专题 02 函数与导数下的新定义

【题型归纳目录】

【方法技巧与总结】

1、函数与导数新定义问题主要分两类：一是概念新定义型，主要是以函数新概念为背景，通常考查考生对函数新概念的理解，涉及函数的三要素的理解；二是性质新定义型，主要是以函数新性质为背景，重点考查考生灵活应用函数性质的能力，涉及函数的各种相关性质的拓展延伸.

2、设 $P\left(x_1,y_1\right),Q\left(x_2,y_2\right)$ 为平面上两点，则定义 $\left|x_2-x_1\right|+\left|y_2-y_1\right|$ 为“折线距离”“直角距离”或“曼哈顿距离”，记作 $d(P,Q)=\left|x_2-x_1\right|+\left|y_2-y_1\right|$.

结论 1：设点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 为直线 $l:Ax+By+C=0$ 外一定点，Q 为直线 l 上的动点，则

$$d(P,Q)_{\min}=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\max\{|A|,|B|\}}$$

结论 2：设点 P 为直线 $Ax+By+C_1=0$ 上的动点，点 Q 为直线 $Ax+By+C_2=0$ 上的动点，则

$$d(P,Q)_{\min}=\frac{\left|C_1-C_2\right|}{\max\{|A|,|B|\}}.$$

【典型例题】

题型一：曲率与曲率半径问题

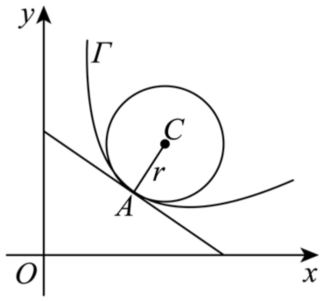
【典例 1-1】(2024·高三·重庆·阶段练习)定义：若 $h'(x)$ 是 $h(x)$ 的导数，$h''(x)$ 是 $h'(x)$ 的导数，则曲线 $y=h(x)$ 在点 $(x,h(x))$ 处的曲率 $K=\dfrac{\left|h''(x)\right|}{\left\{1+\left[h'(x)\right]^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$；已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$，$g(x)=x+(2a-1)\cos x,\left(a<\dfrac{1}{2}\right)$，曲线 $y=g(x)$ 在点 $(0,g(0))$ 处的曲率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$；

(1)求实数 a 的值；

(2)对任意 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},0\right],mf(x)\geq g'(x)$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

(3)设方程 $f(x)=g'(x)$ 在区间 $\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{3},2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\left(n\in\mathrm{N}^*\right)$ 内的根为 $x_1,x_2,\ldots,x_n$，…比较 x_{n+1} 与 $x_n+2\pi$ 的大小，并证明．

【典例 1-2】(2024·浙江温州·二模)如图，对于曲线 Γ，存在圆 C 满足如下条件：



①圆 C 与曲线 Γ 有公共点 A，且圆心在曲线 Γ 凹的一侧；

②圆 C 与曲线 Γ 在点 A 处有相同的切线；

③曲线 Γ 的导函数在点 A 处的导数(即曲线 Γ 的二阶导数)等于圆 C 在点 A 处的二阶导数(已知圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 在点 $A\left(x_0,y_0\right)$ 处的二阶导数等于 $\dfrac{r^2}{\left(b-y_0\right)^3}$)；

则称圆 C 为曲线 Γ 在 A 点处的曲率圆，其半径 r 称为曲率半径．

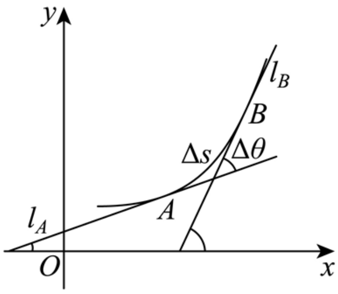
(1)求抛物线 $y=x^2$ 在原点的曲率圆的方程；

(2)求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 的曲率半径的最小值；

(3)若曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 在 $\left(x_1,\mathrm{e}^{x_1}\right)$ 和 $\left(x_2,\mathrm{e}^{x_2}\right)\left(x_1\neq x_2\right)$ 处有相同的曲率半径，求证：$x_1+x_2<-\ln 2$．

【变式 1-1】(2024·高三·浙江宁波·期末)在几何学常常需要考虑曲线的弯曲程度，为此我们需要刻画曲线的弯曲程度．考察如图所示的光滑曲线 C：$y=f\left(x\right)$ 上的曲线段 $\overset{\frown}{AB}$，其弧长为 Δs，当动点从 A 沿曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 运动到 B 点时，A 点的切线 l_A 也随着转动到 B 点的切线 l_B，记这两条切线之间的夹角为 $\Delta\theta$(它等于 l_B 的倾斜角与 l_A 的倾斜角之差)．显然，当弧长固定时，夹角越大，曲线的弯曲程度就越大；当夹角固定时，弧长越小则弯曲程度越大，因此可以定义 $\overline{K}=\left|\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|$ 为曲线段 $\overset{\frown}{AB}$ 的平均曲率；显然当 B 越接近 A，即 Δs 越

小，K 就越能精确刻画曲线 C 在点 A 处的弯曲程度，因此定义 $K=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\theta}{\Delta s}\right|=\dfrac{|y''|}{\left(1+y'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ (若极限存在)为曲线 C 在点 A 处的曲率．(其中 y'，y'' 分别表示 $y=f(x)$ 在点 A 处的一阶、二阶导数)

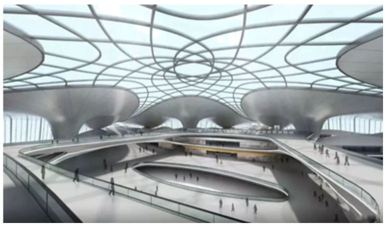


(1)求单位圆上圆心角为 60°的圆弧的平均曲率；

(2)求椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ 在 $\left(\sqrt{3},\dfrac{1}{2}\right)$ 处的曲率；

(3)定义 $\varphi(y)=\dfrac{2\sqrt{2}|y''|}{(1+y')^3}$ 为曲线 $y=f(x)$ 的“柯西曲率”．已知在曲线 $f(x)=x\ln x-2x$ 上存在两点 $P\left(x_1,f(x_1)\right)$ 和 $Q\left(x_2,f(x_2)\right)$，且 P，Q 处的“柯西曲率”相同，求 $\sqrt[3]{x_1}+\sqrt[3]{x_2}$ 的取值范围．

【变式 1-2】(2024·高三·辽宁·期中)用数学的眼光看世界就能发现很多数学之“美”．现代建筑讲究线条感，曲线之美让人称奇．衡量曲线弯曲程度的重要指标是曲率，曲线的曲率定义如下：若 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数，$f''(x)$ 是 $f'(x)$ 的导函数，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x,f(x)\right)$ 处的曲率 $K=\dfrac{|f''(x)|}{\left(1+\left[f'(x)\right]^2\right)^{\frac{3}{2}}}$．



(1)求曲线 $f(x)=\ln x+x$ 在 $(1,1)$ 处的曲率 K_1 的平方；

(2)求余弦曲线 $h(x)=\cos x(x\in\mathrm{R})$ 曲率 K_2 的最大值；

题型二：曼哈顿距离与折线距离

【典例 2-1】(2024·甘肃兰州·一模)定义：如果在平面直角坐标系中，点 A，B 的坐标分别为$\left(x_1, y_1\right)$，$\left(x_2, y_2\right)$，那么称$d(A,B)=\left|x_1-x_2\right|+\left|y_1-y_2\right|$为 A，B 两点间的曼哈顿距离．

(1)已知点N_1，N_2分别在直线$x-2y=0$，$2x-y=0$上，点$M\left(0,2\right)$与点N_1，N_2的曼哈顿距离分别为$d\left(M,N_1\right)$，$d\left(M,N_2\right)$，求$d\left(M,N_1\right)$和$d\left(M,N_2\right)$的最小值；

(2)已知点N是直线$x+k^2y+2k+1=0\left(k>0\right)$上的动点，点$M\left(0,2\right)$与点$N$的曼哈顿距离$d\left(M,N\right)$的最小值记为$f\left(k\right)$，求$f\left(k\right)$的最大值；

(3)已知点$M\left(\mathrm{e}^k,k\mathrm{e}^k\right)$，点$N(m,n)$($k$，$m$，$n\in\mathrm{R}$，e 是自然对数的底)，当$k\le1$时，$d\left(M,N\right)$的最大值为$f\left(m,n\right)$，求$f\left(m,n\right)$的最小值．

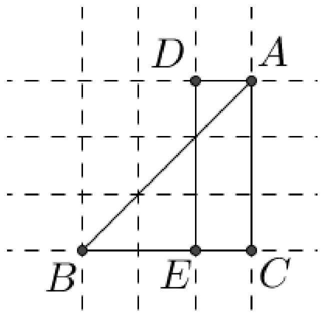
【典例 2-2】(2024·高三·广西防城港·阶段练习)若设$M\left(a,n\right)=\left|ax-1\right|+\left|ax-2\right|+\cdots+\left|ax-n\right|$为曼哈顿扩张距离，它由$n$个绝对值之和组成，其中$n$为正整数.如：

$M\left(2,6\right)=\left|2x-1\right|+\left|2x-2\right|+\left|2x-3\right|+\left|2x-4\right|+\left|2x-5\right|+\left|2x-6\right|$

(1)若$M\left(1,2\right)\le5$，求x的取值范围；

(2)若$M\left(3,2\right)\ge m$对一切实数x恒成立，设$a>0$，$b>0$，且$a^2+b^2=m+1$，求$2a+b$的最大值.

【变式 2-1】(2024·高三·北京·期中)“曼哈顿几何”也叫“出租车几何”，是在 19 世纪由赫尔曼·闵可夫斯基提出来的．如图是抽象的城市路网，其中线段$\left|AB\right|$是欧式空间中定义的两点最短距离，但在城市路网中，我们只能走有路的地方，不能“穿墙”而过，所以在“曼哈顿几何”中，这两点最短距离用$d\left(A,B\right)$表示，又称“曼哈顿距离”，即$d\left(A,B\right)=\left|AC\right|+\left|CB\right|$，因此“曼哈顿两点间距离公式”：若$A\left(x_1,y_1\right)$，$B\left(x_2,y_2\right)$，则$d\left(A,B\right)=\left|x_2-x_1\right|+\left|y_2-y_1\right|$



(1)①点 $A(3,5)$，$B(2,-1)$，求 $d(A,B)$ 的值.

②求圆心在原点，半径为 1 的“曼哈顿单位圆”方程.

(2)已知点 $B(1,0)$，直线 $2x-y+2=0$，求 B 点到直线的“曼哈顿距离”最小值;

(3)设三维空间 4 个点为 $A_i=(x_i,y_i,z_i)$，$i=1,2,3,4$，且 x_i，y_i，$z_i\in\{0,1\}$. 设其中所有两点“曼哈顿距离”的平均值即 $\overline{d}$，求 $\overline{d}$ 最大值，并列举最值成立时的一组坐标.

题型三：双曲正余弦函数问题

【典例 3-1】(2024·高三·江苏苏州·开学考试)定义：双曲余弦函数 $\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，双曲正弦函数 $\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

(1)求函数 $y=\cosh(2x)+\sinh(x)$ 的最小值;

(2)若函数 $f(x)=\log_9[\cosh(2x)-a\sinh(x)]$ 在 $\mathbf{R}$ 上的最小值为 -1，求正实数 a 的值;

(3)求证：对任意实数 k，关于 x 的方程 $\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=kx+\frac{1}{2}$ 总有实根.

【典例 3-2】(2024·高三·福建宁德·期末)固定项链的两端，在重力的作用下项链所形成的曲线是悬链线.1691 年，莱布尼茨等得出“悬链线”方程 $y=\frac{c(e^{\frac{x}{c}}+e^{-\frac{x}{c}})}{2}$，其中 c 为参数.当 $c=1$ 时，就是双曲余弦函数 $\cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，类似地我们可以定义双曲正弦函数 $\sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$.它们与正、余弦函数有许多类似的性质.

(1)类比正弦函数的二倍角公式，请写出双曲正弦函数的一个正确的结论: $\sinh 2x=$______________.(只写出即可，不要求证明);

(2) $\forall x\in[-1,1]$，不等式$\cosh 2x+m\cosh x\geq 0$恒成立，求实数m的取值范围；

(3)若$x\in[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{2}]$，试比较$\cosh(\sin x)$与$\sinh(\cos x)$的大小关系，并证明你的结论.

【变式 3-1】(2024·上海宝山·模拟预测)在数学中，双曲函数是与三角函数类似的函数，最基本的双曲函数是双曲正弦函数与双曲余弦函数，其中双曲正弦：$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$，双曲余弦函数：$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$，($e$是自然对数的底数).

(1)解方程：$\cosh(x)=2$；

(2)写出双曲正弦与两角和的正弦公式类似的展开式：$\sinh(x+y)=$________，并证明；

(3)无穷数列$\{a_n\}$，$a_1=a$，$a_{n+1}=2a_n^2-1$，是否存在实数a，使得$a_{2021}=\frac{5}{4}$？若存在，求出a的值，若不存在，说明理由.

【变式 3-2】(2024·高三·江苏盐城·期末)悬链线(*Catenary*)指的是一种曲线，指两端固定的一条(粗细与质量分布)均匀，柔软(不能伸长)的链条，在重力的作用下所具有的曲线形状，适当选择坐标系后，悬链线的方程是一个双曲余弦函数，其解析式为$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$，与之对应的函数$g(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$称为双曲正弦函数，令$F(x)=\frac{g(x)}{f(x)}$.

(1)若关于x的方程$F\left[f(2x)\right]+F\left[2\lambda g(x)-5\right]=0$在$(0,\ln 3)$上有解，求实数$\lambda$的取值范围；

(2)已知函数$h(x)=x^2-mx+4$，若对任意的$x_0\in\left[-2,2\right]$，总存在不同的$x_1,x_2\in[1,+\infty)$，使得$\frac{h(x_1)+h(x_2)}{x_1+x_2}=f(x_0)$成立，求实数$m$的取值范围.

题型四：凹凸函数

【典例 4-1】(2024·高三·湖南长沙·阶段练习)设连续函数 $f\left(x\right)$ 的定义域为 $\left[a,b\right]$，如果对于 $\left[a,b\right]$ 内任意两数 x_1,x_2，都有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$，则称 $f\left(x\right)$ 为 $\left[a,b\right]$ 上的凹函数；若 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\ge\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)}{2}$，则称 $f\left(x\right)$ 为凸函数.若 $f\left(x\right)$ 是区间 $\left[a,b\right]$ 上的凹函数，则对任意的 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\left[a,b\right]$，有琴生不等式 $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)\le\frac{f\left(x_1\right)+f\left(x_2\right)+\cdots+f\left(x_n\right)}{n}$ 恒成立(当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时等号成立).

(1)证明：$f\left(x\right)=\frac{1}{1-x}$ 在 $\left(0,1\right)$ 上为凹函数；

(2)设 $x_1,x_2,\cdots,x_n>0,n\ge2$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=1$，求 $W=\frac{x_1}{1-x_1}+\frac{x_2}{1-x_2}+\cdots+\frac{x_n}{1-x_n}$ 的最小值；

(3)设 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 为大于或等于 1 的实数，证明：$\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}+\cdots+\frac{1}{r_n+1}\ge\frac{n}{\sqrt[n]{r_1r_2\cdots r_n}+1}$.(提示：可设 $r_i=\mathrm{e}^{x_i}$)

【典例 4-2】(2024·高三·陕西安康·阶段练习)记函数 $f\left(x\right)$ 的导函数为 $f'\left(x\right)$，$f'\left(x\right)$ 的导函数为 $f''\left(x\right)$，设 D 是 $f\left(x\right)$ 的定义域的子集，若在区间 D 上 $f''\left(x\right)\le0$，则称 $f\left(x\right)$ 在 D 上是"凸函数".已知函数 $f\left(x\right)=a\sin x-x^2$.

(1)若 $f\left(x\right)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上为"凸函数"，求 a 的取值范围；

(2)若 $a=2$，判断 $g\left(x\right)=f\left(x\right)+1$ 在区间 $\left(0,\pi\right)$ 上的零点个数.

【变式 4-1】(2024·高三·广东东莞·阶段练习)记 $f''\left(x\right)=\left(f'\left(x\right)\right)'$，$f'\left(x\right)$ 为 $f\left(x\right)$ 的导函数.若对 $\forall x\in D$，$f''\left(x\right)>0$，则称函数 $y=f\left(x\right)$ 为 D 上的"凹函数".已知函数 $f\left(x\right)=\mathrm{e}^x-\frac{1}{3}x^3-ax^2-1$，$a\in\mathrm{R}$.

(1)若函数 $f\left(x\right)$ 为 R 上的凸函数，求 a 的取值范围；

(2)若函数 $y=f\left(x\right)$ 在 $\left(1,+\infty\right)$ 上有极值，求 a 的取值范围.

题型五：二元函数问题

【典例 5-1】(2024·高三·湖南·阶段练习)设A是有序实数对构成的非空集，B是实数集，如果对于集合A中的任意一个有序实数对$\left(x,y\right)$，按照某种确定的关系f，在B中都有唯一确定的数z和它对应，那么就称$f:A\to B$为从集合A到集合B的一个二元函数，记作$z=f\left(x,y\right),\left(x,y\right)\in A$，其中A称为二元函数$f$的定义域.

(1)已知$f\left(x,y\right)=\sqrt{x^2+y^2},\vec{a}=\left(x_1,y_1\right),\vec{b}=\left(x_2,y_2\right)$，若$f\left(\vec{a}\right)=1,f\left(\vec{b}\right)=2,x_1x_2+y_1y_2=1$，求$f\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$;

(2)非零向量$u=\left(x_0,y_0\right)$，若对任意的$\left(x,y\right)\in D,D\subseteq A,h>0$，记$\vec{a}=\left(x,y\right)$，都有$f\left(\vec{a}\right)<f\left(\vec{a}+hu\right)$，则称$f$在$D$上沿$u$方向单调递增.已知$f\left(x,y\right)=\mathrm{e}^{x+y}+\mathrm{e}^{x-y},x\in\mathrm{R},y\in\mathrm{R}$.请问$f$在$\left\{\left(x,y\right)\mid x,y\in\mathrm{R}\right\}$上沿向量$\left(1,1\right)$方向单调递增吗？为什么？

(3)设二元函数f的定义域为D，如果存在实数M满足：

①$\forall\left(x,y\right)\in D$，都有$f\left(x,y\right)\geq M$，

②$\exists\left(x_0,y_0\right)\in D$，使得$f\left(x_0,y_0\right)=M$.

那么，我们称M是二元函数f的最小值.求

$f\left(x,y\right)=y+\sin2x+\left(\dfrac{1}{y}-y\right)\cos^2x,\left(x,y\right)\in\left\{\left(x,y\right)\middle|x\in\mathrm{R},\dfrac{1}{2}\leq y\leq2\right\}$的最大值.

【典例 5-2】(2024·江苏盐城·模拟预测)根据多元微分求条件极值理论，要求二元函数$z=f(x,y)$在约束条件$g(x,y)$的可能极值点，首先构造出一个拉格朗日辅助函数$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda g(x,y)$，其中$\lambda$为拉格朗日系数．分别对$L(x,y,\lambda)$中的$x,y,\lambda$部分求导，并使之为0，得到三个方程组，如下：

$\begin{cases}L_x(x,y,\lambda)=f_x(x,y)+\lambda g_x(x,y)=0\\L_y(x,y,\lambda)=f_y(x,y)+\lambda g_y(x,y)=0\\L_\lambda(x,y,\lambda)=g(x,y)=0\end{cases}$，解此方程组，得出解$(x,y)$，就是二元函数$z=f(x,y)$在约束条件$g(x,y)$的可能极值点．$x,y$的值代入到$f(x,y)$中即为极值.

补充说明：【例】求函数$f(x,y)=x^2+xy+y^2$关于变量x的导数．即：将变量y当做常数，即：$f_x(x,y)=2x+y$，下标加上x，代表对自变量x进行求导．即拉格朗日乘数法方程组之中的L_x,L_y,L_λ表示分别对x,y,λ进行求导.

(1)求函数$f(x,y)=x^2y^2+2xy+xy^2$关于变量y的导数并求当$x=1$处的导数值.

(2)利用拉格朗日乘数法求：设实数x,y满足$g(x,y)=4x^2+y^2+xy-1=0$，求$f(x,y)=2x+y$的最大值.

(3)①若x,y,z为实数，且$x+y+z=1$，证明：$x^2+y^2+z^2\geq\dfrac{1}{3}$.

②设$a>b>c>0$，求$2a^2+\frac{1}{ab}+\frac{1}{a(a-b)}-10ac+25c^2$的最小值.

【变式 5-1】(2024·全国·模拟预测)已知变量x，y，z，当x，y在某范围D内任取一组确定的值时，若变量z按照一定的规律f，总有唯一确定的x，y与之对应，则称变量z为变量x，y的二元函数，记作$z=f\left(x,y\right)$．已知二元函数$f\left(x,y\right)=2x+\frac{1}{y}\left(y\neq 0\right)$.

(1)若$xy>0$，求$f\left(x,y\right)\cdot f\left(\frac{1}{x},\frac{1}{y}\right)$的最小值.

(2)对任意实数x，不等式$\left|f\left(x,a\right)\right|+\left|f\left(x,2a\right)\right|\geq a$恒成立，求实数$a$的取值范围.

题型六：切线函数新定义

【典例 6-1】(2024·全国·模拟预测)已知函数$f\left(x\right)=x\ln\left(ax\right)\left(a>0\right)$，设函数$f\left(x\right)$的导函数为$g\left(x\right)$，若函数$f\left(x\right)$和$g\left(x\right)$的图象在$x=x_0$处的两条切线$l_1$和$l_2$平行，则称$x_0$为函数$f\left(x\right)$和$g\left(x\right)$的“关联切点”.

(1)证明：对于任意的正实数a，函数$f\left(x\right)$和$g\left(x\right)$的“关联切点”有且只有一个；

(2)若两条切线l_1和l_2之间的距离为 1，证明：$\frac{3}{5\mathrm{e}^{\frac{2}{5}}}<a<\frac{2}{3\mathrm{e}^{\frac{1}{3}}}$(其中 e 为自然对数的底数).

【典例 6-2】(2024·河南新乡·二模)定义：若函数$f\left(x\right)$图象上恰好存在相异的两点P，Q满足曲线$y=f\left(x\right)$在P和Q处的切线重合，则称P，Q为曲线$y=f\left(x\right)$的“双重切点”，直线PQ为曲线$y=f\left(x\right)$的“双重切线”.

(1)直线$y=2x$是否为曲线$f\left(x\right)=x^3+\frac{1}{x}$的“双重切线”，请说明理由；

(2)已知函数$g\left(x\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^x-\frac{2}{\mathrm{e}},x\leq 0,\\ \ln x,x>0,\end{cases}$求曲线$y=g\left(x\right)$的“双重切线”的方程；

(3)已知函数$h\left(x\right)=\sin x$，直线PQ为曲线$y=h\left(x\right)$的“双重切线”，记直线PQ的斜率所有可能的取值为k_1，

k_2，…，k_n，若 $k_1>k_2>k_i\,(i=3,4,5,\cdots,n)$，证明：$\frac{k_1}{k_2}<\frac{15}{8}$．

【变式 6-1】(2024·高三·上海浦东新·阶段练习)设函数 $y=f\left(x\right)$ 的定义域为开区间 I，若存在 $x_0\in I$，使得 $y=f\left(x\right)$ 在 $x=x_0$ 处的切线 l 与 $y=f\left(x\right)$ 的图像只有唯一的公共点，则称 $y=f\left(x\right)$ 为“L 函数”，切线 l 为一条“L 切线”.

(1)判断 $y=x-1$ 是否是函数 $y=\ln x$ 的一条“L 切线”，并说明理由；

(2)设 $g\left(x\right)=\mathrm{e}^{2x}-6x$，求证：$y=g\left(x\right)$ 存在无穷多条“L 切线”；

(3)设 $f\left(x\right)=x^3+ax^2+1\left(0<x<c\right)$，求证：对任意实数 a 和正数 c，$y=f\left(x\right)$ 都是“L 函数”

【变式 6-2】(2024·高三·上海·期中)设 P 是坐标平面 xOy 上的一点，曲线 Γ 是函数 $y=f\left(x\right)$ 的图像．若过点 P 恰能作曲线 Γ 的 $k\left(k\in\mathrm{N}\right)$ 条切线，则称 P 是函数 $y=f\left(x\right)$ 的“k 度点”.

(1)判断点 $O\left(0,0\right)$ 是否为函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的 1 度点，请说明理由；

(2)若点 $\boldsymbol{B}\left(-\frac{\pi}{2},\pi\right)$ 是 $\boldsymbol{g}\left(\boldsymbol{x}\right)=\cos\boldsymbol{x},-\frac{\pi}{2}<\boldsymbol{x}<\frac{\pi}{2}$ 的“k 度点”，求自然数 k 的值；

(3)求函数 $y=x^3+x$ 的全体 2 度点构成的集合.

题型七：非典型新定义函数

【典例 7-1】(2024·高三·广东佛山·阶段练习)若对实数 x_0，函数 $f\left(x\right)$、$g\left(x\right)$ 满足 $f\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)$，且 $f'\left(x_0\right)=g'\left(x_0\right)$，则称 $F\left(x\right)=\begin{cases}f\left(x\right),x<x_0\\g\left(x\right),x\geq x_0\end{cases}$ 为“平滑函数”，x_0 为该函数的“平滑点”已知 $f\left(x\right)=ax^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x$，$g\left(x\right)=bx\ln x$.

(1)若 1 是平滑函数 $F\left(x\right)$ 的“平滑点”，

(ⅰ)求实数 a，b 的值；

(ⅱ)若过点$P(2,t)$可作三条不同的直线与函数$y=F(x)$的图象相切，求实数t的取值范围；

(2)判断是否存在$a>1$，使得对任意$b>0$，函数$F(x)$存在正的“平滑点”，并说明理由．

【典例7-2】(2024·高三·上海·期中)已知定义域为$\mathbf{R}$的函数$y=f(x)$．当$a\in\mathbf{R}$时，若$g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}(x>a)$是严格增函数，则称$f(x)$是一个“$T(a)$函数”．

(1)判断函数$f_1(x)=5x+3$是否为$T(1)$函数；

(2)是否存在实数b，使得函数$h(x)=\begin{cases}e^x,x<0,\\bx+1,x\geq 0,\end{cases}$是$T(-1)$函数？若存在，求实数$b$的取值范围；否则，证明你的结论；

(3)已知$J(x)=e^x(qx^2+1)$，其中$q\in\mathbf{R}$，证明：若$J'(x)$是$\mathbf{R}$上的严格增函数，则对任意$n\in\mathbf{Z}$，$J(x)$都是$T(n)$函数．

【变式7-1】(2024·高三·上海普陀·阶段练习)给出下列两个定义：

I.对于函数$y=f(x)$，定义域为D，且其在D上是可导的，若其导函数定义域也为D，则称该函数是“同定义函数”.

II.对于一个“同定义函数”$y=f(x)$，若有以下性质：

①$f'(x)=g(f(x))$；②$f(x)=h(f'(x))$，其中$y=g(x),y=h(x)$为两个新的函数，$y=f'(x)$是$y=f(x)$的导函数.

我们将具有其中一个性质的函数$y=f(x)$称之为“单向导函数”，将两个性质都具有的函数$y=f(x)$称之为“双向导函数”，将$y=g(x)$称之为“自导函数”.

(1)判断函数$y=\tan x$和$y=\ln x$是“单向导函数”，或者“双向导函数”，说明理由.如果具有性质①，则写出其对应的“自导函数”；

(2)已知命题$p:y=f(x)$是“双向导函数”且其“自导函数”为常值函数，命题$q:f(x)=k\cdot a^x(k\in\mathbf{R},a>0,a\neq 1)$.判断命题$p$是$q$的什么条件，证明你的结论；

(3)已知函数$f(x)=(x^a-b)e^x$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：https://d.book118.com/238136067141007001