

2025 二轮复习专项训练 13

三角函数的图象与性质

[考情分析] 高考必考内容, 重点考查三角函数的图象与性质及三角函数图象变换的正用、逆用, 多以选择题和填空题的形式考查, 也在解答题中出现, 难度中等.

【练前疑难讲解】

一、三角函数的图象及变换

图象变换

(先平移后伸缩)

$$y = \sin x \xrightarrow[\text{平移}|\varphi|\text{个单位长度}]{\text{向左}(\varphi > 0)\text{或向右}(\varphi < 0)} \longrightarrow$$

$$y = \sin(x + \varphi) \xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}(\omega > 0)\text{倍}} \longrightarrow$$

$$y = \sin(\omega x + \varphi) \xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A(A > 0)\text{倍}} \longrightarrow$$

$$y = A\sin(\omega x + \varphi).$$

(先伸缩后平移)

$$y = \sin x \xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{横坐标变为原来的}\frac{1}{\omega}(\omega > 0)\text{倍}} \longrightarrow$$

$$y = \sin \omega x \xrightarrow[\text{平移}\frac{|\varphi|}{\omega}\text{个单位长度}]{\text{向左}(\varphi \geq 0)\text{或向右}(\varphi < 0)} \longrightarrow$$

$$y = \sin(\omega x + \varphi) \xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{纵坐标变为原来的}A(A > 0)\text{倍}} \longrightarrow$$

$$y = A\sin(\omega x + \varphi).$$

二、三角函数的解析式

确定 $y = A\sin(\omega x + \varphi) + b (A > 0, \omega > 0)$ 的步骤和方法

(1) 求 A, b , 确定函数的最大值 M 和最小值 m ,

$$\text{则 } A = \frac{M - m}{2}, \quad b = \frac{M + m}{2}.$$

(2) 求 ω , 确定函数的最小正周期 T , 则可得 $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

(3) 求 φ , 常用的方法有: 五点法、特殊点法.

三、三角函数的性质

三角函数的常用结论

(1) $y = A\sin(\omega x + \varphi)$, 当 $\varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时为奇函数; 当 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 时为偶函数;

对称轴方程可由 $\omega x + \varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 求得.

(2) $y = A\cos(\omega x + \varphi)$, 当 $\varphi = k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 时为奇函数; 当 $\varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时为偶函数;

对称轴方程可由 $\omega x + \varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 求得.

(3) $y = A\tan(\omega x + \varphi)$, 当 $\varphi = k\pi (k \in \mathbf{Z})$ 时为奇函数.

一、单选题

1. (2023·全国·高考真题) 函数 $y = f(x)$ 的图象由函数 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到, 则 $y = f(x)$ 的图象与直线 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 的交点个数为 ()

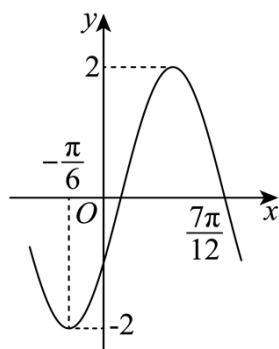
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. (2021·全国·高考真题) 下列区间中, 函数 $f(x) = 7\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ 单调递增的区间是 ()

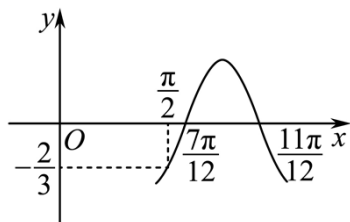
- A. $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ B. $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ C. $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ D. $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$

二、多选题

3. (2024·云南曲靖·一模) 函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $A > 0$, $\omega > 0$, $|\varphi| \leq \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 ()



- A. $f(0) = -1$
- B. 函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π
- C. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称
- D. 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度以后, 所得的函数图象关于原点对称
4. (2023·广东肇庆·二模) 函数 $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图像如图所示, $f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = f\left(\frac{11\pi}{12}\right) = 0, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{2}{3}$, 则下列选项中正确的有 ()



- A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{3}$
- B. $f\left(x + \frac{\pi}{12}\right)$ 是奇函数
- C. $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{5\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right] (k \in \mathbb{Z})$
- D. $f'\left(\frac{\pi}{12} - x\right) + f'\left(\frac{\pi}{12} + x\right) = 0$, 其中 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数

三、填空题

5. (2023·内蒙古包头·一模) 记函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$) 的最小正周期为

T . 若 $f\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, x = \frac{\pi}{8}$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 则 ω 的最小值为_____.

6. (23-24 高一下·河南周口·阶段练习) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若

$\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4}$ 且 $b^2 - a^2 = ac$, 则 $\tan A + \frac{1}{\tan B}$ 的取值范围为_____.

参考答案:

题号	1	2	3	4						
答案	C	A	AC	AD						

1. C

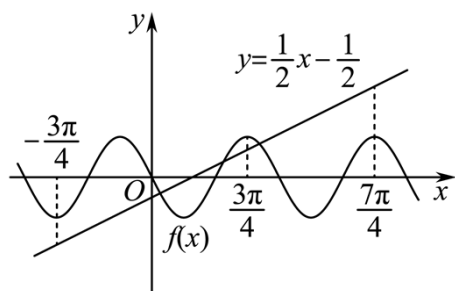
【分析】先利用三角函数平移的性质求得 $f(x) = -\sin 2x$, 再作出 $f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 的部分大致图像, 考虑特殊点处 $f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 的大小关系, 从而精确图像, 由此得解.

【详解】因为 $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位所得函数为

$$y = \cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{6}\right] = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x, \text{ 所以 } f(x) = -\sin 2x,$$

而 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 显然过 $\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ 与 $(1, 0)$ 两点,

作出 $f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 的部分大致图像如下,



考虑 $2x = -\frac{3\pi}{2}, 2x = \frac{3\pi}{2}, 2x = \frac{7\pi}{2}$, 即 $x = -\frac{3\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}$ 处 $f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 的大小关系,

当 $x = -\frac{3\pi}{4}$ 时, $f\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = -1$, $y = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} = -\frac{3\pi+4}{8} < -1$;

当 $x = \frac{3\pi}{4}$ 时, $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\frac{3\pi}{2} = 1$, $y = \frac{1}{2} \times \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{3\pi-4}{8} < 1$;

当 $x = \frac{7\pi}{4}$ 时, $f\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -\sin\frac{7\pi}{2} = 1$, $y = \frac{1}{2} \times \frac{7\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{7\pi-4}{8} > 1$;

所以由图可知, $f(x)$ 与 $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ 的交点个数为 3.

故选: C.

2. A

【分析】解不等式 $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{6} < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$, 利用赋值法可得出结论.

【详解】因为函数 $y = \sin x$ 的单调递增区间为 $\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2}\right) (k \in \mathbb{Z})$,

对于函数 $f(x) = 7\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$, 由 $2k\pi - \frac{\pi}{2} < x - \frac{\pi}{6} < 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$,

解得 $2k\pi - \frac{\pi}{3} < x < 2k\pi + \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$,

取 $k = 0$, 可得函数 $f(x)$ 的一个单调递增区间为 $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$,

则 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \not\subseteq \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, A 选项满足条件, B 不满足条件;

取 $k = 1$, 可得函数 $f(x)$ 的一个单调递增区间为 $\left(\frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right)$,

$\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \not\subseteq \left(-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 且 $\left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right) \not\subseteq \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right) \not\subseteq \left(\frac{5\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right)$, CD 选项均不满足条件.

件.

故选: A.

【点睛】方法点睛: 求较为复杂的三角函数的单调区间时, 首先化简成 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 形

式, 再求 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的单调区间, 只需把 $\omega x + \varphi$ 看作一个整体代入 $y = \sin x$

的相应单调区间内即可，注意要先把 ω 化为正数.

3. AC

【分析】利用图象求出函数 $f(x)$ 的解析式，代值计算可判断 A 选项；利用正弦型函数的周期性可判断 B 选项；利用正弦型函数的对称性可判断 C 选项；利用三角函数图象变换可判断 D 选项.

【详解】由图可知， $A = \frac{f(x)_{\max} - f(x)_{\min}}{2} = \frac{2 - (-2)}{2} = 2$,

函数 $f(x)$ 的最小正周期 T 满足 $\frac{3T}{4} = \frac{7\pi}{12} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\pi}{4}$ ，则 $T = \pi$ ， $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$ ，B 错；

所以， $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$ ，

$$f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left[2 \times \left(-\frac{\pi}{6}\right) + \varphi\right] = 2\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) = -2, \text{ 可得 } \sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right) = -1,$$

因为 $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ，所以， $-\frac{5\pi}{6} \leq \varphi - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{6}$ ，则 $\varphi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}$ ，可得 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ ，

所以， $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，则 $f(0) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -1$ ，A 对；

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2\sin\left(2 \times \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2 = f(x)_{\max},$$

所以，函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称，C 对；

将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度以后，

得到函数 $y = 2\sin\left[2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象，所得函数为非奇非偶函数，D 错.

故选：AC.

4. AD

【分析】根据题意可求得函数的周期，即可判断 A，进而可求得 ω ，再根据待定系数法可求得 φ, ω ，再根据三角函数的奇偶性可判断 B，根据余弦函数的单调性即可判断 C，求导计算即可判断 D.

【详解】解：由题意可得 $\frac{T}{2} = \frac{11\pi}{12} - \frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$ ，所以 $T = \frac{2\pi}{3}$ ，故 A 正确；

则 $\frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{3}$ ，所以 $\omega = 3$ ，

由 $f\left(\frac{7\pi}{12}\right) = A\cos\left(\frac{7\pi}{4} + \varphi\right) = 0$ ，得 $\cos\left(\frac{7\pi}{4} + \varphi\right) = 0$ ，

所以 $\frac{7\pi}{4} + \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 则 $\varphi = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

又 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{4}$,

则 $f(x) = A\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) (A > 0)$,

由 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = A\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}A = -\frac{2}{3}$, 得 $A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

所以 $f(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$,

则 $f\left(x + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\cos 3x$ 为偶函数, 故 B 错误;

令 $-\pi + 2k\pi \leq 3x - \frac{\pi}{4} \leq 2k\pi$, 得 $-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$,

所以 $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}, \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right] (k \in \mathbb{Z})$, 故 C 错误;

$f'(x) = -2\sqrt{2}\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$,

则 $f'\left(\frac{\pi}{12} - x\right) + f'\left(\frac{\pi}{12} + x\right) = -2\sqrt{2}\sin(-3x) - 2\sqrt{2}\sin 3x = 0$, 故 D 正确.

故选: AD.

5. 14

【分析】首先表示出 T , 根据 $f\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 求出 φ , 再根据 $x = \frac{\pi}{8}$ 为函数的极小值点, 即可

求出 ω 的取值, 从而得解;

【详解】解: 因为 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi) \left(\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$ 所以最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\omega}$,

$f\left(\frac{T}{2}\right) = \sin\left(\omega \cdot \frac{T}{2} + \varphi\right) = \sin(\pi + \varphi) = -\sin \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$

又 $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$ 所以 $\varphi = -\frac{\pi}{4}$, 即 $f(x) = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right)$;

又 $x = \frac{\pi}{8}$ 为 $f(x)$ 的极小值点, 所以 $\frac{\pi}{8}\omega - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, 解得 $\omega = -2 + 16k, k \in \mathbb{Z}$, 因为

$\omega > 0$, 所以当 $k = 1$ 时 $\omega_{\min} = 14$;

故答案为: 14

6. $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

【分析】根据 $b^2 - a^2 = ac$ 用余弦定理得到 $c - a = 2a\cos B$ ，再结合正弦定理化简得

$\sin(B - A) = \sin A$ ，从而可得 $B = 2A$ ，则 $\tan A + \frac{1}{\tan B}$ 化为 $\tan A + \frac{1}{\tan B} = \frac{1}{2} \left(\tan A + \frac{1}{\tan A} \right)$ ，利

用对勾函数单调性求解范围即可。

【详解】由余弦定理得 $a^2 + c^2 - b^2 = 2ac\cos B$ ，将 $b^2 - a^2 = ac$ 代入，则 $ac = c^2 - 2ac\cos B$ ，

故 $c - a = 2a\cos B$ ，又由正弦定理得 $\sin C - \sin A = 2\sin A\cos B$ ，且

$$\sin C = \sin(A + B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B,$$

整理得 $\sin(B - A) = \sin A$ ，因为 $A, B \in (0, \pi)$ ，故 $B - A = A$ 或 $B - A = \pi - A$ （舍去），

得 $B = 2A$ ，于是 $\tan A + \frac{1}{\tan B} = \tan A + \frac{1 - \tan^2 A}{2\tan A} = \frac{1}{2} \left(\tan A + \frac{1}{\tan A} \right)$ ，

由于 $\frac{\pi}{6} < A < \frac{\pi}{4}$ ，则 $\tan A \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right)$ ，而函数 $y = x + \frac{1}{x}$ 在 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1 \right)$ 上单调递增，

所以 $\tan A + \frac{1}{\tan A} \in \left(2, \frac{4\sqrt{3}}{3} \right)$ ，即 $\tan A + \frac{1}{\tan B} \in \left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$ 。

故答案为： $\left(1, \frac{2\sqrt{3}}{3} \right)$

【基础保分训练】

一、单选题

1. (2023·辽宁沈阳·模拟预测) 已知函数 $f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} (\omega \in \mathbf{R}), x \in \mathbf{R}$ 。若

$f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内没有零点，则 ω 的取值范围是 ()

- A. $\left(0, \frac{1}{4} \right]$ B. $\left[0, \frac{1}{4} \right]$ C. $\left[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right]$ D. $\left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right]$

2. (2024·北京·高考真题) 设函数 $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$ 。已知 $f(x_1) = -1$ ， $f(x_2) = 1$ ，且

$|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$ ，则 $\omega =$ ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

3. (2023·山西·一模) 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) (\omega \in \mathbf{N}^*)$ 满足在区间 $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$

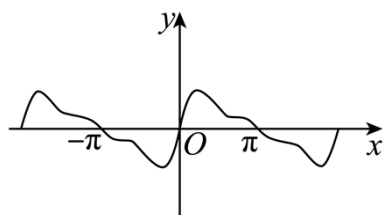
内恰有两个零点和一个极值点，则下列说法正确的是 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$
B. 将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后关于原点对称

C. $f(x)$ 图象的一个对称中心为 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$

D. $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 上单调递增

4. (2023·四川乐山·二模) 数学与音乐有着紧密的关联, 我们平时听到的乐音一般来说并不是纯音, 而是由多种波叠加而成的复合音. 如图为某段乐音的图像, 则该段乐音对应的函数解析式可以为 ()



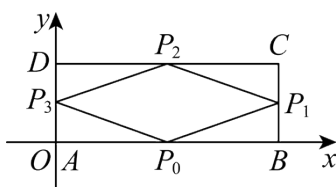
A. $y = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x$

B. $y = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \sin 3x$

C. $y = \sin x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$

D. $y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{3} \cos 3x$

5. (2024·安徽池州·模拟预测) 如图, 在长方形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $BC=1$, 从 AB 上的一点 P_0 发出的一束光沿着与 AB 夹角为 θ 的方向射到 BC 上的 P_1 点后, 依次反射到 CD 、 DA 上的 P_2 、 P_3 点, 最后回到 P_0 点, 则 $\tan \theta$ 等于 ()



A. $\frac{4}{7}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{3}{4}$

6. (2024·四川成都·模拟预测) 函数 $f(x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ 的最小正周期是 ()

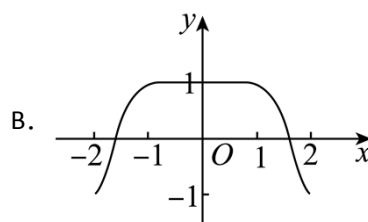
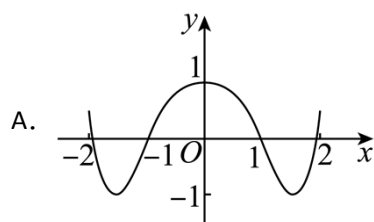
A. $\frac{\pi}{4}$

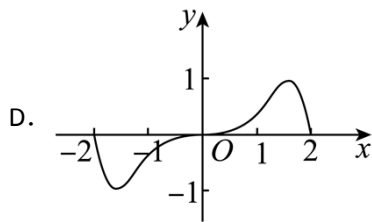
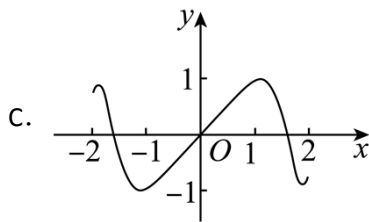
B. $\frac{\pi}{2}$

C. π

D. 2π

7. (2023·四川·模拟预测) 函数 $f(x) = \cos(e^x - e^{-x} - x)$ 在 $[-2, 2]$ 上的图象大致为 ()



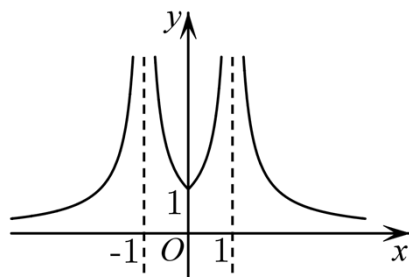


8. (2022·新疆·模拟预测) 我国著名数学家华罗庚曾说:“数缺形时少直观, 形缺数时难入微, 数形结合百般好, 隔裂分家万事休.”在数学的学习和研究中, 常用函数的图象来研究

函数的性质, 也常用函数的解析式来研究函数图象的特征. 我们从这个商标



中抽象出一个函数的图象如图, 其对应的函数解析式可能是 ()



A. $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$

B. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

C. $f(x) = \frac{1}{1 - \left| \tan \frac{\pi}{2} x \right|}$

D. $f(x) = \frac{1}{||x|-1|}$

9. (2023·河南新乡·二模) 已知函数 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x (\omega > 0)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 上存在零点, 且在 $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$ 上单调, 则 ω 的取值范围为 ()

A. $(2, 4]$

B. $\left[2, \frac{7}{2}\right]$

C. $\left[\frac{7}{3}, \frac{26}{9}\right]$

D. $\left[\frac{7}{3}, 4\right]$

10. (23-24 高一下·河南·阶段练习) 将函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) (\omega > 0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后与函数 $g(x) = \cos(\omega x)$ 的图象重合, 则 ω 的最小值为 ()

A. 7

B. 5

C. 9

D. 11

二、多选题

11. (2021·河北沧州·二模) 若关于 x 的方程 $2\sqrt{3}\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{3} - m$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上有且只有一个解, 则 m 的值可能为 ()

A. -2

B. -1

C. 0

D. 1

12. (2023·湖南郴州·一模) 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right) (0 < \omega < 2)$ 向左平移 $\frac{\pi}{6}$

个单位长度，得到函数 $g(x)$ 的图像，若 $g(x)$ 是偶函数，则 ()

- A. $g(x)$ 的最小正周期为 π
- B. 点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 是 $f(x)$ 图像的一个对称中心
- C. $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 的值域为 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$
- D. 函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增

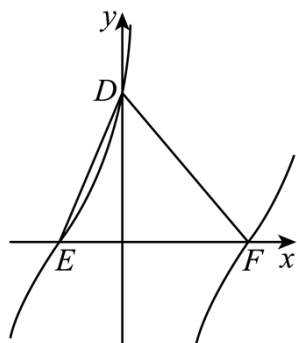
13. (2023·山西临汾·一模) 已知函数 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ ，则下列说法正确的有 ()

- A. $f(x)$ 的图象关于点 $\left(\frac{5\pi}{12}, 0\right)$ 中心对称
- B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \frac{\pi}{3}$ 对称
- C. $f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right]$ 上单调递减
- D. 将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，可以得到 $g(x) = \cos 2x$ 的图象

14. (2024·广西·模拟预测) 将函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，再把所得图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ ，纵坐标保持不变，得到函数 $g(x)$ 的图象，则关于 $g(x)$ 的说法正确的是 ()

- A. 最小正周期为 2π
- B. 偶函数
- C. 在 $\left(\frac{9}{4}\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$ 上单调递减
- D. 关于 $\left(\frac{2k-1}{8}\pi, 0\right) (k \in \mathbf{Z})$ 中心对称

15. (2021·福建·模拟预测) 如图所示，函数 $f(x) = \sqrt{3}\tan(2x + \varphi)$ ， $\left(|\varphi| < \frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象与坐标轴分别交于点 D ， E ， F ，且 $\triangle DEF$ 的面积为 $\frac{\pi}{4}$ ，以下结论正确的是 ()



- A. 点 D 的纵坐标为 $\sqrt{3}$

- B. $\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right)$ 是 $f(x)$ 的一个单调递增区间
- C. 对任意 $k \in \mathbb{Z}$, 点 $\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}, 0\right)$ 都是 $f(x)$ 图象的对称中心
- D. $f(x)$ 的图象可由 $y = \sqrt{3} \tan x$ 图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到

16. (23-24 高三上·重庆·期末) 下列函数中, 其图象关于点 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 对称的是 ()

- A. $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ B. $y = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ C. $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ D. $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$

三、填空题

17. (2023·北京海淀·一模) 已知函数 $f(x) = \sin(x + \varphi)$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$). 若 $f(x)$ 在区间 $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ 上单调递减, 则 φ 的一个取值可以为_____.

18. (22-23 高三下·上海松江·阶段练习) 已知函数 $f(x) = \sin 2x + 2\sqrt{3}\cos^2 x$, 则函数 $f(x)$ 的最小正周期是_____.

19. (2022·上海静安·一模) 函数 $y = \cos^2 x - 4\cos x + 1, x \in \mathbb{R}$, 当 y 取最大值时, x 的取值集合是_____.

20. (2023·上海虹口·一模) 设函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ (其中 $\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 若函数 $y = f(x)$ 图象的对称轴 $x = \frac{\pi}{6}$ 与其对称中心的最小距离为 $\frac{\pi}{8}$, 则 $f(x) =$ _____.

21. (2023·四川达州·一模) 已知函数 $f(x) = \ln \frac{x-2}{x+2} + \tan x + 3$, 则 $f(3) + f(-3)$ 的值为_____.

22. (2022·江西·模拟预测) 函数 $f(x) = \frac{2 \tan x}{1 + 2 \tan^2 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ 的最大值为_____.

参考答案:

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	D	B	D	A	C	C	A	D	C	D
题号	11	12	13	14	15	16				
答案	AC	BC	AC	BCD	BC	BCD				

1. D

【分析】利用三角恒等变换公式以及正弦函数的图象性质求解.

【详解】 $f(x) = \sin^2 \frac{\omega x}{2} + \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sin \omega x - \frac{1}{2} \cos \omega x = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{4}\right),$

若 $\omega \geq 0$ ，因为 $x \in (0, \pi)$ ，所以 $\omega x - \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{4}, \omega\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ ，

因为 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内没有零点，

所以 $\omega\pi - \frac{\pi}{4} \leq 0$ ，解得 $0 \leq \omega \leq \frac{1}{4}$ ；

若 $\omega < 0$ ，因为 $x \in (0, \pi)$ ，所以 $\omega x - \frac{\pi}{4} \in \left(\omega\pi - \frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}\right)$ ，

因为 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内没有零点，

所以 $\omega\pi - \frac{\pi}{4} \geq -\pi$ ，解得 $-\frac{3}{4} \leq \omega < 0$ ；

综上， $\omega \in \left[-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right]$ ，

故选：D.

2. B

【分析】根据三角函数最值分析周期性，结合三角函数最小正周期公式运算求解.

【详解】由题意可知： x_1 为 $f(x)$ 的最小值点， x_2 为 $f(x)$ 的最大值点，

则 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{T}{2} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $T = \pi$ ，

且 $\omega > 0$ ，所以 $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2$.

故选：B.

3. D

【分析】根据题意可求出 ω 的值，从而可得到 $f(x)$ 的解析式，再根据解析式逐项分析即可.

【详解】依题可知 $\frac{T}{2} < \frac{\pi}{3} < T$ ，于是 $3 < \omega < 6$ ，于是
$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq -\frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{3} < 0 \\ \pi < \frac{\pi\omega}{6} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$
，

$\therefore 4 < \omega \leq 5$ ， $\therefore \omega = 5$ ， $\therefore f(x) = 2\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$ ，

对于 A，由 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5}$ ，则 $f(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{5}$ ，故 A 错误；

对于 B，将 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得 $g(x) = 2\sin\left(5x + \frac{2\pi}{3}\right)$ ，

则 $g(0) = 2\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ ，所以 $g(x)$ 不关于原点对称，故 B 错误；

对于 C, 由 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -1$, 所以 $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 不是 $f(x)$ 图象的一个对称中心, 故 C 错误;

对于 D, 由 $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$, 则 $5x + \frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$, 所以 $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{\pi}{6}, 0\right)$ 上单调递增, 故 D 正确.

故选: D.

4. A

【分析】由图像可知, 该函数为奇函数, 根据奇偶函数的定义, 得出 A, B 为奇函数, 再根据函数图像中 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) > 0$, 判断出 A 对, B 错; 由图像得 $f(0) = 0$, 判断出 C, D 错误, 即可得出答案.

【详解】对于 A, 函数 $y = f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$,

因为 $f(-x) = -\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x = -f(x)$, 所以函数为奇函数,

又 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{3} > 0$, 故 A 正确;

对于 B, 函数 $y = f(x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin 2x - \frac{1}{3}\sin 3x$,

因为 $f(-x) = -\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x = -f(x)$, 所以函数为奇函数,

又 $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} < \frac{1.5}{3} - \frac{1}{2} = 0$, 故 B 错误;

对于 C, 函数 $y = f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$,

因为 $f(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \neq 0$, 故 C 错误;

对于 D, 函数 $y = f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$,

$f(0) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} \neq 0$, 故 D 错误,

故选: A.

5. C

【分析】记 $\angle P_1P_0B = \theta$, 设 $P_0B = m$, 由几何关系用 θ, m 逐个三角形推出

$P_3A = 1 - P_3D = 2 - (m+2)\tan\theta$, 再由 Rt $\triangle P_3AP_0$ 中 $P_0A + P_0B = 2$, $\therefore \frac{2}{\tan\theta} - (m+2) + m = 2$

，最终求出结果.

【详解】记 $\angle P_1 P_0 B = \theta$ ，根据对称性得到， $\angle P_1 P_2 C = \angle P_3 P_2 D = \angle P_3 P_0 A = \theta$ ，

设 $P_0 B = m$ ， $0 < m < 2$ ，

在 $\text{Rt}\triangle P_1 B P_0$ 中， $P_1 B = m \tan \theta$ ， $P_1 C = 1 - m \tan \theta$ ，

在 $\text{Rt}\triangle P_1 C P_2$ 中， $P_2 C = \frac{P_1 C}{\tan \theta} = \frac{1}{\tan \theta} - m$ ， $P_2 D = 2 - P_2 C = 2 - \frac{1}{\tan \theta} + m$ ，

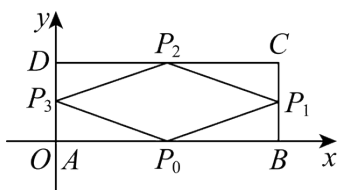
在 $\text{Rt}\triangle P_2 D P_3$ 中， $P_3 D = P_2 D \cdot \tan \theta = \left(2 + m - \frac{1}{\tan \theta}\right) \cdot \tan \theta = (m + 2) \tan \theta - 1$ ，

$P_3 A = 1 - P_3 D = 2 - (m + 2) \tan \theta$ ，

在 $\text{Rt}\triangle P_3 A P_0$ 中， $P_0 A = \frac{P_3 A}{\tan \theta} = \frac{2}{\tan \theta} - (m + 2)$ ，

由 $P_0 A + P_0 B = 2$ ， $\therefore \frac{2}{\tan \theta} - (m + 2) + m = 2$ ，得 $\tan \theta = \frac{1}{2}$ 。

故选：C



6. C

【分析】

借助正切函数的二倍角公式可得 $f(x) = \tan 2x$ ，结合函数定义域及正切型函数的周期性计算即可得.

【详解】 $f(x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \tan 2x$ ， $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，

又 $\tan x \neq \pm 1$ ，可得 $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，

即 $f(x) = \tan 2x$ ，且 $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ 、 $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k}{2}\pi (k \in \mathbb{Z})$ ，故 $T = \pi$ 。

故选：C.

7. A

【分析】首先判断函数的奇偶性，即可排除 C、D，再由特殊值排除 B，即可判断.

【详解】因为 $f(x) = \cos(e^x - e^{-x} - x)$ ， $x \in [-2, 2]$ ，

则 $f(-x) = \cos(e^{-x} - e^x + x) = f(x) = \cos(e^x - e^{-x} - x) = f(x)$ ，

所以 $f(x)$ 为偶函数, 函数图象关于 y 轴对称, 故排除 C、D;

又 $f(2) = \cos(e^2 - e^{-2} - 2)$, 由于 $\frac{3\pi}{2} < e^2 - e^{-2} - 2 < 2\pi$, 所以 $f(2) > 0$, 故排除 B;

故选: A

8. D

【分析】由定义域判断 A; 利用特殊函数值: $f(0)$ 、 $f(\frac{2}{3})$ 的符号判断 B、C; 利用奇偶性定义及区间单调性判断 D.

【详解】A: 函数的定义域为 $\{x | x \neq 1\}$, 不符合;

B: 由 $f(0) = \frac{1}{0-1} = -1$, 不符合;

C: 由 $f(\frac{2}{3}) = \frac{1}{1-\sqrt{3}} < 0$, 不符合;

D: $f(-x) = \frac{1}{|-x|-1} = \frac{1}{|x|-1} = f(x)$ 且定义域为 $\{x | x \neq \pm 1\}$, $f(x)$ 为偶函数,

在 $(0, 1)$ 上 $f(x) = \frac{1}{1-x}$ 单调递增, $(1, +\infty)$ 上 $f(x) = \frac{1}{x-1}$ 单调递减,

结合偶函数的对称性知: $(-1, 0)$ 上递减, $(-\infty, -1)$ 上递增, 符合.

故选: D

9. C

【分析】根据函数的零点和单调性求出 $2 < \omega \leq 4$, 从而可得 $\begin{cases} \frac{4\pi}{3} < \frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{3}, \\ \frac{11\pi}{6} < \frac{3\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{10\pi}{3}, \end{cases}$ 根据函数

数在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ 上单调, 即可求 ω 的取值范围.

【详解】 $f(x) = \sin \omega x + \sqrt{3} \cos \omega x = 2 \sin(\omega x + \frac{\pi}{3})$,

因为 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{3})$ 上存在零点, 所以 $\frac{\omega\pi}{3} + \frac{\pi}{3} > \pi$, 解得 $\omega > 2$.

又 $f(x)$ 在 $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$ 上单调, 所以 $\frac{T}{2} \geq \frac{\pi}{4}$, 即 $\frac{\pi}{\omega} \geq \frac{\pi}{4}$,

解得 $0 < \omega \leq 4$, 则 $2 < \omega \leq 4$,

则 $\begin{cases} \frac{4\pi}{3} < \frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{7\pi}{3}, \\ \frac{11\pi}{6} < \frac{3\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{10\pi}{3}, \end{cases}$ 则 $\begin{cases} \frac{\omega\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \geq \frac{3\pi}{2}, \\ \frac{3\omega\pi}{4} + \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{2} \end{cases}$ 解得 $\frac{7}{3} \leq \omega \leq \frac{26}{9}$.

故选: C.

10. D

【分析】求出 $y = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，根据 $f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos(\omega x)$ 可得 ω ，从而可求其最小值.

【详解】 $y = f\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left[\omega\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{3}\right)$,

$$\cos(\omega x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{2}\right), \quad k \in \mathbb{Z},$$

由题可知, $-\frac{\pi}{6}\omega + \frac{\pi}{3} = 2k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$, 解得 $\omega = -12k - 1, \quad k \in \mathbb{Z}$,

又 $\omega > 0$, $\therefore$ 当 $k = -1$ 时, ω 取得最小值 11.

故选: D.

11. AC

【分析】整理换元之后, 原问题转化为 $\cos t = -\frac{m}{2}$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有且只有一个解, 即

$y = \cos t$ 的图象和直线 $y = -\frac{m}{2}$ 只有 1 个交点. 作出简图, 数形结合可得结果.

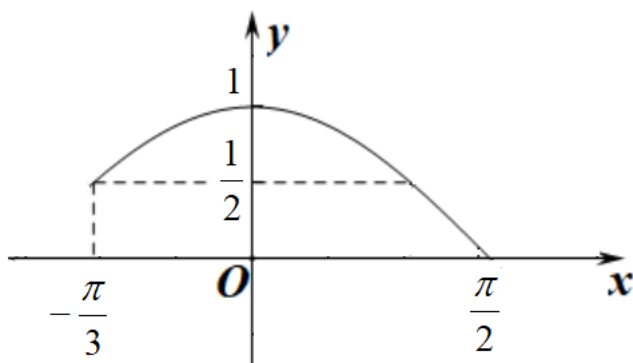
【详解】 $2\sqrt{3}\cos^2 x - \sin 2x = \sqrt{3} - m$ 整理可得 $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{m}{2}$,

令 $t = 2x + \frac{\pi}{6}$, 因为 $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$, 则 $t \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$.

所以 $\cos t = -\frac{m}{2}$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有且只有一个解, 即 $y = \cos t$ 的图象和直线 $y = -\frac{m}{2}$ 只有 1 个交点.

由图可知, $-\frac{m}{2} = 1$ 或 $0, -\frac{m}{2} < \frac{1}{2}$, 解得 $m = -2$ 或 $-1 < m, 0$.

故选: AC.



12. BC

【分析】

A 选项, 根据 $g(x)$ 为偶函数及 $0 < \omega < 2$, 得到 $\omega = 1$, 进而得到 A 错误; B 选项, 计算出

$f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 0$, B 正确; C 选项, 由 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 得到 $x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$, 从而结合图象求出值域; D

选项, 由 $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 得到 $x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{12}\right]$, 结合图象得到答案.

【详解】由题意得 $g(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$, $\frac{\omega\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

解得 $\omega = 1 + 6k, k \in \mathbb{Z}$,

因为 $0 < \omega < 2$, 所以只有当 $k = 0$, $\omega = 1$ 满足题意,

A 选项, $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x$, 故最小正周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi$, A 错误;

B 选项, $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 故 $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$,

故点 $\left(\frac{2\pi}{3}, 0\right)$ 是 $f(x)$ 图像的一个对称中心, B 正确;

C 选项, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 $x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$, 故 $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, C 正确;

D 选项, $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, 则 $x + \frac{\pi}{3} \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{12}\right]$, 由于 $y = \sin z$ 在 $z \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{12}\right]$ 上不单调,

故 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上不单调递增, D 错误.

故选: BC

13. AC

【分析】用余弦函数的图像与性质, 采用整体代入的思想对选项逐一判断即可.

【详解】由 $f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 可知, $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi$, 解得 $x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, 所以函数的对称中

心为 $\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, 0\right)$, $k \in \mathbb{Z}$ 故 A 选项正确;

令 $2x - \frac{\pi}{3} = k\pi$, 解得 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, 所以函数的对称轴为 $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$, 故 B 选项错误;

令 $2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \pi + 2k\pi$, 解得 $\frac{\pi}{6} + k\pi \leq x \leq \frac{2\pi}{3} + k\pi$, 所以函数的单调递减区间为

$\left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right], k \in \mathbb{Z}$, 故 C 选项正确;

将 $f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位得 $g(x) = \cos\left[2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3}\right] = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$, 故 D 选项错

误;

故选: AC

14. BCD

【分析】A 选项, 根据辅助角公式, 平移和伸缩变换得到 $g(x) = -2\cos 4x$, 从而得到

$T = \frac{2\pi}{|\omega|}$ 的最小正周期；B 选项，由函数奇偶性定义得到 B 正确；C 选项，由 $\frac{9\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{2}$ 得

到 $9\pi < 4x < 10\pi$ ，由整体法得到函数的单调性；D 选项， $g\left(\frac{2k-1}{8}\pi\right) = -2\cos\frac{2k-1}{2}\pi = 0$ ，

故 D 正确。

【详解】A 选项， $f(x) = \sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ，

$f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到

$$y = 2\sin\left[2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{\pi}{6}\right] = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos 2x,$$

再把所得图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ ，纵坐标保持不变，得到 $g(x) = -2\cos 4x$ ，

所以 $g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ ，A 错误；

B 选项， $g(x) = -2\cos 4x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$ ，且 $g(-x) = -2\cos(-4x) = -2\cos 4x$ ，

故 $g(x) = -2\cos 4x$ 是偶函数，B 正确；

C 选项，由 $\frac{9\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{2}$ 得 $9\pi < 4x < 10\pi$ ，

由于 $y = -2\cos z$ 在 $z \in (9\pi, 10\pi)$ 上单调递减，

所以 $g(x)$ 在 $\left(\frac{9}{4}\pi, \frac{5}{2}\pi\right)$ 上单调递减，C 正确；

D 选项， $g\left(\frac{2k-1}{8}\pi\right) = -2\cos\frac{2k-1}{2}\pi = 0$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，所以 D 选项正确。

故选：BCD。

15. BC

【分析】首先求出函数的周期，再根据 $\triangle DEF$ 的面积，求出 D 的纵坐标，即可求出函数解析式，再根据正切函数的性质一一判断即可；

【详解】解：因为 $f(x) = \sqrt{3}\tan(2x + \varphi)$ ，所以最小正周期 $T = \frac{\pi}{2}$ ，即 $EF = \frac{\pi}{2}$ ，又 $\triangle DEF$ 的

面积为 $\frac{\pi}{4}$ ，所以 $S_{\triangle DEF} = \frac{1}{2} \times EF \times OD = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \times OD = \frac{\pi}{4}$ ，所以 $OD = 1$ ，即 D 的纵坐标为 1，

故 A 错误；

因为 $f(0) = \sqrt{3}\tan \varphi = 1$ ，所以 $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，所以 $\varphi = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ，因为 $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$

所以 $\varphi = \frac{\pi}{6}$ ，所以 $f(x) = \sqrt{3}\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ ，令 $-\frac{\pi}{2} + k\pi < 2x + \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2} + k\pi$ ， $k \in \mathbf{Z}$ ，解得

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/238126054017007014>