等；对应角的平分线相等；全等三角形的周长、面积也相等.

(2) 判定：

①__两边和夹角__对应相等的两个三角形全等(SAS)；

②__两角和夹边__对应相等的两个三角形全等(ASA)；

③__两角和其中一角的对边__对应相等的两个三角形全等(AAS)；

④__三边__对应相等的两个三角形全等(SSS)；

⑤__斜边和一条直角边__对应相等的两个直角三角形全等(HL).

[难点正本　疑点清源]

1．三角形的分类

按边分类时，一定要注意等边三角形也是一种等腰三角形，不要把它单独分出来．选择题中经常把它作为一个错误项出现；按角分类时，每一个角都是锐角的三角形才是锐角三角形，只要有一个角是直角或者有一个角是钝角，就能判定它是直角三角形或者是钝角三角形，但已知两角都为锐角时，要计算出第三角才能作出判定．

2．提高运用全等三角形解决几何证明问题的能力

用全等三角形解决几何证明问题，要灵活运用题设条件，结合待证结论，对照图形，从不同角度去试探，不要怕碰壁，要善于分析，总结规律，并加以适当练习，一定能提高运用全等三角形证题的能力．

证明三角形全等的过程中，应遵循以下几点：(1)先指明在哪两个三角形中研究问题；(2)按边、角的顺序列出全等的三个条件(对于直角三角形有两个条件)，并用大括号括起来；(3)写出结论，将两个全等三角形中表示对应顶点的字母写在对应的位置上；(4)在证明过程中要步步有依据．

判定三角形全等的基本思路是：(1)有两边对应相等时，找夹角相等或第三边对应相等；(2)有一边和一角对应相等时，找另一角相等或夹等角的另一边相等；(3)有两个角对应相等时，找一对边对应相等．另外，在寻求全等条件时，要善于挖掘图形中公共边、公共角、对顶角等隐含条件．

如果待证结论所在的两个三角形不全等，则需要添加辅助线，构造全等三角形．构造的常用方法有：(1)若已知三角形的中线，往往会用到“中线倍长”的方法；(2)可通过作平行线，构造相

等的角，创造三角形全等的条件；(3)截取相等线段或相等角，创造条件．在实际解题过程中，要注意结合题意，采取不同的辅助线作法，并注意及时总结．

基础自测

1．(2011·滨州)某三角形的两边长分别为3和4，则下列长度的线段能作为其第三边的是(　　)

A. 1　　B．5　　C．7　　D．9

答案　B

解析　这个三角形第三边x的范围是$4-3<x<4+3$，即$1<x<7$，只有5在此范围内．

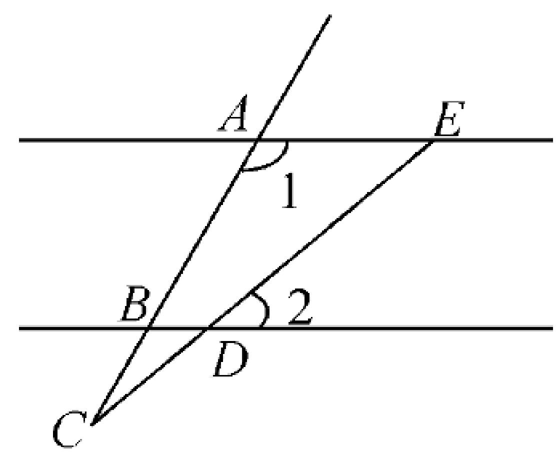
2．(2011·苏州)△ABC的内角和为(　　)

A．180°　　B．360°　　C．540°　　D．720°

答案　A

解析　根据内角和定义可知.

3．(2011·济宁)如图，$AE∥BD$，$∠1=120°$，$∠2=40°$，则$∠C$的度数是(　　)

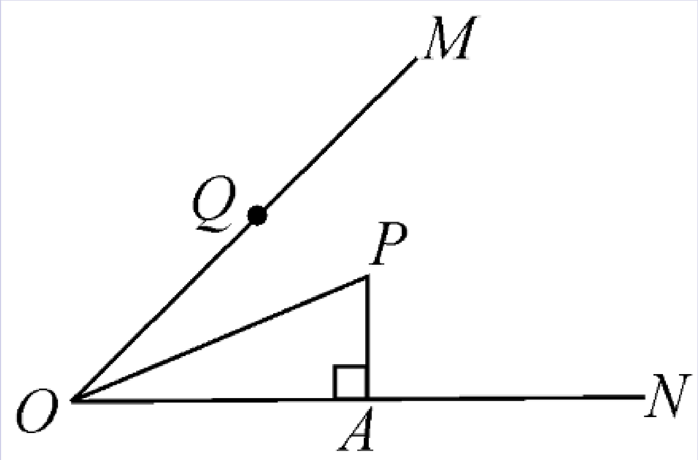


A．10°　B．20°　C．30°　D．40°

答案　B

解析　由$AE∥BD$，得$∠AED=∠2=40°$.在$\triangle ACE$中，$∠C=180°-∠1-∠AED=180°-120°-40°=20°$.

4．(2011·衢州)如图，OP平分$\angle MON$，$PA \perp ON$于点A，点Q是射线OM上的一个动点，若$PA=2$，则PQ的最小值为(　　)



A．1　　B．2　　C．3　　D．4

答案　B

解析　因为$PA \perp ON$，且$PA=2$，可知点P到ON的距离等于2，根据OP平分$\angle MON$，角平分线上的点到角两边的距离相等，当$PQ \perp OM$时，PQ的值最小，为2.

5．(2011·上海)下列命题中，真命题是(　　)

A．周长相等的锐角三角形都全等

B．周长相等的直角三角形都全等

C．周长相等的钝角三角形都全等

D．周长相等的等腰直角三角形都全等

答案　D

解析　设两个等腰直三角形的直角边分别为 a、b，其周长$(2+\sqrt{2})a=(2+\sqrt{2})b$，则 $a=b$，可知这两个三角形必全等．

题型分类　深度剖析

题型一　三角形的三边关系

【例 1】　(1) (2011·河北) 已知三角形三边长分别为2，x，13，若x为正整数，则这样的三角形个数为(　　)

A．2　　B．3　　C．5　　D．13

答案　B

解析　$\because 13-2<x<13+2$，即$11<x<15$.

$\therefore$整数x的值为12,13,14，这样的三角形有3个.

(2) 已知等腰三角形的一边长等于 12 cm，腰长是底边长的$\frac{3}{4}$，则它的周长是多少？

解 ①当 12 cm 的边是三角形的腰长时，则底边$=12\div\frac{3}{4}=16$，

三角形的周长$=12+12+16=40$(cm)；

②当 12 cm 的边是三角形的底边时，则腰长$=12\times\frac{3}{4}=9$，

三角形的周长$=12+9+9=30$(cm).

答：三角形的周长等于 40 cm 或 30 cm.

探究提高 三角形三边关系性质的实质是“两点之间，线段最短”.

根据三角形的三边关系，已知三角形的两边a、b，可确定三角形第三边长c的取值范围$|a-b|<c<a+b$.

知能迁移1　(1)(2010·青海)等腰三角形的两边长分别为4和9，则这个三角形的周长为________.

答案　22

解析　$\because 4+4=8<9$，$\therefore$第三边长只能为9，周长$=4+9+9=22$.

(2)(2011·南通)下列长度的三条线段，不能组成三角形的是(　　)

A．3，8，4　　B. 4，9，6

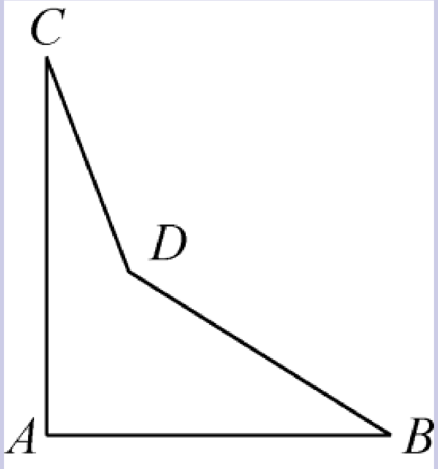
C．15，20，8　　D. 9，15，8

答案　A

解析　因为$3+4<8$，所以长度为3,8,4的三条线段不能组成三角形.

题型二　三角形的内角、外角的性质

【例 2】　一个零件的形状如图所示，按规定$\angle A=90°$，$\angle B$和$\angle C$分别是32°和21°，检验工人量得$\angle BDC=148°$，就断定这个零件不合格，请说明理由.



解　延长BD交AC于E.

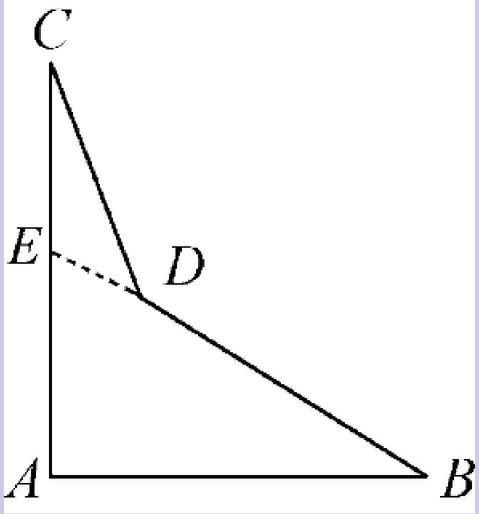
∵$\angle DEC$是$\triangle ABE$的外角，

∴$\angle DEC=\angle A+\angle B=90°+32°=122°$.

同理，$\angle BDC=\angle C+\angle DEC$

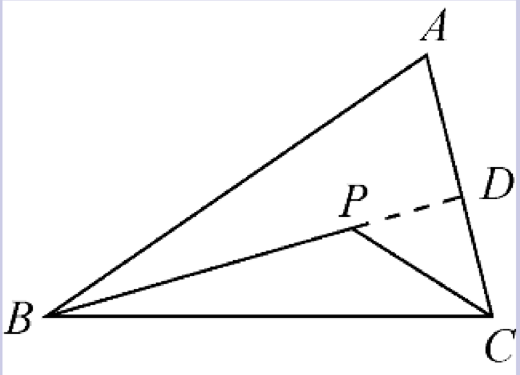
$=21°+122°=143°\neq148°$.

∴这个零件不合格.



探究提高　有关求三角形角的度数的问题，首先要明确所求的角和哪些三角形有密切联系，若没有直接联系，可添加辅助线构建“桥梁”.

知能迁移2　如图，P是$\triangle ABC$内一点，延长BP交AC于点D，用“$<$”表示$\angle BPC$、$\angle BDC$、$\angle BAC$之间的关系．



解　$\because \angle BPC$是$\triangle PCD$的外角，$\therefore \angle BPC>\angle BDC$，

同理$\angle BDC>\angle BAC$．$\therefore \angle BPC>\angle BDC>\angle BAC$．