

重难点突破 04 数列与不等式综合

一. 选择题 (共 6 小题)

1. (2023·江西模拟) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 8$, $a_4 = -1$. 记 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n (n = 1, 2, \cdots)$, 则数列 $\{T_n\}$ ()

- A. 有最大项, 有最小项 B. 有最大项, 无最小项
C. 无最大项, 有最小项 D. 无最大项, 无最小项

【解答】解: 根据题意, 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

若 $a_1 = 8$, $a_4 = -1$, 则 $q^3 = \frac{a_4}{a_1} = -\frac{1}{8}$, 解可得 $q = -\frac{1}{2}$,

则 $a_n = a_1 \times q^{n-1} = 8 \times (-\frac{1}{2})^{n-1} = (-1)^{n-1} \times 2^{4-n}$,

故 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \times 2^{\frac{n(7-n)}{2}}$,

分析可得: 当 n 为偶数时, T_n 为正, 当 $n = 4$ 时, $2^{\frac{n(7-n)}{2}}$ 最大, 此时 T_n 取得最大值,

当 n 为奇数时, T_n 为负, 当 $n = 3$ 时, $2^{\frac{n(7-n)}{2}}$ 最大, 此时 T_n 取得最小值,

故选: A.

2. (2023·海淀区校级三模) 已知等比数列 $\{a_n\}$, 对任意 $n \in N^*$, $a_n \cdot a_{n+1} > 0$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若存在一个常数 $M > 0$, 使得 $\forall n \in N^*$, $|S_n| < M$, 下列结论中正确的是 ()

- A. $\{a_n\}$ 是递减数列
B. $\{a_n\}$ 是递增数列
C. $\frac{S_n}{a_n} < 1$
D. 一定存在 $N_0 \in N^*$, 当 $n > N_0$ 时, $a_n < \frac{1}{100}$

【解答】解: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

对于 A: 假设 $a_1 = -\frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, 符合 $a_n \cdot a_{n+1} = a_n \cdot a_n q > 0$, 此时 $S_n = \frac{-\frac{1}{2}[1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} = -1 + \frac{1}{2^n}$,

重难点突破 04 数列与不等式综合

一. 选择题 (共 6 小题)

1. (2023·江西模拟) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 8$, $a_4 = -1$. 记 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n (n = 1, 2, \cdots)$, 则数列 $\{T_n\}$ ()

- A. 有最大项, 有最小项 B. 有最大项, 无最小项
C. 无最大项, 有最小项 D. 无最大项, 无最小项

【解答】解: 根据题意, 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

若 $a_1 = 8$, $a_4 = -1$, 则 $q^3 = \frac{a_4}{a_1} = -\frac{1}{8}$, 解可得 $q = -\frac{1}{2}$,

则 $a_n = a_1 \times q^{n-1} = 8 \times (-\frac{1}{2})^{n-1} = (-1)^{n-1} \times 2^{4-n}$,

故 $T_n = a_1 a_2 \cdots a_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \times 2^{\frac{n(7-n)}{2}}$,

分析可得: 当 n 为偶数时, T_n 为正, 当 $n = 4$ 时, $2^{\frac{n(7-n)}{2}}$ 最大, 此时 T_n 取得最大值,

当 n 为奇数时, T_n 为负, 当 $n = 3$ 时, $2^{\frac{n(7-n)}{2}}$ 最大, 此时 T_n 取得最小值,

故选: A.

2. (2023·海淀区校级三模) 已知等比数列 $\{a_n\}$, 对任意 $n \in N^*$, $a_n \cdot a_{n+1} > 0$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若存在一个常数 $M > 0$, 使得 $\forall n \in N^*$, $|S_n| < M$, 下列结论中正确的是 ()

- A. $\{a_n\}$ 是递减数列
B. $\{a_n\}$ 是递增数列
C. $\frac{S_n}{a_n} < 1$
D. 一定存在 $N_0 \in N^*$, 当 $n > N_0$ 时, $a_n < \frac{1}{100}$

【解答】解: 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ,

对于 A: 假设 $a_1 = -\frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$, 符合 $a_n \cdot a_{n+1} = a_n \cdot a_n q > 0$, 此时 $S_n = \frac{-\frac{1}{2}[1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} = -1 + \frac{1}{2^n}$,

故存在 $M=1$ ，对 $\forall n \in N^*$ ， $|S_n| = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$ ，

又数列 $\{a_n\}$ 是递增数列，故 A 错误；

对于 B ：假设 $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $q = \frac{1}{2}$ ，符合 $a_n \cdot a_{n+1} = a_n \cdot a_n q > 0$ ，此时 $S_n = \frac{\frac{1}{2}[1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$ ，

故存在 $M=1$ ，对 $\forall n \in N^*$ ， $|S_n| = 1 - \frac{1}{2^n} < 1$ ，

又数列 $\{a_n\}$ 是递减数列，故 B 错误；

对于 C ：由选项 B 得 $a_n = \frac{1}{2^n}$ ， $S_n = \frac{\frac{1}{2}[1 - (\frac{1}{2})^n]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$ ，

则 $\frac{S_n}{a_n} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n}} = 2^n - 1 > 1$ ，故 C 错误；

对于 D ：假设存在 $N_0 \in N^*$ ，当 $n > N_0$ 时， $a_n < \frac{1}{100}$ ，

则 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{N_0} + a_{N_0+1} + \dots + a_n < a_1 + a_2 + \dots + a_{N_0} + \frac{n - N_0}{100}$ ，

当 $n \rightarrow +\infty$ 时， $S_n \rightarrow +\infty$ ，这与 $M > 0$ ，使得 $\forall n \in N^*$ ， $|S_n| < M$ 矛盾，

故一定存在 $N_0 \in N^*$ ，当 $n > N_0$ 时， $a_n < \frac{1}{100}$ ，故 D 正确。

故选： D 。

3. (2023·全国二模) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \frac{1}{2n(n+1)}$ ，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，若

$T_n > \frac{n\lambda}{n^2 + 4n + 19}$ ($\lambda \in R$) 对任意 $n \in N^*$ 恒成立，则 λ 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 4)$

B. $(-\infty, 2\sqrt{5})$

C. $(-\infty, 5)$

D. $(-\infty, 6)$

【解答】解：Q $a_n = \frac{1}{2n(n+1)} = \frac{1}{2}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$ ，

$\therefore T_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{n}{2n+2}$ ，

$T_n > \frac{n\lambda}{n^2 + 4n + 19}$ ($\lambda \in R$) 对任意 $n \in N^*$ 恒成立，即 $\frac{n}{2n+2} > \frac{n\lambda}{n^2 + 4n + 19}$ ($\lambda \in R$) 对任意 $n \in N^*$

恒成立，

Q $n \in N^*$ ， $\therefore n^2 + 4n + 19 = (n+2)^2 + 15 > 0$ ，

$\therefore \lambda < \frac{n^2 + 4n + 19}{2n + 2}$ 对任意 $n \in N^*$ 恒成立,

$$\text{又 } \frac{n^2 + 4n + 19}{2n + 2} = \frac{(n+1)^2 + 2(n+1) + 16}{2(n+1)} = \frac{1}{2}(n+1) + \frac{8}{n+1} + 1 \leq 2\sqrt{\frac{1}{2}(n+1) \cdot \frac{8}{n+1}} + 1 = 5,$$

$\therefore \lambda < 5$, 即 $\lambda \in (-\infty, 5)$,

故选: C.

4. (2023·江苏模拟) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_{n+1} + 1 = 4a_n (n \in N^*)$, 则使得不

等式 $a_m + a_{m+1} + \dots + a_{m+k} - a_{m+1}S_k < 2023 (k \in N^*)$ 成立的正整数 m 的最大值为 ()

A. 9

B. 10

C. 11

D. 12

【解答】解: 已知 $S_{n+1} + 1 = 4a_n (n \in N^*)$,

当 $n=1$ 时, $S_2 + 1 = 4a_1$, 则 $a_2 = 3a_1 - 1$;

当 $n=2$ 时, $S_3 + 1 = 4a_2$, 则 $a_3 = 3a_2 - a_1 - 1 = 8a_1 - 4$;

因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $a_2^2 = a_1a_3$, 即 $(3a_1 - 1)^2 = a_1(8a_1 - 4)$,

整理得 $a_1^2 - 2a_1 + 1 = 0$, 解得 $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, 公比 $q = 2$,

所以 $a_n = 2^{n-1}$.

由不等式 $a_m + a_{m+1} + \dots + a_{m+k} - a_{m+1}S_k < 2023 (k \in N^*)$,

得 $2^{m-1} + 2^m + 2^{m+1} + \dots + 2^{m+k-1} - 2^m(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1}) < 2023$,

即 $2^{m+k} - 2^{m-1} - 2^m(2^k - 1) < 2023$,

整理得 $2^{m-1} < 2023$, 又 $2^{10} < 2023 < 2^{11}$,

所以 $2^{m-1} \leq 2^{10}$, 即 $m-1 \leq 10$, $m \leq 11$,

所以正整数 m 的最大值为 11.

故选: C.

5. (2023·鼓楼区校级模拟) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_n > 1 (n \in N^*)$, 点 (a_n, a_{n+1}) 在双曲线 $2y^2 - x^2 = 1$

上. 若 $a_{n+2} - a_{n+1} > \lambda(a_{n+1} - a_n)$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围为 ()

A. $[\frac{1}{2}, +\infty)$

B. $(\frac{1}{2}, +\infty)$

C. $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$

D. $(1, +\infty)$

【解答】解：由题意可知：双曲线 $2y^2 - x^2 = 1$ 的渐近线方程为 $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，

因为点 (a_n, a_{n+1}) 在双曲线 $2y^2 - x^2 = 1$ 上，

则 $2a_{n+1}^2 - a_n^2 = 1$ ，且 $a_n > 1 (n \in N^*)$ ，

可得 $a_{n+1}^2 - a_n^2 = 1 - a_{n+1}^2 < 0$ ，

可知 $\{a_n^2\}$ 为递减数列，且 $a_n > 1 (n \in N^*)$ ，

则 $\{a_n\}$ 为递减数列，

可得 $a_{n+1} - a_n < 0$ ，且 $a_{n+2} - a_{n+1} > \lambda(a_{n+1} - a_n)$ ，

可得 $\lambda > \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}$ ，

记点 $A_n(a_n, a_{n+1})$ ，

则 $\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}$ 为直线 $A_n A_{n+1}$ 的斜率，记 $k_n = \frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n}$ ，

由双曲线的性质以及 $\{a_n\}$ 为递减数列可知，直线 $A_n A_{n+1}$ 的斜率 $\{k_n\}$ 为递减数列，

即 $k_n > k_1$ ，且随着 a_1 增大，直线 $A_1 A_2$ 越接近渐近线 $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ ，

故 k_1 接近于 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

所以 $k_1 < \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

则 $\lambda \dots \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

故选：C。

6. (2023•江西模拟) 若正项递增等比数列 $\{a_n\}$ 满足： $\frac{1}{2} + a_2 - a_3 + \lambda(a_3 - a_4) = 0, \lambda \in R$ ，则

$a_4 + \lambda a_5$ 的最小值为()

A. $\sqrt{2}$

B. 2

C. $2\sqrt{2}$

D. 4

【解答】解：根据题意，设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，由于数列 $\{a_n\}$ 是正项递增等比数列，

则 $q > 1$ ，

由于 $\frac{1}{2} + a_2 - a_3 + \lambda(a_3 - a_4) = 0$ ，则有 $\frac{1}{2} + a_2 - a_3 + \lambda q(a_2 - a_3) = 0$ ，变形可得

$$1 + \lambda q = \frac{1}{2a_3 - 2a_2},$$

$$\text{则 } a_4 + \lambda a_5 = a_4(1 + \lambda q) = \frac{a_4}{2a_3 - 2a_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{q^2}{q-1} = \frac{1}{2} \left(q - 1 + \frac{1}{q-1} + 2 \right),$$

$$\text{又由 } q > 1, \quad q - 1 + \frac{1}{q-1} = 2\sqrt{(q-1) \times \frac{1}{q-1}} = 2, \text{ 当且仅当 } q = 2 \text{ 时等号成立,}$$

$$\text{故 } a_4 + \lambda a_5 = \frac{1}{2} \left(q - 1 + \frac{1}{q-1} + 2 \right) \dots \frac{1}{2} \times 2 + 1 = 2, \text{ 当且仅当 } q = 2 \text{ 时等号成立,}$$

即 $a_4 + \lambda a_5$ 的最小值为 2.

故选: B.

二. 多选题 (共 1 小题)

7. (2023·株洲一模) 已知各项均为正数的等差数列 $\{a_n\}$, 且 $a_{n+1} > a_n$, 则 ()

A. $a_3 + a_7 = a_4 + a_6$

B. $a_3 \cdot a_7 > a_4 \cdot a_6$

C. 数列 $\{a_{2n+1}\}$ 是等差数列

D. 数列 $\{a_{2n}\}$ 是等比数列

【解答】解: 根据题意, 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由于 $a_{n+1} > a_n$, 则 $d > 0$;

依次分析选项:

对于 A, 数列 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列, 则 $a_3 + a_7 = a_4 + a_6$, A 正确;

对于 B, $a_3 a_7 = (a_5 - 2d)(a_5 + 2d) = a_5^2 - 4d^2$, $a_4 a_6 = (a_5 - d)(a_5 + d) = a_5^2 - d^2$, 则

$a_3 \cdot a_7 < a_4 \cdot a_6$, B 错误;

对于 C, 数列 $\{a_{2n+1}\}$ 是等差数列 $\{a_n\}$ 中奇数项组成的数列, 则数列 $\{a_{2n+1}\}$ 是等差数列, C 正

确;

对于 D, $a_n = n$ 时, 数列 $\{a_{2n}\}$ 不是等比数列, D 错误;

故选: AC.

三. 填空题 (共 4 小题)

8. (2023·黑龙江一模) 已知数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = n^2$, 数列 $\{b_n\}$ 满足

$b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}, n \in \mathbb{N}, n \geq 1; T_n$ 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和. 若对任意的 $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, 不等式

$\lambda T_n < n + 9 \cdot (-1)^n$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围为 $(-\infty, -24)$.

【解答】解：当 $n=1$ 时， $a_1=S_1=1$ ；

当 $n \geq 2$ 时， $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$ ，

将 $n=1$ 代入上式，可得 $2 \times 1 - 1 = 1 = a_1$ ，则 $a_n=2n-1, (n \in N^*)$ ；

$$b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$T_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{n}{2n+1},$$

代入不等式 $\lambda T_n < n + 9 \cdot (-1)^n$ ，可得 $\lambda \frac{n}{2n+1} < n + 9 \cdot (-1)^n$ ，

整理可得 $\lambda < (2n+1) + 9 \cdot (-1)^n \cdot \frac{2n+1}{n}$ ，

当 n 为偶数时，不等式为 $\lambda < 2n+1 + 9 \cdot \frac{2n+1}{n} = 2n + \frac{9}{n} + 19$ ，

$$\text{令 } f(x) = 2x + \frac{9}{x} + 19, \quad f'(x) = 2 - \frac{9}{x^2} = \frac{2x^2 - 9}{x^2} = \frac{(\sqrt{2}x - 3)(\sqrt{2}x + 3)}{x^2},$$

当 $x \in (\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 时， $f'(x) > 0$ ，则 $f(x)$ 在 $(\frac{3\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ 上单调递增，

由于 $f(4) = 29.25 > 27.5 = f(2)$ ，故 $f(x)_{\min} = f(2) = 27.5$ ，此时 $\lambda < 27.5$ ；

当 n 为奇数时，不等式为 $\lambda < 2n+1 - 9 \cdot \frac{2n+1}{n} = 2n - \frac{9}{n} - 17$ ，

$$\text{令 } g(x) = 2x - \frac{9}{x} - 17, \quad (x \text{ 为奇数且 } x \in N^*),$$

易知 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增，则 $g(x)_{\min} = g(1) = -24$ ，此时 $\lambda < -24$ ，

综上所述，实数 λ 的取值范围为 $(-\infty, -24)$ 。

9. (2023·深圳模拟) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，满足： $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} (n \in N^*)$ ，且

a_3, a_7 为方程 $x^2 - 18x + 65 = 0$ 的两根，且 $a_7 > a_3$ 。若对于任意 $n \in N^*$ ，不等式

$2^n a_n (4 - \lambda) > (a_n - 1)^2$ 恒成立，则实数 λ 的取值范围为 $(-\infty, \frac{18}{5})$ 。

【解答】解：由 $2a_{n+1} = a_n + a_{n+2} (n \in N^*)$ 可知数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，设其公差为 d ，

解方程 $x^2 - 18x + 65 = 0$ 得 $x = 5$ 或 $x = 13$ ，又 $a_7 > a_3$ ，

$$\therefore a_3 = 5, \quad a_7 = 13,$$

$$\because a_7 - a_3 = 4d, \quad \therefore d = \frac{13 - 5}{4} = 2,$$

$$\therefore a_n = 5 + 2(n-3) = 2n-1,$$

由 $2^n a_n (4-\lambda) > (a_n-1)^2$ 得 $2^n (2n-1)(4-\lambda) > (2n-2)^2$,

$$\therefore 4-\lambda > \frac{(n-1)^2}{2^{n-2}(2n-1)}, \text{ 设 } b_n = \frac{(n-1)^2}{(2n-1) \cdot 2^{n-2}},$$

$$\text{则 } b_{n+1} - b_n = \frac{n^2}{(2n+1) \cdot 2^{n-1}} - \frac{(n-1)^2}{(2n-1) \cdot 2^{n-2}} = \frac{-2n^3 + 5n^2 - 2}{(4n^2-1) \cdot 2^{n-1}},$$

由 $(4n^2-1) \cdot 2^{n-1} > 0$ 对于任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 所以只考虑 $-2n^3 + 5n^2 - 2$ 的符号,

$$\text{设 } f(n) = -2n^3 + 5n^2 - 2(n-1), \quad f'(n) = -6n^2 + 10n = -2n(3n-5),$$

令 $f'(n) > 0$ 解得 $1, n < \frac{5}{3}$, 即 $f(n)$ 在 $1, n < \frac{5}{3}$ 上单调递增,

令 $f'(n) < 0$ 解得 $n > \frac{5}{3}$, 即 $f(n)$ 在 $n > \frac{5}{3}$ 上单调递减,

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = -11,$$

当 $n \geq 3$, $f(n) < 0$, $f(3) < 0$,

当 $n=1, n=2$ 时, $f(n) > 0$, 即 $b_{n+1} - b_n > 0$, $\therefore b_1 < b_2 < b_3$,

当 $n \geq 3$, $f(n) < 0$, 即 $b_{n+1} - b_n = \frac{-2n^3 + 5n^2 - 2}{(4n^2-1) \cdot 2^{n-1}} < 0$,

即从 $n \geq 3$, b_n 开始单调递减,

$$\text{即 } b_1, b_2, b_3 = \frac{2}{5},$$

$$\therefore 4-\lambda > \frac{2}{5}, \text{ 即 } \lambda < \frac{18}{5},$$

$\therefore \lambda$ 的取值范围为 $(-\infty, \frac{18}{5})$.

故答案为: $(-\infty, \frac{18}{5})$.

10. (2023·辽宁模拟) 已知数列 $\{a_n a_{n+1}\}$ 是以 2 为公比的等比数列, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, 记数列

$\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若不等式 $\frac{S_{2n+1} + 2}{4a_{2n}} > \frac{x-1}{x}$ 对任意 $x \in (0, 2023]$ 恒成立, 则 n 的最小值

为 9.

【解答】解: 由题知 $a_1 a_2 = 2$, 则 $a_n a_{n+1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$,

所以 $a_{n+1} a_{n+2} = 2^{n+1}$,

所以 $\frac{a_{n+2}}{a_n} = 2$,

所以数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列;

数列 $\{a_{2n}\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列,

$$\text{则 } S_{2n+1} = (a_1 + a_3 + \dots + a_{2n+1}) + (a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}) = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} + \frac{2(1-2^n)}{1-2} = 2^{n+2} - 3,$$

$$\text{因为 } a_{2n} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n, \text{ 则有 } \frac{S_{2n+1} + 2}{4a_{2n}} = \frac{2^{n+2} - 1}{2^{n+2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+2}},$$

$$\text{因为 } \frac{S_{2n+1} + 2}{4a_{2n}} > \frac{x-1}{x} \text{ 对任意 } x \in (0, 2023] \text{ 恒成立,}$$

$$\text{则只需 } 1 - \frac{1}{2^{n+2}} > \left(\frac{x-1}{x}\right)_{\max} \text{ 即可,}$$

$$\text{令 } f(x) = \frac{x-1}{x},$$

则 $f(x)$ 在区间 $(0, 2023]$ 上单调递增,

$$\text{所以 } f(x)_{\max} = f(2023) = \frac{2022}{2023},$$

$$\text{所以 } 1 - \frac{1}{2^{n+2}} > \frac{2022}{2023}, \text{ 即 } \frac{1}{2^{n+2}} < \frac{1}{2023}, \text{ 即 } 2^{n+2} > 2023,$$

解得 $n \geq 9$, 又 $n \in \mathbb{N}^*$,

所以 n 的最小值为 9.

故答案为: 9.

11. (2022 秋·沙坪坝区校级期末) 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = \frac{1}{3}[2^n - (-1)^n]$, $b_n = a_n a_{n+1}$, 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $b_n - \lambda S_n > 0$ 对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ 都成立, 则 λ 的取值范围是 $(-\infty, 1)$ ____.

$$\text{【解答】解: 由 } a_n = \frac{1}{3}[2^n - (-1)^n], \text{ 得 } b_n = a_n a_{n+1} = \frac{1}{9}[2^n - (-1)^n][2^{n+1} - (-1)^{n+1}],$$

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \frac{1}{3}\{(2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n) - [(-1) + (-1)^2 + \dots + (-1)^n]\} \\ &= \frac{1}{3}\left[2^{n+1} - 2 - \frac{(-1)^n - 1}{2}\right], \end{aligned}$$

$$\text{①当 } n \text{ 为正奇数时, } b_n - \lambda S_n = \frac{1}{9}(2^n + 1)(2^{n+1} - 1) - \frac{1}{3}\lambda(2^{n+1} - 1) > 0 \text{ 对任意 } n \in \mathbb{N}^* \text{ 都成立,}$$

$$\text{因为 } 2^{n+1} - 1 > 0, \text{ 所以 } \frac{1}{9}(2^n + 1) - \frac{\lambda}{3} > 0, \text{ 即 } \lambda < \frac{1}{3}(2^n + 1) \text{ 对任意正奇数 } n \text{ 都成立,}$$

又因为数列 $\{\frac{1}{3}(2^n+1)\}$ 递增,

所以当 $n=1$ 时, $\frac{1}{3}(2^n+1)$ 有最小值 1, 所以 $\lambda < 1$;

② 当 n 为正偶数时, $b_n - \lambda S_n = \frac{1}{9}(2^n-1)(2^{n+1}+1) - \frac{1}{3}\lambda(2^{n+1}-2) > 0$, 即

$\frac{1}{9}(2^n-1)(2^{n+1}+1) - \frac{2}{3}\lambda(2^n-1) > 0$ 对任意 $n \in N^*$ 都成立,

又因为 $2^n-1 > 0$, 所以 $\frac{1}{9}(2^{n+1}+1) - \frac{2}{3}\lambda > 0$, 即 $\lambda < \frac{1}{6}(2^{n+1}+1)$ 对任意正偶数 n 都成立,

又因为数列 $\{\frac{1}{6}(2^{n+1}+1)\}$ 递增,

所以当 $n=2$ 时, $\frac{1}{6}(2^{n+1}+1)$ 有最小值 $\frac{3}{2}$, 所以 $\lambda < \frac{3}{2}$;

综上所述, λ 的取值范围是 $(-\infty, 1)$.

故答案为: $(-\infty, 1)$.

四. 解答题 (共 19 小题)

12. (2023·沙坪坝区校级模拟) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差为 d , $d \neq 0$, 且

$$S_8 = 9a_4.$$

(1) 求 $\frac{a_1}{d}$;

(2) 若 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n} < 1$ 对任意 $n \in N^*$ 恒成立, 求 d 的取值范围.

【解答】解: (1) 由题意等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差为 d , $d \neq 0$, 且 $S_8 = 9a_4$,

$$\therefore S_8 = \frac{8(a_1 + a_8)}{2} = 4(a_4 + a_5) = 9a_4,$$

所以 $4a_5 = 5a_4$,

则 $4(a_1 + 4d) = 5(a_1 + 3d)$, 即 $a_1 = d$,

故 $\frac{a_1}{d} = 1$.

$$(2) S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = \frac{n(n+1)}{2}d, \frac{1}{S_n} = \frac{2}{d}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}),$$

所以 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n} = \frac{2}{d}(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{2}{d}(1 - \frac{1}{n+1}),$

而 $1 - \frac{1}{n+1} < 1$,

故 $\frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n} < 1$ 对任意 $n \in N^*$ 恒成立，

需 $\frac{2}{d} \geq 1$ ，即 $d < 0$ 或 $d \geq 2$ 。

所以 d 的取值范围为 $(-\infty, 0) \cup [2, +\infty)$ 。

13. (2023·包河区模拟) 如图的形状出现在南宋数学家杨辉所著的《详解九章算法·商功》中，后人称为“三角垛”。“三角垛”的最上层有 1 个球，第二层有 3 个球，第三层有 6 个球， $\dots$ 球数构成一个数列 $\{a_n\}$ ，满足 $a_n = a_{n-1} + n$ ， $n > 1$ 且 $n \in N^*$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求证： $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$ 。



【解答】解：(1) 因为 $a_n = a_{n-1} + n$ ， $n > 1$ ，所以 $a_n - a_{n-1} = n$ ， $n > 1$ ，

所以当 $n > 1$ 时， $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \dots + (a_2 - a_1) + a_1$

$$= n + (n-1) + \dots + 2 + 1 = \frac{n(n+1)}{2},$$

当 $n = 1$ 时，上式也成立，

$$\text{所以 } a_n = \frac{n(n+1)}{2};$$

(2) 证明：由 $\frac{1}{a_n} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$ ，

$$\text{所以 } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) < 2.$$

14. (2023·海口模拟) 记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，已知 $S_n = 2(a_n - 2^n + 1)$ 。

(I) 证明：数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是等差数列；

(II) 设 k 为实数，且对任意 $n \in N^*$ ，总有 $k > \frac{S_n - 2}{a_n}$ ，求 k 的最小值。

【解答】解：(1) 因为 $S_n = 2(a_n - 2^n + 1)$ ，所以 $S_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2^{n+1} + 1)$ ，

作差可得 $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$ ，变形可得： $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 1$ ，

由条件可得 $a_1 = 2(a_1 - 2 + 1)$ ，所以 $a_1 = 2$ ， $\therefore \frac{a_1}{2} = 1$ ，

所以数列 $\{\frac{a_n}{2^n}\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列。

(2) 由 (1) 得： $\frac{a_n}{2^n} = n$ ， $\therefore a_n = n \cdot 2^n$ ， $S_n - 2 = 2(a_n - 2^n) = (n-1) \cdot 2^{n+1}$ ，

$$\therefore \frac{S_n - 2}{a_n} = \frac{(n-1) \cdot 2^{n+1}}{n \cdot 2^n} = 2 - \frac{2}{n}，$$

$Q 2 - \frac{2}{n} < 2$ ， $\therefore$ 满足 $k > \frac{S_n - 2}{a_n}$ 的 k 的最小值为 2。

15. (2023·哈尔滨二模) 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1 = \frac{3}{5}$ ，且满足 $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 1}$ 。

(1) 求证：数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 为等比数列；

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \begin{cases} \frac{1}{a_n} - 3, n \text{ 为偶数时,} \\ \frac{n+2}{n} + \frac{n}{n+2}, n \text{ 为奇数时,} \end{cases}$ 求最小的实数 m ，使得

$b_1 + b_2 + \dots + b_{2k} < m$ 对一切正整数 k 均成立。

【解答】解：(1) 证明：由于 $a_{n+1} = \frac{3a_n}{2a_n + 1}$ ，则 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2a_n + 1}{a_n} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3a_n}$ ，

于是 $\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{3a_n} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}(\frac{1}{a_n} - 1)$ ，由于 $a_1 = \frac{3}{5}$ ，则 $\frac{1}{a_1} - 1 = \frac{2}{3}$ ，

故数列 $\left\{\frac{1}{a_n} - 1\right\}$ 是首项为 $\frac{2}{3}$ ，公比为 $\frac{1}{3}$ 等比数列；

(2) 由 (1) 知 $\frac{1}{a_n} - 1 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{2}{3^n}$ ，则 $b_n = \begin{cases} \frac{2}{3^n} - 2, n \text{ 为偶数} \\ \frac{n+2}{n} + \frac{n}{n+2}, n \text{ 为奇数} \end{cases}$ ，

由于 $\frac{n+2}{n} + \frac{n}{n+2} = 2 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+2}$ ，则

$$b_1 + b_2 + \dots + b_{2k}$$

$$= \left(\frac{2}{3^2} - 2\right) + \left(\frac{2}{3^4} - 2\right) + \dots + \left(\frac{2}{3^{2k}} - 2\right) + \left(2 + \frac{2}{1} - \frac{2}{3}\right) + \left(2 + \frac{2}{3} - \frac{2}{5}\right) + \dots + \left(2 + \frac{2}{2k-3} - \frac{2}{2k-1}\right)$$

$$= 2 \times \frac{\frac{1}{9}(1 - \frac{1}{9^k})}{1 - \frac{1}{9}} + 2 - \frac{2}{2k-1} = \frac{9}{4} - \frac{1}{4 \times 9^k} - \frac{2}{2k-1} < \frac{9}{4}，$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/238053071067006130>