重庆市七校联盟 2024 届高三下学期三诊考试

数学试题

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分．满分 150 分，考试时间 120 分钟．

注意事项：

1．答题前，务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡规定的位置上．

2．答选择题时，必须使用 2B 铅笔将答题卡上对应题目的答案标号涂黑．

3．答非选择题时，必须使用 0.5 毫米黑色签字笔，将答案书写在答题卡规定的位置上．

4．考试结束后，将答题卷交回．

第 I 卷（选择题共 58 分）

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1. 已知集合 $A=\left\{x\in \mathrm{N} \mid x^2-4x-5\le 0\right\}, B=\left\{0,1,2\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{x|1\le x\le 2\}$　　B. $\{x|0\le x\le 2\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{1,2\}$

2. 已知 $z=\dfrac{a+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}\left(a\in \mathrm{R}\right)$ 是纯虚数，则 $z\cdot \overline{z}$ 的值为（　　）

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{4}$

3. 已知向量 $\vec{a}=(2,3),\vec{b}=(m-1,2m+1)$，若 $\vec{a}//\vec{b}$，则 $m=$（　　）

A. 3　　B. $\dfrac{1}{8}$　　C. $-\dfrac{1}{8}$　　D. -5

4. 设 α,β,γ 是三个不同的平面，a，b 是两条不同的直线，则下列命题中为真命题的是（　　）

A. 若 $\alpha\perp\beta,a\subset\alpha,b\subset\beta$，则 $\vec{a}\perp\vec{b}$

B. 若 $\alpha//\beta,a\subset\alpha,b\subset\beta$，则 $a//b$

C. 若 $a//\alpha,b\subset\beta$，则 a 与 b 异面

D. 若 $\alpha\cap\beta=a,\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$，则 $a\perp\gamma$

5. 已知 $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=3\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)$，则 $\tan\alpha=$（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 3　　D. $\dfrac{1}{3}$

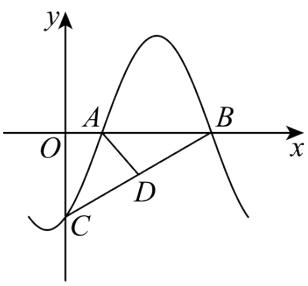
6. 已知抛物线 $C:y=4x^2$ 的焦点为 F，该抛物线上一点 P 到 $y=-1$ 的距离为 4，则 $|PF|=$（　　）

A. 3　　　　B. 4　　　　C. $\dfrac{49}{16}$　　　　D. $\dfrac{7}{2}$

7. 已知 $y=f(x+1)+1$ 为奇函数，则 $f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=$（　　）

A. -12　　　　B. -10　　　　C. -6　　　　D. -5

8. 如图，函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|\le\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的图像与 x 轴的其中两个交点分别为 A，B，与 y 轴交于点 C，D 为线段 BC 的中点，$|OB|=\sqrt{3}|OC|$，$|OA|=2,|AD|=\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$，则下列说法正确的是（　　）



A. $f(x)$ 的最小正周期为 12π　　　　B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=8$ 对称

C. $f(2)=f(-4)$　　　　D. $f(-x+2)$ 为偶函数

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知直线 $l:x+my-m+3=0$，圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=5$，则下列说法正确的是（　　）

A. 直线 l 恒过定点 $(-3,1)$　　　　B. 直线 l 与圆 C 相交

C. 当直线 l 平分圆 C 时，$m=-4$　　　　D. 当点 C 到直线 l 距离最大时，$m=\dfrac{1}{4}$

10. 已知在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp BC,AB=BC=2$，直线 A_1C 与底面 ABC 所成角的正弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则（　　）

A. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\dfrac{4}{3}$

B. 点 B_1 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$

C. 当点 D 为线段 A_1C 的中点时，平面 $DBB_1\perp$ 平面 DCC_1

D. E，F 分别为棱 BB_1、CC_1 上的动点，当 $AE+EF+FA_1$ 取得最小值时，$A_1F=EF$

11. 已知函数 $f(x)=e^{2x}-ax^2$（a 为常数），则下列结论正确的是（　　）

A. 当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $2x-y+1=0$

B. 若 $f(x)$ 有 3 个零点，则 a 的取值范围为 $\left(e^2,+\infty\right)$

C. 当 $a=e^2$ 时，$x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点

D. 当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)$ 有唯一零点 x_0，且 $-1<x_0<-\frac{1}{2}$

第 II 卷（非选择题共 92 分）

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 已知 $a=\log_2 5, 8=5^b$，则 $ab=$__________.

13. 设 A，B 是一个随机试验中的两个事件，且 $P(A)=\frac{1}{4},P(B)=\frac{1}{3},P(A\cup B)=\frac{1}{2}$，则 $P(B|A)=$__________.

14. 有序实数组 $\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\left(n\in\mathbf{N}^*\right)$ 称为 n 维向量，$\left|x_1\right|+\left|x_2\right|+\cdots+\left|x_n\right|$ 为该向量的范数，范数在度量向量的长度和大小方面有着重要的作用. 已知 n 维向量 $\vec{a}=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$，其中 $x_i\in\{0,1,2\},i=1,2,\cdots,n$. 记范数为奇数的 $\vec{a}$ 的个数为 A_n，则 $A_4=$______；$A_{2n+1}=$______.（用含 n 的式子表示）

四、解答题：本题共 5 小题，共 77 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 已知函数 $f(x)=x^2-10x+3a\ln x$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线与直线 $x+4y-1=0$ 垂直.

（1）求 a 的值；

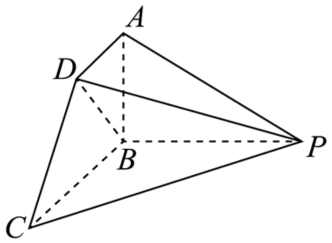
（2）求函数 $f(x)$ 的极值.

16. 已知在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_{n+1}=\frac{a_n}{1+2a_n}$.

（1）求证：数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列，并求数列 $\{a_na_{n+1}\}$ 的前 n 项和 S_n；

（2）在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $a=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}, b\cos C+c\cos B$ $=-2a\cos A$，求 $\triangle ABC$ 面积的最大值.

17. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，平面 $PBC\perp$ 平面 $ABCD,\angle PBC=90^{\circ},AD//BC$，$\angle ABC=90^{\circ},2AB=2AD=BC=2$.



（1）求证：$CD\perp$ 平面 PBD；

（2）若二面角 $B-PC-D$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，求直线 PD 与底面 $ABCD$ 所成角的余弦值.

18. 已知 F，C 分别是椭圆 $\Gamma:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右焦点、上顶点，过原点的直线 l 交椭圆 Γ 于 A，B 两点，满足 $|AF|+|BF|=4,\angle FCO=\frac{\pi}{3}$.

（1）求椭圆 Γ 的方程；

（2）设椭圆 Γ 的下顶点为 D，过点 D 作两条互相垂直的直线 l_1,l_2，这两条直线与椭圆 Γ 的另一个交点分别为 M，N，设直线 l_1 的斜率为 $k(k\neq 0)$,$\triangle DMN$ 的面积为 S，当 $\frac{S}{|k|}>\frac{16}{9}$ 时，求 k 的取值范围.

19. 在概率统计中，常常用频率估计概率．已知袋中有若干个红球和白球，有放回地随机摸球 n 次，红球出现 m 次．假设每次摸出红球的概率为 p，根据频率估计概率的思想，则每次摸出红球的概率 p 的估计值为 $\hat{p}=\frac{m}{n}$.

（1）若袋中这两种颜色球的个数之比为 $1:3$，不知道哪种颜色的球多．有放回地随机摸取 3 个球，设摸出的球为红球的次数为 Y，则 $Y\sim B\left(3,p\right)$.

注：$P_p\left(Y=k\right)$ 表示当每次摸出红球的概率为 p 时，摸出红球次数为 k 的概率）

（ⅰ）完成下表；

k	0	1	2	3
$P_{\frac{1}{4}}\left(Y=k\right)$	$\frac{27}{64}$			$\frac{1}{64}$
$P_{\frac{3}{4}}\left(Y=k\right)$		$\frac{9}{64}$		$\frac{27}{64}$

（ⅱ）在统计理论中，把使得 $P_p\left(Y=k\right)$ 的取值达到最大时的 p，作为 p 的估计值，记为 $\hat{p}$，请写出 $\hat{p}$ 的值.

（2）把（1）中"使得 $P_p\left(Y=k\right)$ 的取值达到最大时的 p 作为 p 的估计值 $\hat{p}$"的思想称为最大似然原理．基于最大似然原理的最大似然参数估计方法称为最大似然估计.

具体步骤：先对参数 θ 构建对数似然函数 $l\left(\theta\right)$，再对其关于参数 θ 求导，得到似然方程 $l'\left(\theta\right)=0$，最后求解参数 θ 的估计值．已知 $Y\sim B\left(n,p\right)$ 的参数 p 的对数似然函数为 $l(p)=\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\ln p+\sum\limits_{i=1}^{n}\left(1-X_i\right)\ln(1-p)$，

其中 $X_i=\begin{cases}0,\text{第}i\text{次摸出白球}\\1,\text{第}i\text{次摸出红球}\end{cases}$．求参数 p 的估计值，并且说明频率估计概率的合理性.

参考答案

一、单选题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求．

1. 已知集合 $A=\left\{x\in\mathrm{N}|\ x^2-4x-5\le 0\right\},B=\left\{0,1,2\right\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{x|1\le x\le 2\}$　　B. $\{x|0\le x\le 2\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{1,2\}$

【答案】C

【解析】

【分析】由给定数集的范围和交集的定义求解.

【详解】$A=\left\{x\in\mathrm{N}|\ x^2-4x-5\le 0\right\}=\left\{0,1,2,3,4,5\right\}$，又 $B=\left\{0,1,2\right\}$，

则 $A\cap B=\left\{0,1,2\right\}$.

故选：C.

2. 已知 $z=\dfrac{a+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}\left(a\in\mathrm{R}\right)$ 是纯虚数，则 $z\cdot\overline{z}$ 的值为（　　）

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. $\dfrac{1}{4}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用复数的代数形式的乘除运算进行化简，根据纯虚数的定义，由实部等于 0，虚部不等于 0，列式求解即可得 a，再结合复数的乘法运算以及共轭复数的概念即可得答案.

【详解】∵复数$z=\dfrac{a+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}$是纯虚数，且$z=\dfrac{a+\mathrm{i}}{1+2\mathrm{i}}=\dfrac{(a+\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}{(1+2\mathrm{i})(1-2\mathrm{i})}=\dfrac{a+2}{5}+\dfrac{1-2a}{5}\mathrm{i}$，

∴$\begin{cases}\dfrac{a+2}{5}=0\\ \dfrac{1-2a}{5}\neq 0\end{cases}$，解得$a=-2$，

所以$z=\mathrm{i}$，$\overline{z}=-\mathrm{i}$，

所以$z\cdot\overline{z}=-\mathrm{i}^2=1$，

故选：B.

3. 已知向量$\vec{a}=(2,3),\vec{b}=(m-1,2m+1)$，若$\vec{a}//\vec{b}$，则$m=$（　　）

A. 3　　　　B. $\dfrac{1}{8}$　　　　C. $-\dfrac{1}{8}$　　　　D. -5

【答案】D

【解析】

【分析】利用平面向量共线的坐标表示计算即可.

【详解】由题意可知$2(2m+1)=3(m-1)\Rightarrow m=-5$.

故选：D

4. 设α,β,γ是三个不同的平面，a，b是两条不同的直线，则下列命题中为真命题的是（　　）

A. 若$\alpha\perp\beta,a\subset\alpha,b\subset\beta$，则$a\perp b$　　　　B. 若$\alpha//\beta,a\subset\alpha,b\subset\beta$，则$a//b$

C. 若$a//\alpha,b\subset\beta$，则a与b异面　　　　D. 若$\alpha\cap\beta=a,\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$，则$a\perp\gamma$

【答案】D

【解析】

【分析】ABC选项根据空间中直线与平面的位置关系直接判断即可，D选项需要通过画图解释，另外需要结合线面垂直、面面垂直、线面平行的性质进行分析.

【详解】对A，若$\alpha\perp\beta,a\subset\alpha,b\subset\beta$，则$a$与$b$相交、平行或异面都有可能，故A错误；

对B，若$\alpha//\beta,a\subset\alpha,b\subset\beta$，则$a//b$或$a$与$b$异面，故B错误；

对C，若$a//\alpha,b\subset\beta$，则a与b相交、平行或异面都有可能，故C错误；

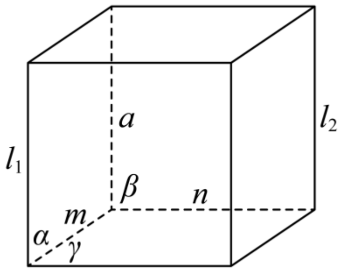
对D，若$\alpha\cap\beta=a,\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma$，设$\alpha$与$\gamma$的交线为$m$，$\beta$与$\gamma$的交线为$n$，

在平面α内取$l_1 \perp m$，在平面β内取$l_2 \perp n$，l_1,l_2与a不重合，

由面面垂直的性质可得$l_1 \perp \gamma, l_2 \perp \gamma$，所以$l_1 // l_2$，

又$l_1 \not\subset \beta$，所以$l_1 // \beta$，由线面平行的性质定理得$l_1 // a$，

所以有$a \perp \gamma$，故D正确.



故选：D.

5. 已知$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，则$\tan\alpha=$（　　）

A. 2　　B. $\frac{1}{2}$　　C. 3　　D. $\frac{1}{3}$

【答案】B

【解析】

【分析】利用诱导公式得到$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，即可求出$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，再由两角和的正切公式展开计算可得.

【详解】因为$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，

所以$\cos\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]=3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，

即$\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=3\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$，

所以$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=3$，则$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=3$，解得$\tan\alpha=\frac{1}{2}$.

故选：B

6. 已知抛物线$C:y=4x^2$的焦点为F，该抛物线上一点P到$y=-1$的距离为4，则$|PF|=$（　　）

A. 3　　　　B. 4　　　　C. $\frac{49}{16}$　　　　D. $\frac{7}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】根据题意求出抛物线上点到准线距离，再由抛物线定义得解.

【详解】由抛物线$C:y=4x^2$可得$x^2=\frac{1}{4}y$，其准线方程为$y=-\frac{1}{16}$，

因为抛物线上一点P到$y=-1$的距离为4，

所以点P到$y=-\frac{1}{16}$的距离为$4-\left[-\frac{1}{16}-(-1)\right]=\frac{49}{16}$，

由抛物线的定义知，$|PF|=\frac{49}{16}$.

故选：C

7. 已知$y=f(x+1)+1$为奇函数，则$f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=$（　　）

A. -12　　　　B. -10　　　　C. -6　　　　D. -5

【答案】D

【解析】

【分析】由函数图象平移的规则，且$y=f(x+1)+1$为奇函数，得出函数$y=f(x)$图象的对称性，进而得出$f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)$的值.

【详解】由函数图象平移的规则可知：

函数$y=f(x)$的图象可由函数$y=f(x+1)+1$的图象向右平移1个单位、向下平移1个单位得到的，

因为函数$y=f(x+1)+1$为奇函数，所以函数$y=f(x+1)+1$的图象关于原点对称，

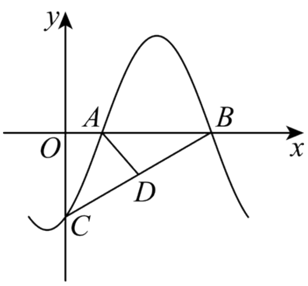
所以函数$y=f(x)$的图象关于点$(1,-1)$对称，得：

$f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=[f(-1)+f(3)]+[f(0)+f(2)]+f(1)$，

即$f(-1)+f(0)+f(1)+f(2)+f(3)=2\times(-1)+2\times(-1)+(-1)=-5$，

故选：D.

8. 如图，函数 $f(x)=A\sin(\omega x+\varphi)\left(A>0,\omega>0,|\varphi|\le\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像与 x 轴的其中两个交点分别为 A，B，与 y 轴交于点 C，D 为线段 BC 的中点，$|OB|=\sqrt{3}|OC|$，$|OA|=2,|AD|=\frac{2\sqrt{21}}{3}$，则下列说法正确的是（　　）



A. $f(x)$ 的最小正周期为 12π

B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x=8$ 对称

C. $f(2)=f(-4)$

D. $f(-x+2)$ 为偶函数

【答案】C

【解析】

【分析】利用三角函数的图象与性质先含参表示 A,B,C,D 的坐标，由线段关系求解参数得 $f(x)=\frac{16}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}\right)$，再判定选项即可.

【详解】由题可 $A(2,0),B\left(2+\frac{\pi}{\omega},0\right),C(0,A\sin\varphi)$，则 $D\left(1+\frac{\pi}{2\omega},\frac{A\sin\varphi}{2}\right)$，

有 $\sqrt{3}|A\sin\varphi|=2+\frac{\pi}{\omega},\sin(2\omega+\varphi)=0$，

$\because|AD|=\frac{2\sqrt{21}}{3},\therefore\left(\frac{\pi}{2\omega}-1\right)^2+\frac{A^2\sin^2\varphi}{4}=\frac{28}{3}$，

把 $|A\sin\varphi|=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2+\frac{\pi}{\omega}\right)$ 代入上式，得 $\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2-2\times\frac{\pi}{\omega}-24=0$，解得 $\frac{\pi}{\omega}=6$ (负值舍去)，

$\therefore\omega=\frac{\pi}{6},\therefore\sin\left(\frac{\pi}{3}+\varphi\right)=0$，由 $|\varphi|\le\frac{\pi}{2}$，解得 $\varphi=-\frac{\pi}{3},\therefore\sqrt{3}\left|A\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right|=8$，

解得 $A=\frac{16}{3},\therefore f(x)=\frac{16}{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}\right)$，

显然其周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\dfrac{\pi}{6}}=12$，故 A 错误；

当 $x=8$ 时，$\dfrac{\pi}{6}x-\dfrac{\pi}{3}=\pi$，$f(x)=0$，故 B 错误；

$f\left(2\right)=\dfrac{16}{3}\sin 0=0, f\left(-4\right)=\dfrac{16}{3}\sin\left(-\pi\right)=0$，故 C 正确；

$f(-x+2)=\dfrac{16}{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\left(-x+2\right)-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{16}{3}\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}x\right)$，显然是奇函数，故 D 错误.

故选：C

【点睛】思路点睛：利用三角函数的图象与性质含参表示各点坐标，再根据线段关系解参数求出函数解析式，针对选项利用三角函数性质一一判定即可.

二、多选题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分．

9. 已知直线 $l: x+my-m+3=0$，圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=5$，则下列说法正确的是（　　）

A. 直线 l 恒过定点 $(-3,1)$

B. 直线 l 与圆 C 相交

C. 当直线 l 平分圆 C 时，$m=-4$

D. 当点 C 到直线 l 距离最大时，$m=\dfrac{1}{4}$

【答案】ACD

【解析】

【分析】对于 A，将直线方程变形即可进一步判断；对于 B，举反例即可判断；对于 C，将圆心坐标代入直线方程即可验算参数 m；对于 D，当点 C 到直线 l 距离最大值时，有 $PC\perp l$，结合它们的斜率关系即可判断.

【详解】对于 A，$l: x+my-m+3=0$ 即 $x+3+m\left(y-1\right)=0$，令 $y-1=0$，有 $y=1, x=-3$，所以直线 l 恒过定点 $P\left(-3,1\right)$，故 A 正确；

对于 B，圆 $C:(x-1)^2+(y-2)^2=5$ 的圆心、半径为 $C\left(1,2\right), r=\sqrt{5}$，

点 $C\left(1,2\right)$ 到直线 $l: x+my-m+3=0$ 的距离为 $d=\dfrac{|m+4|}{\sqrt{1+m^2}}$，

从而 $d^2-r^2=\dfrac{\left(m+4\right)^2}{1+m^2}-5=\dfrac{-4m^2+8m+11}{1+m^2}$，

取 $m=2$，则此时有 $d^2-r^2=\frac{11}{5}>0$，故 B 错误；

对于 C，当直线 l 平分圆 C 时，有点 $C\left(1,2\right)$ 在直线 $l: x+my-m+3=0$ 上，

也就是说有 $1+2m-m+3=0$ 成立，解得 $m=-4$，故 C 正确；

对于 D，点 C 到直线 l 距离满足 $d\le\left|PC\right|$，等号成立当且仅当 $PC\perp l$，

而 PC 的斜率为 $k_1=\frac{2-1}{1-\left(-3\right)}=\frac{1}{4}$，

所以当等号成立时有 $\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{m}\right)=-1$，解得 $m=\frac{1}{4}$，故 D 正确.

故选：ACD.

10. 已知在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB\perp BC, AB=BC=2$，直线 A_1C 与底面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$，则（　　）

A. 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{4}{3}$

B. 点 B_1 到平面 A_1BC 的距离为 $\sqrt{2}$

C. 当点 D 为线段 A_1C 的中点时，平面 $DBB_1\perp$ 平面 DCC_1

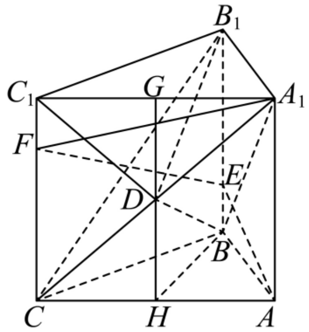
D. E，F 分别为棱 BB_1、CC_1 上的动点，当 $AE+EF+FA_1$ 取得最小值时，$A_1F=EF$

【答案】BC

【解析】

【分析】利用线面夹角及棱柱的体积公式可判定 A，利用等体积法可判定 B，利用线线垂直的判定与性质及线面垂直的性质可判定 C，利用多面体的展开图计算最值可判定 D.

【详解】



对于 A，由直三棱柱的特征可知，直线 A_1C 与底面 ABC 所成角为 $\angle A_1CA$，

所以 $\frac{AA_1}{A_1C}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

因为 $AB\perp BC, AB=BC=2$，所以 $AC=2\sqrt{2}, AA_1=2, A_1C=2\sqrt{3}$，

则直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot AA_1=4$，故 A 错误；

对于 B，由上可知 $BC\perp$ 平面 AB_1，

因为 $A_1B\subset$ 平面 AB_1，所以 $BC\perp A_1B$，则 $S_{\triangle A_1BC}=2\sqrt{2}, S_{\triangle A_1B_1B}=2$，

设点 B_1 到平面 A_1BC 的距离为 h，

易知 $V_{B_1-A_1BC}=\frac{1}{3}h\times 2\sqrt{2}=V_{C-A_1B_1B}=\frac{1}{3}\times 2\times 2\Rightarrow h=\sqrt{2}$，故 B 正确；

对于 C，取 A_1C_1, AC 的中点 G, H，易知 M 在线 GH 上，$BH\perp AC$，

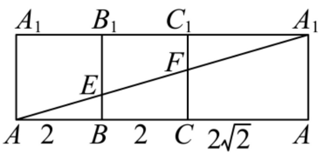
由直三棱柱的特征知 $GH\perp AC$，

因为 $GH\cap BH=H, GH, BH\subset$ 平面 BB_1DH，

所以 $AC\perp$ 平面 BB_1DH，而平面 $BB_1DH=$ 平面 DBB_1

因为 $AC\subset$ 平面 DCC_1，所以平面 $DCC_1\perp$ 平面 DBB_1，故 C 正确；

对于 D，将三棱柱侧面展开，如下图所示，



显然 $AE+EF+FA_1$ 取得最小值时，$\frac{EF}{FA_1}=\frac{2}{2\sqrt{2}}$，故 D 错误.

故选：BC

11. 已知函数 $f(x)=e^{2x}-ax^2$（a 为常数)，则下列结论正确的是（　　）

A. 当 $a=1$ 时，$f(x)$ 在 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $2x-y+1=0$

B. 若 $f(x)$ 有 3 个零点，则 a 的取值范围为 $\left(e^2,+\infty\right)$

C. 当 $a=e^2$ 时，$x=1$ 是 $f(x)$ 的极大值点