华师一附中 2024 届高三《三角函数与方程，三角函数与不等式》
补充作业 13

1. 比较大小，正确的是(　)

A. $\sin(-5) < \sin 3 < \sin 5$　　B. $\sin(-5) > \sin 3 > \sin 5$

C. $\sin 3 < \sin(-5) < \sin 5$　　D. $\sin 3 > \sin(-5) > \sin 5$

2.设 $a = 5\sin\frac{1}{5}$, $b = \cos\frac{1}{10}$, $c = 10\sin\frac{1}{10}$,则（ ）

A. $c < b < a$　　B. $b < a < c$　　C. $a < c < b$　　D. $a < b < c$

3.设 $a = \sin 0.1$, $b = \frac{0.3}{\pi}$, $c = \frac{0.9}{\pi^2}$,则（ ）

A. $c < b < a$　　B. $a < b < c$　　C. $a < c < b$　　D. $c < a < b$

4．若关于 x 的不等式 $1 - \frac{2}{3}\cos 2x + a\cos x > 0$ 在 R 上恒成立，则实数 a 的最大值为（　　）

A. $-\frac{1}{3}$　　**B.** $\frac{1}{3}$　　**C.** $\frac{2}{3}$　　**D.** 1

5.若 α、$\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，且 $\alpha\sin\alpha - \beta\sin\beta > 0$，则下面结论正确的是（　　）

A. $\alpha > \beta$　　**B.** $\alpha + \beta > 0$　　**C.** $\alpha < \beta$　　**D.** $\alpha^2 > \beta^2$

6.已知函数 $f(x) = \sin x - \sin 3x, x \in [0, 2\pi]$，则 $f(x)$ 函数的所有零点之和等于______________。

7. 已知函数 $f(x) = 2\cos x\sin(x - \frac{\pi}{6})$，若方程 $f(x) = \frac{1}{3}$ 在 $(0, \pi)$ 上的解为 x_1, x_2，则 $\cos(x_1 - x_2) =$______________。

8.函数 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)(|\varphi| < \frac{\pi}{2})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后对应的函数是奇函数，函数 $g(x) = (2 + \sqrt{3})\cos 2x$，若关于 x 的方程 $f(x) + g(x) = -2$ 在 $[0, \pi)$ 内有两个不同的解 α, β，则 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值为______________。

9.已知函数 $f(x) = 3\sin(\omega x + \varphi)(\omega > 0, 0 < \varphi < \pi)$, $f(-\frac{\pi}{3}) = 0$，对 $x \in R$ 恒有 $f(x) \le \left|f(\frac{\pi}{3})\right|$，且在区间 $(\frac{\pi}{15}, \frac{\pi}{5})$ 上有且只有一个 x_1 使 $f(x_1) = 3$，则 ω 的最大值为______________。

10. 设函数 $f(x)=a\sin\omega x+b\cos\omega x(\omega>0)$ 在区间 $[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}]$ 上单调，且 $f(\frac{\pi}{2})=f(\frac{2\pi}{3})=-f(\frac{\pi}{6})$，当 $x=\frac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取到最大值 4，若将函数 $f(x)$ 的图象上各点的

横坐标伸长为原来的 2 倍得到函数 $g(x)$ 的图象，则函数 $y = g(x) - \sqrt{x+\frac{\pi}{3}}$ 零点的个数为______。

11.若 $\alpha \in [0,\pi], \beta \in [-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}], \lambda \in R$，满足 $(\alpha-\frac{\pi}{2})^3 - \cos\alpha - 2\lambda = 0$, $4\beta^3 + \sin\beta\cos\beta + \lambda = 0$，则 $\cos(\frac{\alpha}{2}+\beta)$ 的值是______。

12. 已知 $a = (\cos 2x, 1), b = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin x\cos x)$, 函数 $f(x) = a \cdot b - \frac{1}{2}$，若 $f(x)$ 在区间 $[m,n], (m,n \in R, m < n)$ 上至少有 100 个零点，则 $n-m$ 的最小值为______。

13.已知函数 $f(x) = \frac{\cos nx}{\cos x}\left(n \in N^*\right)$，则下列判断中，正确的是（　　）

A．$f(x)$ 是周期函数　　　　B．$f(x)$ 的图像是轴对称图形

C．$f(x)$ 的图像关于点 $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ 对称　　　　D．不存在正整数 n，使得 $f(x) < n$

14. $\triangle ABC$ 中，所有内角都不是钝角，其中正确的命题为（　　）

A．$\sin 2A = \sin 2B$ 常 $A = B$　　　　B．$\sin 2A > \sin 2B$ 常 $A < B$

C．$\cos 2A > \cos 2B$ 常 $A < B$　　　　D．$\sin A > \cos B$

15.（多选题）已知函数 $f(x) = \begin{cases} \sin\pi x, x \in [0,2] \\ \frac{1}{2}f(x-2), x \in (2,+\infty) \end{cases}$，下列说法正确的是（　　）

A．函数 $f(x)$ 对任意 x_1、$x_2 \in [0,+\infty)$，都有 $|f(x_1) - f(x_2)| < 2$ 成立

B．函数 $f(x)$ 在 $\left[2n-\frac{3}{2}, 2n-\frac{1}{2}\right]\left(n \in N^*\right)$ 上单调递减

C．函数 $y = f(x) - \log_2 x + 1$ 在 $(0,+\infty)$ 上有 3 个零点

D．若函数 $f(x)$ 的值域为 $[m,n]$，设 S 是 $\left(m+1,\frac{5n}{8}\right)$ 中所有有理数的集合，若简分数 $\frac{q}{p} \in S$（其中 p、q 为互质的整数），定义函数 $g\left(\frac{q}{p}\right) = \frac{q+1}{p}$，则 $g(x) = \frac{2}{3}$ 在 S 中的根的个数

为______________。

16.已知函数$f(x)$在定义域R上的导函数为$f'(x)$，若函数$y = f'(x)$没有零点，且

$f[f(x)-2019^x]=2019$，当 $g(x)=\sin x-\cos x-kx$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上与 $f(x)$ 在 R 上的单调性相同时，则实数 k 的取值范围是______________。

17.定义 $\min\{a,b\}=\begin{cases}a & (a<b)\\ b & (a>b)\end{cases}$，若函数 $f(x)=\min\left\{\sin(2x+\frac{\pi}{6}),\cos 2x\right\}$，且 $f(x)$ 在区间 $[s,t]$ 上的值域为 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$，则区间 $[s,t]$ 长度的最大值为______________。

18.设函数 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{4})(x=[0,\frac{9\pi}{8}])$，若方程 $f(x)=a$ 恰好有三个根，分别为 $x_1,x_2,x_3\ (x_1<x_2<x_3)$，则 $x_1+x_2+x_3$ 的取值范围是______________。

19.已知函数 $f(x)=\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{2}x)-1, x<0\\ \log_a x, x>0\end{cases}$ 的图像上关于 y 轴对称的点恰有 9 对，则实数 a 的取值范围______________。

20.已知函数 $f(x)=\sin(wx+\psi)\left(w>0,|\psi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像过点 $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，若 $f(x)<f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 对 $x=R$ 恒成立，则 w 的值为___________，当 w 最小时，函数 $g(x)=f\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}$ 在区间 $[0,22]$ 的零点个数为______________。

21.函数 $y=f(x)$ 是定义域为 R 的偶函数，当 $x>0$ 时，$f(x)=\begin{cases}\frac{5}{4}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right), 0<x<1\\ \left(\frac{1}{4}\right)^x \cdots\end{cases}$ 若关于 x 的方程 $[f(x)]^2+af(x)+b=0(a,b=R)$ 有且仅有 6 个不同实数根，则实数 a 的取值范围是______________。

22.已知函数 $f(x)=\sin(wx+\psi)\left(w>0,\psi<\frac{\pi}{2}\right)$.(1)若 $f(x)$ 满足 $f\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=-f\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$，$f\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)=f(x)$，且 $f(x)$ 在区间 $\left(0,\frac{\pi}{8}\right)$ 上为单调函数，则 w 的最大值为______________。

(2)若直线 $y=w(0<w<1)$ 与 $f(x)$ 的图象相交，将其中三个相邻的交点从左到右依次记为

A、B、C，且满足$AC = nBC\left(n = N^{*}\right)$. 当$\varPsi = \frac{\pi}{8}$时，函数$f\left(x\right)$在区间$\left[-\frac{\pi}{\omega+1}, \frac{\pi}{\omega+1}\right]$上单调递增，则$W=$ ______________。

23.已知函数$f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)+B\left(A>0,\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2},x\in R\right)$在区间$\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$上单调，当$x=\frac{\pi}{2}$时，$f(x)$取得最大值$5$，当$x=\frac{3\pi}{2}$时，$f(x)$取得最小值$-1$，

（1）求$f(x)$的解析式；

（2）当$x\in[0,4\pi]$时，函数$g(x)=2^x|f(x)|-(a+1)2^{x+1}$有$8$个零点，求实数$a$的取值范围.

24.已知函数$f(x)=2\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+1$.

（1）若$f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$，$|x_1-x_2|_{\min}=\frac{\pi}{2}$，求$f(x)$的对称中心；

（2）已知$0<\omega<5$，函数$f(x)$图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位得到函数$g(x)$的图象，$x=\frac{\pi}{3}$是$g(x)$的一个零点，若函数$g(x)$在$[m,n]$$(m,n\in R$且$m<n)$上恰好有$10$个零点，求$n-m$的最小值.

25. 已知函数$f\left(x\right)=\sqrt{3}\sin^2x+2\sin x\cos x+3\sqrt{3}\cos^2x$，

（1）若$\theta\in\left(0，\pi\right)$，$f\left(\frac{\theta}{2}\right)=3\sqrt{3}$，求$\theta$的值；

（2）若将函数$y=f\left(x\right)$图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度，向下平移$2\sqrt{3}$个单位长度得到曲线 C，再把曲线 C 上所有的点横坐标变为原来的 2 倍（纵坐标不变），得到函数$g\left(x\right)$的图象，若函数$F\left(x\right)=g(\frac{\pi}{2}-2x)+mg(x)$在区间$\left(0,n\pi\right)(n\in N_+)$上恰有 2021 个零点，求$n$，$m$的值.

26.已知函数 $f(x)=\sin^4(x+\frac{\pi}{4})-\cos^4(x+\frac{\pi}{4})$ 在区间 $\left[t-\frac{\pi}{8},t+\frac{\pi}{8}\right](t\in R)$ 上的最大值为 $M(t)$，最小值为 $m(t)$，记 $g(t)=M(t)-m(t)$，

（1）求 $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 的值；

（2）设 $h(t)=g(t)-a(a\in R)$，①若 $a=1$，试写出方程 $h(t)=0$ 的一个解；

②若 $t\in\left[-\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}\right]$，求函数 $h(t)$ 的零点个数。

27.在 ΔABC 中，角 A、B、C 所对的边长分别为 a、b、$c(b=2k,k\in N^*)$，函数 $f(x)=20\cos^2x+3a\cos x-5$ 在区间 $(0,b\pi)$ 上有 9 个零点，

（1）求 a，b 的值；

（2）若 $\cos B<\frac{1}{8}$，求 c 的取值范围.

28.已知函数$f(x)=a\sin x+\sin 2x, a\in R$.

（1）若$a=2$,求函数$f(x)$在$(0,\pi)$上的单调区间；

（2）若$a=1$，不等式$f(x)>bx\cos x$对任意$x\in(0,\dfrac{2\pi}{3})$恒成立，求满足条件的最大整数b.

29.已知函数$f(x) = e^{x} - \sin x - \cos x,\ g(x) = e^{x} + \sin x + \cos x$, .

（1）证明：当$x > -\frac{5\pi}{4}$时，$f(x)$ 之 0；

（2）若$g(x)$ 之 $2 + ax$，求a.

30.已知函数$f(x) = \sin x + ax^{3} - x$.

（1）当 $a = \frac{1}{6}$ 时，求证：函数$f(x)$ 在 R 上单调递增；

（2）若 $f(x)$ 只有一个零点，求 a 的取值范围.

一轮复习补充作业 1；：三角函数与方程、三角函数与不等式参考答案

1.因为$\frac{3\pi}{2}<5<2\pi$， 所以$\sin5<0$．而$\sin(-5)=\sin(2\pi-5)$，$\sin3=\sin(\pi-3)$，

由$0<\pi-3<2\pi-5<\frac{\pi}{2}$，所以$\sin(2\pi-5)>\sin(\pi-3)>0$．综上$\sin(-5)>\sin(3)>\sin5$，故选 B.

2. D

$\because c=\frac{0.9}{\pi^2}=\frac{0.3}{\pi}\times\frac{3}{\pi}<\frac{0.3}{\pi}=b$，$\therefore c<b$，$b=\frac{0.3}{\pi}=\frac{0.1\times3}{\pi}=\frac{0.1\times3}{\pi}$，设$f(x)=\sin x$，$g(x)=\frac{3}{\pi}x$，

当$x=\frac{\pi}{6}$时，$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{3}{\pi}\times\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，$\therefore f(x)=\sin x$与$g(x)=\frac{3}{\pi}x$相交于点$\left(\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}\right)$和原点，$\therefore x\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$时，$\sin x>\frac{3}{\pi}x$，$\because 0.1\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore \sin0.1>\frac{3}{\pi}\times0.1$，即$b<a$，$\therefore c<b<a$，故选：A.

4.

方程可化为$4\cos^2x-3a\cos x-5<0$.令$\cos x=t$,则$t\in[-1,1]$

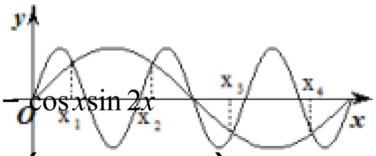
从而$4t^2-3at-5<0$对任意$t\in[-1,1]$恒成立.由图像法（抛物线开口向上，过点$(0,-5)$），

有$\begin{cases}4\cdot(-1)^2-3a(-1)-5<0\\4\cdot1^2-3a\cdot1-5<0\end{cases}$ 解得 $a\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.

5. $y=x\sin x$是偶函数且在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上递增，$\because \alpha,\beta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，$\therefore \alpha\sin\alpha$，$\beta\sin\beta$皆为非负数，

$\because \alpha\sin\alpha-\beta\sin\beta>0$，$\therefore \alpha\sin\alpha>\beta\sin\beta$，$\therefore |\alpha|>|\beta|$，$\therefore \alpha^2>\beta^2$.故选：$D$.

6.方法 1（代数法）：



$f(x)=\sin x-\sin3x=\sin x-\sin(x+2x)=\sin x-\sin x\cos2x-\cos x\sin2x$

$=\sin x(1-\cos2x)-\cos x\sin2x=2\sin^3x-2\sin x\cos^2x=2\sin x(\sin^2x-\cos^2x)$

$=-2\sin x\cos2x$，由$f(x)=0$得到$\sin x=0$或者$\cos2x=0$.

当$\sin x=0$时，$x=0$，π，2π；

当$\cos2x=0$时，$x=\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$；

所以$f(x)$的所有零点之和等于7π， 选 D.

方法 2（几何法）：

可以将零点问题转化为函数图像的交点问题，令$f(x)=0$，则$\sin x=\sin3x$.在同一坐标系中画出函数$y=\sin x$和$y=\sin3x$的图像，如图所示，两个函数图像在区间$[0,2\pi]$有 7 个交点，以$f(x)$有 7 个零点，其中 3 个零点是0，π，2π，另外四个零点为图中的x_1，x_2，x_3，x_4，由对称性可知，

$x_1+x_2=\pi$， $x_3+x_4=3\pi$， 所以$f\left(x\right)$ 的所有零点之和等于7π

7. $f\left(x\right)=2\cos x\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=2\cos x\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sqrt{3}\sin x\cos x-\cos^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{2}$，由题意得：

$\sin\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x_2-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{6}>0$，当$x\in(0,\pi)$时，$2x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{11\pi}{6}\right)$，可知

$2x_1-\frac{\pi}{6}+2x_2-\frac{\pi}{6}=\pi$，$\therefore x_1+x_2=\frac{2\pi}{3}$，

$\therefore\cos(x_1-x_2)=\cos\left(x_1-\left(\frac{2\pi}{3}-x_1\right)\right)=\cos\left(2x_1-\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\left(2x_1-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(2x_1-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{6}$

8.函数$f(x)=2\sin(2x+\varphi)(|\varphi|<\frac{\pi}{2})$的图像向左平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度后，可得$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$的图象.由条件$y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}+\varphi\right)$为奇函数，则$\frac{\pi}{3}+\varphi=k\pi,k\in Z$，即$\varphi=k\pi-\frac{\pi}{3},k\in Z$，又$|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，所以$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，即$f(x)=2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$。关于$x$的方程$f(x)+g(x)=-2$在$[0,\pi]$内有两个不同的解$\alpha$，$\beta$，即

$2\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+(2+\sqrt{3})\cos 2x=-2$在$[0,\pi]$内有两个不同的解$\alpha$，$\beta$，即$\sin 2x+2\cos 2x=-2$在$[0,\pi]$内有两个不同的解$\alpha$，$\beta$，即$\frac{\sqrt{5}}{2}\sin(2x+\theta)=-1$，其中($\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\theta$为锐角) 在$[0,\pi]$内有两个不同的解$\alpha$，$\beta$，即方程即$\sin(2x+\theta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$在$[0,\pi]$内有两个不同的解$\alpha$，$\beta$，由$x\in[0,\pi]$，则

$2x+\theta\in[\theta,2\pi+\theta)$，所以$\sin(2\alpha+\theta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\sin(2\beta+\theta)=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，所以$\sin\theta=-\sin(2\alpha+\theta)=-\sin(2\beta+\theta)$

则$2\alpha+\theta=\pi+\theta,2\beta+\theta=2\pi-\theta$，即$2\alpha-2\beta=-\pi+2\theta$，所以$\alpha-\beta=-\frac{\pi}{2}+\theta$，

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)=\sin\theta=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

9．由题意知$\begin{cases}-\frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_1\pi\\ \frac{\pi}{3}\omega+\varphi=k_2\pi+\frac{\pi}{2}\end{cases}$，$k_1,k_2\in Z$，则$\begin{cases}\omega=\frac{3(2k+1)}{4}\\ \varphi=\frac{k'\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\end{cases}$，$k,k'\in Z$，其中$k=k_1-k_2$，

$k'=k_1+k_2=k+2k_1$，故k与k'同为奇数或同为偶数.$f(x)$在$\left(\frac{\pi}{15},\frac{\pi}{5}\right)$上有且只有一个最大，且要求$\omega$