

江苏省无锡市育才中学 2023-2024 学年高考数学五模试卷

考生请注意：

1. 答题前请将考场、试室号、座位号、考生号、姓名写在试卷密封线内，不得在试卷上作任何标记。
2. 第一部分选择题每小题选出答案后，需将答案写在试卷指定的括号内，第二部分非选择题答案写在试卷题目指定的位置上。
3. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

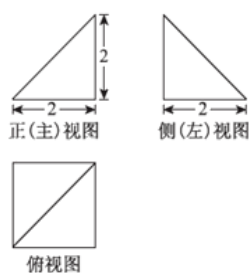
1. 现有甲、乙、丙、丁 4 名学生平均分成两个志愿者小组到校外参加两项活动，则乙、丙两人恰好参加同一项活动的概率为

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{6}$ D. $\frac{1}{12}$

2. 在 $\triangle ABC$ 中，“ $\cos A < \cos B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的（ ）

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充分必要条件 D. 既不充分也不必要条件

3. 某四棱锥的三视图如图所示，记 S 为此棱锥所有棱的长度的集合，则（ ）。



- A. $2\sqrt{2} \notin S$ ，且 $2\sqrt{3} \notin S$ B. $2\sqrt{2} \notin S$ ，且 $2\sqrt{3} \in S$
C. $2\sqrt{2} \in S$ ，且 $2\sqrt{3} \notin S$ D. $2\sqrt{2} \in S$ ，且 $2\sqrt{3} \in S$

4. 已知函数 $f(x) = \frac{k}{x} (k \in \mathbb{N}_+)$ ， $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x - 1}$ ，若对任意的 $c > 1$ ，存在实数 a, b 满足 $0 < a < b < c$ ，使得 $g(a) = f(b) = g(c)$ ，则 k 的最大值是（ ）

- A. 3 B. 2 C. 4 D. 5

5. 已知符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ $f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的减函数， $g(x) = f(x) - f(ax) (a > 1)$ ，则（ ）

- A. $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn} x$ B. $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn} x$
C. $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn}[f(x)]$ D. $\operatorname{sgn}[g(x)] = -\operatorname{sgn}[f(x)]$

6. 集合 $A = \{x | x > 2, x \in \mathbb{R}\}$ ， $B = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$ ，则 $A \cap B =$ （ ）

- A. $(3, +\infty)$ B. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(2, 3)$

7. 已知点 P 在椭圆 $\tau: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上, 点 P 在第一象限, 点 P 关于原点 O 的对称点为 A , 点 P 关于 x 轴的对称点为 Q , 设 $\overrightarrow{PD} = \frac{3}{4} \overrightarrow{PQ}$, 直线 AD 与椭圆 τ 的另一个交点为 B , 若 $PA \perp PB$, 则椭圆 τ 的离心率 $e =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 总体由编号为 01, 02, ..., 39, 40 的 40 个个体组成. 利用下面的随机数表选取 5 个个体, 选取方法是从随机数表

(如表) 第 1 行的第 4 列和第 5 列数字开始由左到右依次选取两个数字, 则选出来的第 5 个个体的编号为 ()

60	44	66	44	21
66	06	58	05	62
61	65	54	35	02
42	35	48	96	32

14	52	41	52	48
92	66	22	15	86
76	63	75	41	99
58	42	36	72	24

- A. 23 B. 21 C. 35 D. 32

9. 已知集合 $A = \{2, 3, 4\}$, 集合 $B = \{m, m+2\}$, 若 $A \cap B = \{2\}$, 则 $m =$ ()

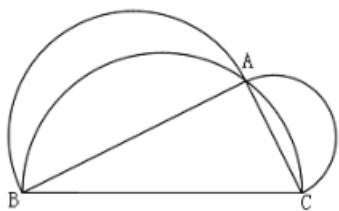
- A. 0 B. 1 C. 2 D. 4

10. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x) (x \in \mathbb{R})$ 的导函数, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) \ln x < -\frac{1}{x} f(x)$, 则使得 $(x^2 - 1)f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

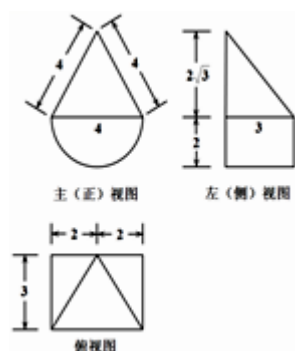
11. 如图是来自古希腊数学家希波克拉底所研究的几何图形, 此图由三个半圆构成, 三个半圆的直径分别为直角三角形 ABC 的斜边 BC , 直角边 AB, AC . 已知以直角边 AC, AB 为直径的半圆的面积之比为 $\frac{1}{4}$, 记 $\angle ABC = \alpha$, 则

$\sin 2\alpha =$ ()



- A. $\frac{9}{25}$ B. $\frac{12}{25}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

12. 一个几何体的三视图如图所示，则这个几何体的体积为（ ）



- A. $\frac{32\sqrt{3}}{3} + 6\pi$ B. $8\sqrt{3} + 6\pi$
C. $\frac{32\sqrt{3}}{3} + \frac{16\pi}{3}$ D. $8\sqrt{3} + \frac{16\pi}{3}$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 假如某人有壹元、贰元、伍元、拾元、贰拾元、伍拾元、壹佰元的纸币各两张，要支付贰佰壹拾玖（219）元的货款，则有_____种不同的支付方式.

14. 在平面直角坐标系 xOy 中，已知点 $A(-3, 0)$ ， $B(-1, -2)$ ，若圆 $(x-2)^2 + y^2 = r^2 (r > 0)$ 上有且仅有一对点 M, N ，使得 $\triangle MAB$ 的面积是 $\triangle NAB$ 的面积的 2 倍，则 r 的值为_____.

15. 函数 $f(x) = x^2 - x \ln x$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程为_____.

16. 在 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，且 $c=2, 2\sin A = \sin C$. 若 B 为钝角， $\cos 2C = -\frac{3}{4}$ ，则 $\triangle ABC$ 的面积为_____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中，把曲线 $C_1: \begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = 2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数) 上每个点的横坐标变为原来的 $\sqrt{3}$ 倍，纵坐标

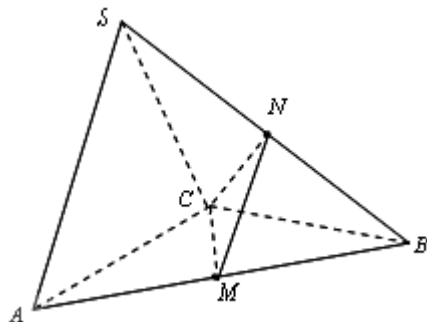
不变，得到曲线 C_2 . 以坐标原点为极点，以 x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C_3 的极坐标方程

$$\rho \sin(\theta - \frac{\pi}{4}) = 4\sqrt{2}.$$

(1) 写出 C_2 的普通方程和 C_3 的直角坐标方程；

(2) 设点 M 在 C_2 上，点 N 在 C_3 上，求 $|MN|$ 的最小值以及此时 M 的直角坐标.

18. (12分) 在三棱锥 $S-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形, 平面 $SAC \perp$ 平面 ABC , $SA = SC = 2$, M 、 N 分别为 AB 、 SB 的中点.

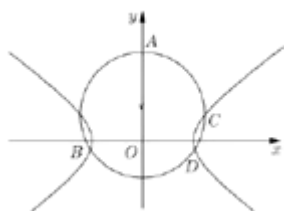


- (1) 证明: $AC \perp SB$;
- (2) 求三棱锥 $B-CMN$ 的体积.
19. (12分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 所对的边分别为 a , b , c , 若 $\vec{m} = (a, b-c)$, $\vec{n} = (\sin A - \sin B, \sin B + \sin C)$, $\vec{p} = (1, 2)$, 且 $\vec{m} \perp \vec{n}$.

- (1) 求角 C 的值;
- (2) 求 $\vec{n} \cdot \vec{p}$ 的最大值.
20. (12分) 已知函数 $f(x) = |x-2| - |x+1|$.
- (I) 解不等式 $f(x) > 1$;
- (II) 当 $x > 0$ 时, 若函数 $g(x) = \frac{ax^2 - x + 1}{x}$ ($a > 0$) 的最小值恒大于 $f(x)$, 求实数 a 的取值范围.

21. (12分) 在 $\triangle ABC$ 角中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别是 a 、 b 、 c , 若 $a \sin B = \sqrt{3} b \cos A$.

- (1) 求角 A ;
- (2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$, $a = 5$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.
22. (10分) 如图, 已知圆 $\Gamma_1: x^2 + \left(y - \frac{r}{2}\right)^2 = r^2$ ($r > 0$) 和双曲线 $\Gamma_2: x^2 - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($b > 0$), 记 Γ_1 与 y 轴正半轴、 x 轴负半轴的公共点分别为 A 、 B , 又记 Γ_1 与 Γ_2 在第一、第四象限的公共点分别为 C 、 D .



- (1) 若 $r = 2$, 且 B 恰为 Γ_2 的左焦点, 求 Γ_2 的两条渐近线的方程;

(2) 若 $r = 2$ ，且 $\overline{AC} + \overline{AD} = (m, -5)$ ，求实数 m 的值；

(3) 若 B 恰为 Γ_2 的左焦点，求证：在 x 轴上不存在这样的点 P ，使得 $|PA| - |PC| = 2.019$ 。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

求得基本事件的总数为 $n = \frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2} \times A_2^2 = 6$ ，其中乙丙两人恰好参加同一项活动的基本事件个数为 $m = C_2^2 C_2^2 A_2^2 = 2$ ，利

用古典概型及其概率的计算公式，即可求解。

【详解】

由题意，现有甲乙丙丁 4 名学生平均分成两个志愿者小组到校外参加两项活动，

基本事件的总数为 $n = \frac{C_4^2 C_2^2}{A_2^2} \times A_2^2 = 6$ ，

其中乙丙两人恰好参加同一项活动的基本事件个数为 $m = C_2^2 C_2^2 A_2^2 = 2$ ，

所以乙丙两人恰好参加同一项活动的概率为 $p = \frac{m}{n} = \frac{1}{3}$ ，故选 B。

【点睛】

本题主要考查了排列组合的应用，以及古典概型及其概率的计算问题，其中解答中合理应用排列、组合的知识求得基本事件的总数和所求事件所包含的基本事件的个数，利用古典概型及其概率的计算公式求解是解答的关键，着重考查了运算与求解能力，属于基础题。

2、C

【解析】

由余弦函数的单调性找出 $\cos A < \cos B$ 的等价条件为 $A > B$ ，再利用大角对大边，结合正弦定理可判断出“ $\cos A < \cos B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的充分必要条件。

【详解】

Q 余弦函数 $y = \cos x$ 在区间 $(0, \pi)$ 上单调递减，且 $0 < A < \pi$ ， $0 < B < \pi$ ，

由 $\cos A < \cos B$ ，可得 $A > B$ ， $\therefore a > b$ ，由正弦定理可得 $\sin A > \sin B$ 。

因此，“ $\cos A < \cos B$ ”是“ $\sin A > \sin B$ ”的充分必要条件。

故选：C。

【点睛】

本题考查充分必要条件的判定，同时也考查了余弦函数的单调性、大角对大边以及正弦定理的应用，考查推理能力，属于中等题。

3、D

【解析】

首先把三视图转换为几何体，根据三视图的长度，进一步求出个各棱长。

【详解】

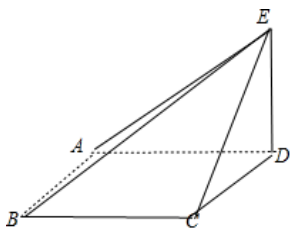
根据几何体的三视图转换为几何体为：该几何体为四棱锥体，

如图所示：

所以： $AB = BC = CD = AD = DE = 2$ ，

$AE = CE = 2\sqrt{2}$ ， $BE = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}$ 。

故选：D。



【点睛】

本题考查三视图和几何体之间的转换，主要考查运算能力和转换能力及思维能力，属于基础题。

4、A

【解析】

根据条件将问题转化为 $\frac{\ln x + 1}{x-1} > \frac{k}{x}$ ，对于 $x > 1$ 恒成立，然后构造函数 $h(x) = x \cdot \frac{\ln x + 1}{x-1}$ ，然后求出 $h(x)$ 的范围，进一步得到 k 的最大值。

【详解】

Q $f(x) = \frac{k}{x} (k \in \mathbb{N}_+)$ ， $g(x) = \frac{\ln x + 1}{x-1}$ ，对任意的 $c > 1$ ，存在实数 a, b 满足 $0 < a < b < c$ ，使得 $g(a) = f(b) = g(c)$ ，

$\therefore$ 易得 $g(c) = f(b) > f(c)$ ，即 $\frac{\ln c + 1}{c-1} > \frac{k}{c}$ 恒成立，

$\therefore \frac{\ln x + 1}{x - 1} > \frac{k}{x}$, 对于 $x > 1$ 恒成立,

设 $h(x) = x \cdot \frac{\ln x + 1}{x - 1}$, 则 $h'(x) = \frac{x - 2 - \ln x}{(x - 1)^2}$,

令 $q(x) = x - 2 - \ln x$, $\therefore q'(x) = 1 - \frac{1}{x} > 0$ 在 $x > 1$ 恒成立,

$Q q(3) = 3 - 2 - \ln 3 < 0$, $q(4) = 4 - 2 - \ln 4 > 0$,

故存在 $x_0 \in (3, 4)$, 使得 $q(x_0) = 0$, 即 $x_0 - 2 = \ln x_0$,

当 $x \in (1, x_0)$ 时, $q(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;

当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $q(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增.

$\therefore h(x)_{\min} = h(x_0) = \frac{x_0 \ln x_0 + x_0}{x_0 - 1}$, 将 $x_0 - 2 = \ln x_0$ 代入得:

$\therefore h(x)_{\min} = h(x_0) = \frac{x_0(x_0 - 2) + x_0}{x_0 - 1} = x_0$,

$Q k \in \mathbb{N}_+$, 且 $k < h(x)_{\min} = x_0$,

$\therefore k \leq 3$

故选: A

【点睛】

本题考查了利用导数研究函数的单调性, 零点存在定理和不等式恒成立问题, 考查了转化思想, 属于难题.

5、A

【解析】

根据符号函数的解析式, 结合 $f(x)$ 的单调性分析即可得解.

【详解】

根据题意, $g(x) = f(x) - f(ax)$, 而 $f(x)$ 是 R 上的减函数,

当 $x > 0$ 时, $x < ax$, 则有 $f(x) > f(ax)$, 则 $g(x) = f(x) - f(ax) > 0$, 此时 $\operatorname{sgn}[g(x)] = 1$,

当 $x = 0$ 时, $x = ax$, 则有 $f(x) = f(ax)$, 则 $g(x) = f(x) - f(ax) = 0$, 此时 $\operatorname{sgn}[g(x)] = 0$,

当 $x < 0$ 时, $x > ax$, 则有 $f(x) < f(ax)$, 则 $g(x) = f(x) - f(ax) < 0$, 此时 $\operatorname{sgn}[g(x)] = -1$,

综合有: $\operatorname{sgn}[g(x)] = \operatorname{sgn}(x)$;

故选: A.

【点睛】

此题考查函数新定义问题, 涉及函数单调性辨析, 关键在于读懂定义, 根据自变量的取值范围分类讨论.

6、A

【解析】

计算 $B = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ ，再计算交集得到答案.

【详解】

$$B = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\} = (-\infty, -1) \cup (3, +\infty), \quad A = \{x | x > 2, x \in R\}, \quad \text{故 } A \cap B = (3, +\infty).$$

故选：A.

【点睛】

本题考查了交集运算，属于简单题.

7、C

【解析】

设 $P(x_1, y_1)$ ，则 $A(-x_1, -y_1)$ ， $Q(x_1, -y_1)$ ， $D\left(x_1, -\frac{y_1}{2}\right)$ ，设 $B(x_2, y_2)$ ，根据 $PA \perp PB$ 化简得到 $3a^2 = 4c^2$ ，得到

答案.

【详解】

设 $P(x_1, y_1)$ ，则 $A(-x_1, -y_1)$ ， $Q(x_1, -y_1)$ ， $\overline{PD} = \frac{3}{4}\overline{PQ}$ ，则 $D\left(x_1, -\frac{y_1}{2}\right)$ ，设 $B(x_2, y_2)$ ，

$$\text{则 } \begin{cases} \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1 \\ \frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \quad \text{两式相减得到: } \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{a^2} = -\frac{(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)}{b^2},$$

$$k_{PB} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}, \quad k_{AD} = k_{AB}, \quad \text{即 } \frac{y_1}{4x_1} = \frac{y_1 + y_2}{x_1 + x_2}, \quad k_{PA} = \frac{y_1}{x_1} = \frac{4(y_1 + y_2)}{x_1 + x_2},$$

$$PA \perp PB, \quad \text{故 } k_{PA} \cdot k_{PB} = -1, \quad \text{即 } -4\frac{b^2}{a^2} = -1, \quad \text{故 } 3a^2 = 4c^2, \quad \text{故 } e = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

故选：C.

【点睛】

本题考查了椭圆的离心率，意在考查学生的计算能力和转化能力.

8、B

【解析】

根据随机数表法的抽样方法，确定选出来的第5个个体的编号.

【详解】

随机数表第 1 行的第 4 列和第 5 列数字为 4 和 6，所以从这两个数字开始，由左向右依次选取两个数字如下 46，64，42，16，60，65，80，56，26，16，55，43，50，24，23，54，89，63，21，...其中落在编号 01，02，...，39，40 内的有：16，26，16，24，23，21，...依次不重复的第 5 个编号为 21.

故选：B

【点睛】

本小题主要考查随机数表法进行抽样，属于基础题.

9、A

【解析】

根据 $m = 2$ 或 $m + 2 = 2$ ，验证交集后求得 m 的值.

【详解】

因为 $A \cap B = \{2\}$ ，所以 $m = 2$ 或 $m + 2 = 2$. 当 $m = 2$ 时， $A \cap B = \{2, 4\}$ ，不符合题意，当 $m + 2 = 2$ 时， $m = 0$. 故选

A.

【点睛】

本小题主要考查集合的交集概念及运算，属于基础题.

10、D

【解析】

构造函数，令 $g(x) = \ln x \cdot f(x) (x > 0)$ ，则 $g'(x) = \ln x f'(x) + \frac{f(x)}{x}$ ，

由 $f'(x) \ln x < -\frac{1}{x} f(x)$ 可得 $g'(x) < 0$ ，

则 $g(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的单调递减函数，

且 $g(1) = \ln 1 \times f(1) = 0$ ，

当 $x \in (0, 1)$ 时， $g(x) > 0$ ， $\therefore \ln x < 0, f(x) < 0, (x^2 - 1)f(x) > 0$ ；

当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $g(x) < 0$ ， $\therefore \ln x > 0, \therefore f(x) < 0, (x^2 - 1)f(x) < 0$

$\therefore f(x)$ 是奇函数，当 $x \in (-1, 0)$ 时， $f(x) > 0, (x^2 - 1)f(x) < 0$

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时， $f(x) > 0, (x^2 - 1)f(x) > 0$.

综上所述，使得 $(x^2 - 1)f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

本题选择 D 选项.

点睛：函数的单调性是函数的重要性质之一，它的应用贯穿于整个高中数学的教学之中。某些数学问题从表面上看似与函数的单调性无关，但如果我们能挖掘其内在联系，抓住其本质，那么运用函数的单调性解题，能起到化难为易、化繁为简的作用。因此对函数的单调性进行全面、准确的认识，并掌握好使用的技巧和方法，这是非常必要的。根据题目的特点，构造一个适当的函数，利用它的单调性进行解题，是一种常用技巧。许多问题，如果运用这种思想去解决，往往能获得简洁明快的思路，有着非凡的功效。

11、D

【解析】

由半圆面积之比，可求出两个直角边 AB, AC 的长度之比，从而可知 $\tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ ，结合同角三角函数的基本关系，即可求出 $\sin \alpha, \cos \alpha$ ，由二倍角公式即可求出 $\sin 2\alpha$ 。

【详解】

解：由题意知 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ ，以 AB 为直径的半圆面积 $S_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AB}{2}\right)^2$ ，

以 AC 为直径的半圆面积 $S_2 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{AC}{2}\right)^2$ ，则 $\frac{S_2}{S_1} = \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{1}{4}$ ，即 $\tan \alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2}$ 。

由 $\begin{cases} \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \\ \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1}{2} \end{cases}$ ，得 $\begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ ，所以 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{4}{5}$ 。

故选：D。

【点睛】

本题考查了同角三角函数的基本关系，考查了二倍角公式。本题的关键是由面积比求出角的正切值。

12、B

【解析】

还原几何体可知原几何体为半个圆柱和一个四棱锥组成的组合体，分别求解两个部分的体积，加和得到结果。

【详解】

由三视图还原可知，原几何体下半部分为半个圆柱，上半部分为一个四棱锥

半个圆柱体积为： $V_1 = \frac{1}{2}\pi r^2 h = \frac{1}{2}\pi \times 2^2 \times 3 = 6\pi$

四棱锥体积为： $V_2 = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \times 4 \times 3 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

原几何体体积为： $V = V_1 + V_2 = 8\sqrt{3} + 6\pi$

本题正确选项：B

【点睛】

本题考查三视图的还原、组合体体积的求解问题，关键在于能够准确还原几何体，从而分别求解各部分的体积.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/238132072006006063>