

2023-2024 学年广东省十校高三二模数学试题（文、理）试卷

注意事项：

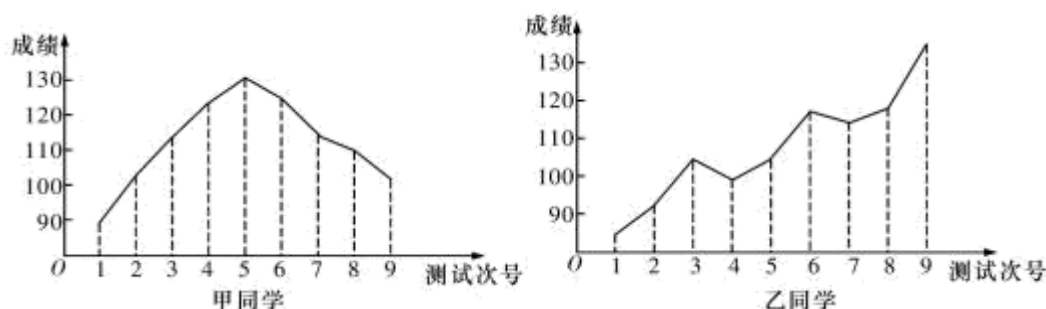
1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ ，若函数 $y = f(x+2)$ 为偶函数，且 $f(x)$ 对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$)，都有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$ ，若 $f(a) \leq f(3a+1)$ ，则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ B. $[-2, -1]$ C. $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ D. $(\frac{3}{4}, +\infty)$

2. 对某两名高三学生在连续 9 次数学测试中的成绩（单位：分）进行统计得到折线图，下面是关于这两位同学的数学成绩分析。



- ①甲同学的成绩折线图具有较好的对称性，故平均成绩为 130 分；
- ②根据甲同学成绩折线图提供的数据进行统计，估计该同学平均成绩在区间 $[110, 120]$ 内；
- ③乙同学的数学成绩与测试次号具有比较明显的线性相关性，且为正相关；
- ④乙同学连续九次测验成绩每一次均有明显进步。

其中正确的个数为 ()

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 1

3. 已知 $x = 0$ 是函数 $f(x) = x(ax - \tan x)$ 的极大值点，则 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-\infty, 1]$
C. $[0, +\infty)$ D. $[1, +\infty)$

4. 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点，点 $A(1, m)$ 在 C 上，若直线 AF 与 C 的另一个交点为 B ，则 $|AB| = ()$

- A. 12 B. 10 C. 9 D. 8

5. 总体由编号为 01, 02, ..., 39, 40 的 40 个个体组成.利用下面的随机数表选取 5 个个体, 选取方法是从随机数表(如表)第 1 行的第 4 列和第 5 列数字开始由左到右依次选取两个数字, 则选出来的第 5 个个体的编号为 ()

60	44	66	44	21
66	06	58	05	62
61	65	54	35	02
42	35	48	96	32
14	52	41	52	48
92	66	22	15	86
76	63	75	41	99
58	42	36	72	24

- A. 23 B. 21 C. 35 D. 32

6. 定义在 R 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)} (f(x) \neq 0)$, 且在区间 $(2017, 2018)$ 上单调递减, 已知 α, β 是

锐角三角形的两个内角, 则 $f(\sin \beta), f(\cos \alpha)$ 的大小关系是 ()

- A. $f(\sin \beta) < f(\cos \alpha)$ B. $f(\sin \beta) > f(\cos \alpha)$
C. $f(\sin \beta) = f(\cos \alpha)$ D. 以上情况均有可能

7. 已知 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}, |\vec{b}| = 3, \vec{a} \cdot \vec{b} = -6$, 则 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的投影为 ()

- A. -2 B. -1 C. -3 D. 2

8. 集合 $A = \{x | x^2 - 3x \leq 0\}, B = \{x | y = \lg(2-x)\}$, 则 $A \cap B = ()$

- A. $\{x | 0 \leq x < 2\}$ B. $\{x | 1 \leq x < 3\}$ C. $\{x | 2 < x \leq 3\}$ D. $\{x | 0 < x \leq 2\}$

9. 已知函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上恰有四个不同的零点, 则实数 a 的取值范围是 ()

- A. $(e, 3) \cup (3, +\infty)$ B. $[0, e)$ C. $(e^2, +\infty)$ D. $(-\infty, e) \cup \{3\}$

10. 已知盒中有 3 个红球, 3 个黄球, 3 个白球, 且每种颜色的三个球均按 A, B, C 编号, 现从中摸出 3 个球 (除颜色与编号外球没有区别), 则恰好不同时包含字母 A, B, C 的概率为 ()

- A. $\frac{17}{21}$ B. $\frac{19}{28}$ C. $\frac{7}{9}$ D. $\frac{23}{28}$

11. 已知 i 为虚数单位, 若复数 z 满足 $\frac{5}{1+2i} = \bar{z} - i$, 则 $z = ()$

- A. $1+i$ B. $-1+i$ C. $1-2i$ D. $1+2i$

12.

我国数学家陈景润在哥德巴赫猜想的研究中取得了世界领先的成果. 哥德巴赫猜想是“每个大于 2 的偶数可以表示为两个素数 (即质数) 的和”, 如 $16 = 5 + 11$, $30 = 7 + 23$. 在不超过 20 的素数中, 随机选取两个不同的数, 其和等于 20 的概率是 ()

- A. $\frac{1}{14}$ B. $\frac{1}{12}$ C. $\frac{3}{28}$ D. 以上都不对

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . $a = 4, b = \sqrt{6}, A = \frac{\pi}{3}$ 则 $\cos 2B =$ _____.

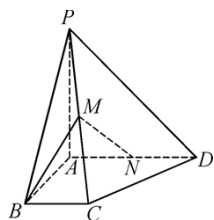
14. 已知抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点为 F , 直线 l 与抛物线 C 相切于 M 点, N 是 l 上一点 (不与 M 重合), 若以线段 MN 为直径的圆恰好经过 F , 则点 N 到抛物线顶点 O 的距离 $|ON|$ 的最小值是 _____.

15. “北斗三号”卫星的运行轨道是以地心为一个焦点的椭圆. 设地球半径为 R , 若其近地点、远地点离地面的距离大约分别是 $\frac{2}{3}R, 4R$, 则“北斗三号”卫星运行轨道的离心率为 _____.

16. 已知 $\triangle ABC$ 得三边长成公比为 $\sqrt{2}$ 的等比数列, 则其最大角的余弦值为 _____.

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

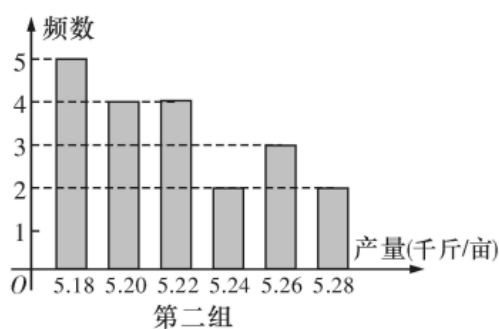
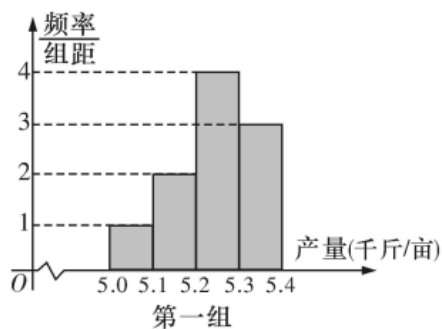
17. (12 分) 如图, 在四棱锥 $PABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$, $AD = AP = 4, AB = BC = 2$, M 为 PC 的中点.



(1) 求异面直线 AP, BM 所成角的余弦值;

(2) 点 N 在线段 AD 上, 且 $AN = \lambda$, 若直线 MN 与平面 PBC 所成角的正弦值为 $\frac{4}{5}$, 求 λ 的值.

18. (12 分) 为了实现中华民族伟大复兴之梦, 把我国建设成为富强民主文明和谐美丽的社会主义现代化强国, 党和国家为劳动者开拓了宽广的创造性劳动的舞台. 借此“东风”, 某大型现代化农场在种植某种大棚有机无公害的蔬菜时, 为创造更大价值, 提高亩产量, 积极开展技术创新活动. 该农场采用了延长光照时间和降低夜间温度两种不同方案. 为比较两种方案下产量的区别, 该农场选取了 40 间大棚 (每间一亩), 分成两组, 每组 20 间进行试点. 第一组采用延长光照时间的方案, 第二组采用降低夜间温度的方案. 同时种植该蔬菜一季, 得到各间大棚产量数据信息如下图:



(1) 如果你是该农场的负责人, 在只考虑亩产量的情况下, 请根据图中的数据信息, 对于下一季大棚蔬菜的种植, 说出你的决策方案并说明理由;

(2) 已知种植该蔬菜每年固定的成本为 6 千元/亩. 若采用延长光照时间的方案, 光照设备每年的成本为 0.22 千元/亩; 若采用夜间降温的方案, 降温设备的每年成本为 0.2 千元/亩. 已知该农场共有大棚 100 间 (每间 1 亩), 农场种植的该蔬菜每年产出两次, 且该蔬菜市场的收购均价为 1 千元/千斤. 根据题中所给数据, 用样本估计总体, 请计算在两种不同的方案下, 种植该蔬菜一年的平均利润;

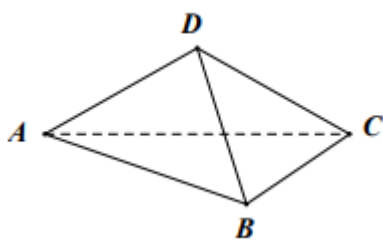
(3) 农场根据以往该蔬菜的种植经验, 认为一间大棚亩产量超过 5.25 千斤为增产明显. 在进行夜间降温试点的 20 间大棚中随机抽取 3 间, 记增产明显的大棚间数为 X , 求 X 的分布列及期望.

19. (12 分) 已知奇函数 $f(x)$ 的定义域为 R , 且当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = x^2 - x + 1$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 记函数 $g(x) = f(x) - mx + 1$, 若函数 $g(x)$ 有 3 个零点, 求实数 m 的取值范围.

20. (12 分) 如图, 在四面体 $DABC$ 中, $AB \perp BC$, $DA = DC = DB$.



(1) 求证: 平面 $ABC \perp$ 平面 ACD ;

(2) 若 $AD = 2$, $AB = 2BC$, $\angle CAD = 30^\circ$, 求四面体 $ABCD$ 的体积.

21. (12 分) 已知 $f(x) = |2x + 3| - |2x - 1|$.

(1) 求不等式 $f(x) < 2$ 的解集;

(2) 若存在 $x \in R$, 使得 $f(x) > |3a - 2|$ 成立, 求实数 a 的取值范围

22. (10 分)

为响应“坚定文化自信，建设文化强国”，提升全民文化修养，引领学生“读经典用经典”，某广播电视台计划推出一档“阅读经典”节目.工作人员在前期的数据采集中，在某高中学校随机抽取了 120 名学生做调查，统计结果显示：样本中男女比例为 3:2，而男生中喜欢阅读中国古典文学和不喜欢的比例是 7:5，女生中喜欢阅读中国古典文学和不喜欢的比例是 5:3.

(1) 填写下面列联表，并根据联表判断是否有 95%的把握认为喜欢阅读中国古典文学与性别有关系？

	男生	女生	总计
喜欢阅读中国古典文学			
不喜欢阅读中国古典文学			
总计			

(2) 为做好文化建设引领，实验组把该校作为试点，和该校的学生进行中国古典文学阅读交流.实验人员已经从所调查的 120 人中筛选出 4 名男生和 3 名女生共 7 人作为代表，这 7 个代表中有 2 名男生代表和 2 名女生代表喜欢中国古典文学.现从这 7 名代表中任选 3 名男生代表和 2 名女生代表参加座谈会，记 ξ 为参加会议的人中喜欢古典文学的人数，求 ξ 的分布列及数学期望 $E(\xi)$

附表及公式： $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a + b)(c + d)(a + c)(b + d)}$, $n = a + b + c + d$.

$P(K^2 \geq k_0)$	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
k_0	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、A

【解析】

根据题意，分析可得函数 $f(x)$ 的图象关于 $x = 2$ 对称且在 $[2, +\infty)$ 上为减函数，则不等式 $f(a) \leq f(3a + 1)$ 等价于

$|a-2| \geq |3a-1|$ ，解得 a 的取值范围，即可得答案.

【详解】

解:因为函数 $y=f(x+2)$ 为偶函数,

所以函数 $f(x)$ 的图象关于 $x=2$ 对称,

因为 $f(x)$ 对任意 $x_1, x_2 \in [2, +\infty)$ ($x_1 \neq x_2$), 都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$,

所以函数 $f(x)$ 在 $[2, +\infty)$ 上为减函数,

则 $f(a) \leq f(3a+1) \Leftrightarrow f(|a-2|) \leq f(|3a+1-2|) \Leftrightarrow |a-2| \geq |3a-1|$,

解得: $-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{3}{4}$.

即实数 a 的取值范围是 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$.

故选: A.

【点睛】

本题考查函数的对称性与单调性的综合应用, 涉及不等式的解法, 属于综合题.

2、C

【解析】

利用图形, 判断折线图平均分以及线性相关性, 成绩的比较, 说明正误即可.

【详解】

①甲同学的成绩折线图具有较好的对称性, 最高130分, 平均成绩为低于130分, ①错误;

②根据甲同学成绩折线图提供的数据进行统计, 估计该同学平均成绩在区间 $[110, 120]$ 内, ②正确;

③乙同学的数学成绩与测试次号具有比较明显的线性相关性, 且为正相关, ③正确;

④乙同学在这连续九次测验中第四次、第七次成绩较上一次成绩有退步, 故④不正确.

故选: C.

【点睛】

本题考查折线图的应用, 线性相关以及平均分的求解, 考查转化思想以及计算能力, 属于基础题.

3、B

【解析】

方法一: 令 $g(x) = ax - \tan x$, 则 $f(x) = x \cdot g(x)$, $g'(x) = a - \frac{1}{\cos^2 x}$,

当 $a \leq 1$, $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时, $g'(x) \leq 0$, $g(x)$ 单调递减,

$\therefore x \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, $f(x) = x \cdot g(x) < 0$, 且 $f'(x) = xg'(x) + g(x) > 0$,

$\therefore f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 上单调递增,

$x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $g(x) < g(0) = 0$, $f(x) = x \cdot g(x) < 0$, 且 $f'(x) = xg'(x) + g(x) < 0$,

$\therefore f'(x) < 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, $\therefore x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点, $\therefore a \leq 1$ 满足题意;

当 $a > 1$ 时, 存在 $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ 使得 $\cos t = \frac{1}{\sqrt{a}}$, 即 $g'(t) = 0$,

又 $g'(x) = a - \frac{1}{\cos^2 x}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递减, $\therefore x \in (0, t)$ 时, $g(x) > g(0) = 0$, 所以 $f(x) = x \cdot g(x) > 0$,

这与 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点矛盾.

综上, $a \leq 1$. 故选 B.

方法二: 依据极值的定义, 要使 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点, 须在 $x = 0$ 的左侧附近, $f(x) < 0$, 即 $ax - \tan x > 0$;

在 $x = 0$ 的右侧附近, $f(x) < 0$, 即 $ax - \tan x < 0$. 易知, $a = 1$ 时, $y = ax$ 与 $y = \tan x$ 相切于原点, 所以根据 $y = ax$ 与 $y = \tan x$ 的图象关系, 可得 $a \leq 1$, 故选 B.

4、C

【解析】

求得 A 点坐标, 由此求得直线 AF 的方程, 联立直线 AF 的方程和抛物线的方程, 求得 B 点坐标, 进而求得 $|AB|$

【详解】

抛物线焦点为 $F(2, 0)$, 令 $x = 1$, $y^2 = 8$, 解得 $y = \pm 2\sqrt{2}$, 不妨设 $A(1, 2\sqrt{2})$, 则直线 AF 的方程为

$y = \frac{2\sqrt{2}}{1-2}(x-2) = -2\sqrt{2}(x-2)$, 由 $\begin{cases} y = -2\sqrt{2}(x-2) \\ y^2 = 8x \end{cases}$, 解得 $A(1, 2\sqrt{2}), B(4, -4\sqrt{2})$, 所以

$|AB| = \sqrt{(4-1)^2 + (-4\sqrt{2} - 2\sqrt{2})^2} = 9$.

故选: C

【点睛】

本小题主要考查抛物线的弦长的求法, 属于基础题.

5、B

【解析】

根据随机数表法的抽样方法, 确定选出来的第 5 个个体的编号.

【详解】

随机数表第 1 行的第 4 列和第 5 列数字为 4 和 6，所以从这两个数字开始，由左向右依次选取两个数字如下 46，64，42，16，60，65，80，56，26，16，55，43，50，24，23，54，89，63，21，...其中落在编号 01，02，...，39，40 内的有：16，26，16，24，23，21，...依次不重复的第 5 个编号为 21.

故选：B

【点睛】

本小题主要考查随机数表法进行抽样，属于基础题.

6、B

【解析】

由已知可求得函数的周期，根据周期及偶函数的对称性可求 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上的单调性，结合三角函数的性质即可比较.

【详解】

由 $f(x+1) = -\frac{1}{f(x)}$ 可得 $f(x+2) = f[(x+1)+1] = -\frac{1}{f(x+1)} = f(x)$ ，即函数的周期 $T = 2$ ，

因为在区间 $(2017, 2018)$ 上单调递减，故函数在区间 $(-1, 0)$ 上单调递减，

根据偶函数的对称性可知， $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，

因为 α ， β 是锐角三角形的两个内角，

所以 $\alpha, \beta \in (0, \frac{1}{2}\pi)$ 且 $\alpha + \beta > \frac{1}{2}\pi$ 即 $\alpha > \frac{1}{2}\pi - \beta$ ，

所以 $\cos \alpha < \cos(\frac{1}{2}\pi - \beta)$ 即 $0 < \cos \alpha < \sin \beta < 1$ ，

$f(\cos \alpha) < f(\sin \beta)$.

故选：B .

【点睛】

本题主要考查函数值的大小比较，根据函数奇偶性和单调性之间的关系是解决本题的关键.

7、A

【解析】

根据向量投影的定义，即可求解.

【详解】

$$\vec{a} \text{ 在 } \vec{b} \text{ 上的投影为 } |\vec{a}| \cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-6}{3} = -2.$$

故选:A

【点睛】

本题考查向量的投影, 属于基础题.

8、A

【解析】

解一元二次不等式化简集合 A, 再根据对数的真数大于零化简集合 B, 求交集运算即可.

【详解】

由 $x^2 - 3x \leq 0$ 可得 $0 \leq x \leq 3$, 所以 $A = \{x | 0 \leq x \leq 3\}$, 由 $2 - x > 0$ 可得 $x < 2$, 所以 $B = \{x | x < 2\}$, 所以

$$A \cap B = \{x | 0 \leq x < 2\}, \text{ 故选 A.}$$

【点睛】

本题主要考查了集合的交集运算, 涉及一元二次不等式解法及对数的概念, 属于中档题.

9、A

【解析】

函数 $f(x) = \frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a$ 的零点就是方程 $\frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a = 0$ 的解, 设 $g(x) = \frac{x}{\ln x}$, 方程可化为

$(g(x) - 3)(g(x) - a) = 0$, 即 $g(x) = 3$ 或 $g(x) = a$, 求出 $g(x)$ 的导数 $g'(x)$, 利用导数得出函数的单调性和最值, 由此可根据方程解的个数得出 a 的范围.

【详解】

由题意得 $\frac{x}{\ln x} - 3 + \frac{3a \ln x}{x} - a = 0$ 有四个大于 1 的不等实根, 记 $g(x) = \frac{x}{\ln x}$, 则上述方程转化为

$$(g(x) - 3) + a \left(\frac{3}{g(x)} - 1 \right) = 0,$$

即 $(g(x) - 3)(g(x) - a) = 0$, 所以 $g(x) = 3$ 或 $g(x) = a$.

因为 $g'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$, 当 $x \in (1, e)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

所以 $g(x)$ 在 $x = e$ 处取得最小值, 最小值为 $g(e) = e$. 因为 $3 > e$, 所以 $g(x) = 3$ 有两个符合条件的实数解, 故

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/245134131044011332>