

专题 05 圆锥曲线大题综合（新高考广东专用）

一、解答题

1. (2023·广东广州·统考三模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别为 A, B . 直线 l 与 C 相切, 且与圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 交于 M, N 两点, M 在 N 的左侧.

(1) 若直线 l 的斜率 $k = \frac{1}{2}$, 求原点 O 到直线 l 的距离;

(2) 记直线 AM, BN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明: $k_1 k_2$ 为定值.

【答案】(1) $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

(2) 证明见解析

【分析】(1) 设出直线 l 方程, 根据直线 l 与 C 相切求出 $m = 2$ 或 $m = -2$, 再利用点到直线距离公式即可求出.

(2) 设直线 l 方程为 $y = kx + m$, 根据直线 l 与 C 相切求出 $m^2 = 4k^2 + 3$, 再把直线方程与圆的方程联立, 借助韦达定理得到 x_1, x_2 关系式, 代入 $k_1 k_2$ 即可化简出定值.

【详解】(1) 由题意知直线 l 斜率存在, 设直线 l 方程为 $y = kx + m$,

与椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 联立得 $(3 + 4k^2)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$.

因为直线 l 与 C 相切, 所以 $\Delta = (8km)^2 - 4(3 + 4k^2)(4m^2 - 12) = 48(4k^2 - m^2 + 3) = 0$,

故 $m^2 = 4k^2 + 3$.

当 $k = \frac{1}{2}$ 时, $m^2 = 4$, $m = 2$ 或 $m = -2$, 直线 l 方程为 $y = \frac{1}{2}x \pm 2$.

所以原点 O 到直线 l 的距离为 $d = \frac{|\pm 2|}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$.

(2) 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $x_1 < x_2$, 由已知可得 $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$,

$\therefore k_1 = \frac{y_1}{x_1 + 2}$, $k_2 = \frac{y_2}{x_2 - 2}$. 由 (1) 得 $y_1 = kx_1 + m$, $y_2 = kx_2 + m$, $m^2 = 4k^2 + 3$.

所以 $k_1 k_2 = \frac{y_1 y_2}{(x_1 + 2)(x_2 - 2)} = \frac{(kx_1 + m)(kx_2 + m)}{x_1 x_2 + 2(x_2 - x_1) - 4} = \frac{k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2}{x_1 x_2 + 2(x_2 - x_1) - 4}$ ①,

由 $\begin{cases} y = kx + m \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$, 得 $(1 + k^2)x^2 + 2kmx + m^2 - 4 = 0$, 由韦达定理得

$$\Delta = (2km)^2 - 4(1+k^2)(m^2-4) = 16(4k^2 - m^2 + 4) = 16 > 0,$$

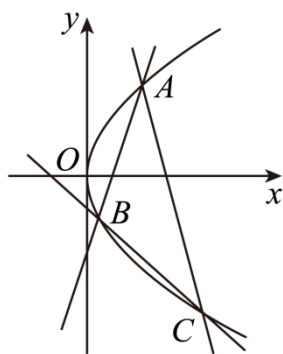
$$x_1 + x_2 = -\frac{2km}{k^2+1}, \quad x_1 x_2 = \frac{m^2-4}{k^2+1},$$

$$\text{故 } (x_2 - x_1)^2 = \frac{4k^2 m^2}{(k^2+1)^2} - 4 \times \frac{m^2-4}{k^2+1} = \frac{4(4k^2 - m^2 + 4)}{(k^2+1)^2} = \frac{4}{(k^2+1)^2},$$

$$\therefore x_2 - x_1 = \frac{2}{k^2+1}, \text{ 代入①式整理可得}$$

$$k_1 k_2 = \frac{k^2(m^2-4) - 2k^2 m^2 + m^2(k^2+1)}{m^2-4+4-4(k^2+1)} = \frac{m^2-4k^2}{m^2-4k^2-4} = -3, \text{ 所以 } k_1 k_2 \text{ 为定值.}$$

2. (2023·广东深圳·统考模拟预测) 已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(2, 0)$.



(1) 求抛物线的标准方程;

(2) 抛物线 C 在 x 轴上方一点 A 的横坐标为 2, 过点 A 作两条倾斜角互补的直线, 与曲线 C 的另一个交点分别为 B, C , 求证: 直线 BC 的斜率为定值.

【答案】 (1) $y^2 = 8x$

(2) 证明见解析

【分析】 (1) 根据已知中抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(2, 0)$, 求出 p 值, 可求抛物线的标准方程;

(2) 设出直线 AB, AC 的方程与椭圆方程联立, 求出 B, C 的坐标, 利用斜率公式, 即可证明直线 BC 的斜率为定值.

【详解】 (1) $\because$ 抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 $F(2, 0)$,

$$\therefore \frac{p}{2} = 2, \text{ 解得 } p = 4,$$

故抛物线 C 的标准方程为: $y^2 = 8x$;

(2) $\because$ 点 A 的横坐标为 2, 即 $y^2 = 8 \times 2$, 解得 $y = \pm 4$,

故 A 点的坐标为 $(2, 4)$ ，设 $B(x_1, y_1)$ ， $C(x_2, y_2)$ ，

由已知设 AB ： $m(y-4)=x-2$ ，即 $x=my-4m+2$ ，

代入抛物线的方程得 $y^2=8(my-4m+2)$ ，即 $y^2-8my+32m-16=0$ ，

则 $y_1+4=8m$ ，故 $y_1=8m-4$ ，

所以 $x_1=my_1-4m+2=m(8m-4)-4m+2=8m^2-8m+2$ ，

即 $B(8m^2-8m+2, 8m-4)$ ，

设 AC ： $-m(y-4)=x-2$ ，即 $x=-my+4m+2$ ，

同理可得 $y_2=-8m-4$ ，则 $x_2=-my_2+4m+2=-m(-8m-4)+4m+2=8m^2+8m+2$ ，

即 $C(8m^2+8m+2, -8m-4)$

直线 BC 的斜率 $k_{BC}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{16m}{-16m}=-1$ ，

所以直线 BC 的斜率为定值.

3. (2023·广东佛山·校考模拟预测) 已知点 A 为直线 $l: x+1=0$ 上的动点，过点 A 作射线 AP (点 P 位于直线 l 的右侧) 使得 $AP \perp l, F(1, 0)$ ，设线段 AF 的中点为 B，设直线 PB 与 x 轴的交点为 T, $PF=TF$.

(1) 求动点 P 的轨迹 C 的方程.

(2) 设过点 $Q(0, 2)$ 的两条射线分别与曲线 C 交于点 M, N，设直线 QM, QN 的斜率分别为 k_1, k_2 ，若 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 2$ ，请判断直线 MN 的斜率是否为定值以及其是否过定点，若斜率为定值，请计算出定值；若过定点，请计算出定点.

【答案】(1) $y^2=4x(x \neq 0)$

(2) 是，定值 1；定点 $(2, 2)$.

【分析】(1) 设点 P 的坐标为 (x_0, y_0) ，得到直线 PB 的方程，从而求出 T 的坐标，再根据 $PF=TF$ ，求出动点轨迹方程；

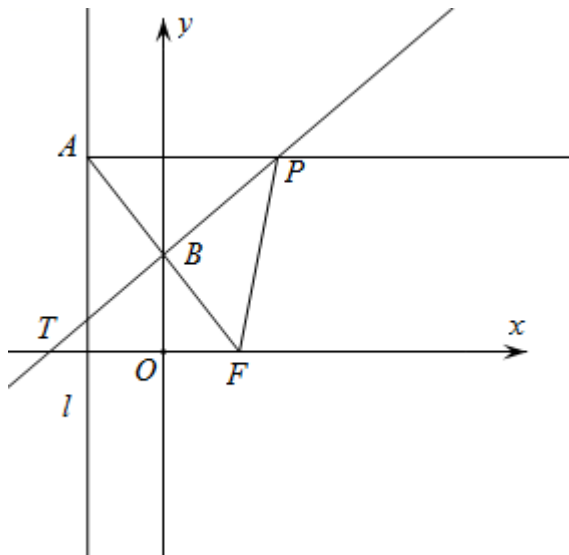
(2) 设直线 MN 的方程为 $x=ty+m$ ， $M(x_1, y_1)$ ， $N(x_2, y_2)$ ，联立直线与抛物线方程，消元、列出韦达定理，利用斜率公式及 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = 2$ 求出 t 的值或 t、m 的关系，即可得解.

【详解】(1) 设点 P 的坐标为 (x_0, y_0) ，点 $A(-1, y_0)$ ，

其中 A 、 $F(1,0)$ 的中点为 $\left(0, \frac{y_0}{2}\right)$ ，由此可得直线 PB 的方程为 $y = \frac{y_0}{2x_0}x + \frac{y_0}{2} (x \neq 0)$ ，

可得点 T 的坐标为 $(-x_0, 0)$ ，再结合 $PF = TF$ 可得 $\sqrt{(x_0 - 1)^2 + y_0^2} = |x_0 + 1|$ ，

整理得 $y_0^2 = 4x_0$ ，所以动点 P 的轨迹 C 的方程为： $y^2 = 4x (x \neq 0)$ 。



(2) 设直线 MN 的方程为 $x = ty + m$ ，联立直线 MN 与 C 的方程可得： $y^2 - 4ty - 4m = 0$ ，

设点 M, N 的坐标为 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，根据韦达定理可得 $y_1 + y_2 = 4t$ ， $y_1 \cdot y_2 = -4m$ ，

其中 $k_1 = \frac{y_1 - 2}{x_1}, k_2 = \frac{y_2 - 2}{x_2}$ ，结合条件可得： $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{x_1}{y_1 - 2} + \frac{x_2}{y_2 - 2} = 2$ ，

整理可得 $x_1 y_2 + x_2 y_1 - 2(x_1 + x_2) = 2y_1 \cdot y_2 - 4(y_1 + y_2) + 8$ ，

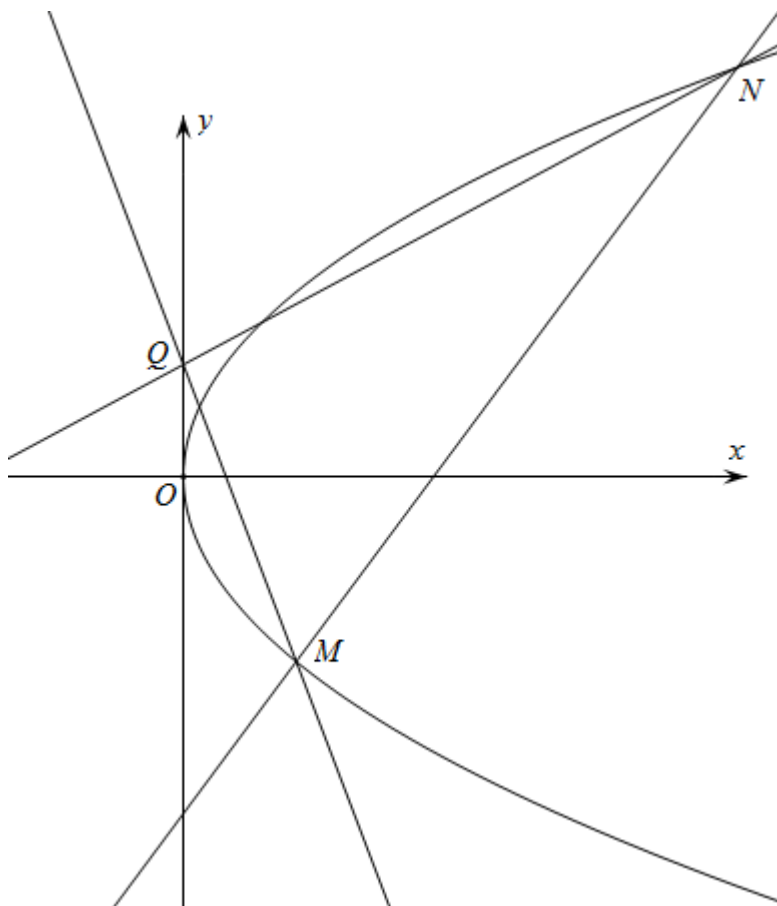
结合直线 MN 的方程可化简为： $(2t - 2)y_1 y_2 + (m - 2t + 4)(y_1 + y_2) = 4m + 8$ ，

代入韦达定理可得 $2t^2 + mt - 4t - m + 2 = 0$ ，

通过分解因式可得 $(t - 1)(2t + m - 2) = 0$ 即可得 $t = 1$ 或 $m = 2 - 2t$ ，

当 $t = 1$ 时，直线 MN 的斜率为定值 1；

当 $m = 2 - 2t$ 时，直线 MN 恒过定点 $(2, 2)$ 。



4. (2023·广东惠州·统考模拟预测) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 F , 点 $A(-2, 0)$ 在椭圆上且 $|AF| = 3$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 点 P, Q 分别在椭圆 C 和直线 $x=4$ 上, $OQ \parallel AP$, M 为 AP 的中点, 若 T 为直线 OM 与直线 QF 的交点. 是否存在一个确定的曲线, 使得 T 始终在该曲线上? 若存在, 求出该曲线的轨迹方程; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 存在, $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

【分析】(1) 利用待定系数法求出椭圆 C 的方程;

(2) 设 $P(x_0, y_0) (x_0 \neq \pm 2)$, 表示出直线 OQ 的方程, 定点 $Q\left(4, \frac{4y_0}{x_0 + 2}\right)$ 和

$M\left(\frac{x_0 - 2}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$.

进而求出 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{FQ} = \frac{3(x_0^2 - 4) + 4y_0^2}{2(x_0 + 2)}$, 把 $3x_0^2 = 12 - 4y_0^2$ 代入得 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{FQ} = 0$, 从而

$OM \perp FQ$ ，判断出点 T 始终在以 OF 为直径的圆上，即可求解。

【详解】(1) 因为椭圆 C 过点 $A(-2, 0)$ ，所以 $a = 2$ 。

因为 $|AF| = 3$ ，所以 $a + c = 3$ ，得 $c = 1$ 。

故 $b^2 = a^2 - c^2 = 3$ ，

从而椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) 设 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq \pm 2$)，则直线 AP 的斜率为 $\frac{y_0}{x_0 + 2}$ 。

因为 $OQ \parallel AP$ ，所以直线 OQ 的方程为 $y = \frac{y_0}{x_0 + 2}x$ 。

令 $x = 4$ 可得 $y = \frac{4y_0}{x_0 + 2}$ ，所以 $Q\left(4, \frac{4y_0}{x_0 + 2}\right)$ ，

又 M 是 AP 的中点，所以 $M\left(\frac{x_0 - 2}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$ 。

从而 $\overrightarrow{OM} = \left(\frac{x_0 - 2}{2}, \frac{y_0}{2}\right)$ ， $\overrightarrow{FQ} = \left(3, \frac{4y_0}{x_0 + 2}\right)$

所以 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{FQ} = \frac{3(x_0 - 2)}{2} + \frac{2y_0^2}{x_0 + 2} = \frac{3(x_0^2 - 4) + 4y_0^2}{2(x_0 + 2)}$ ①

因为点 P 在椭圆 C 上，所以 $\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{3} = 1$ ，故 $3x_0^2 = 12 - 4y_0^2$ ，

代入式①可得 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{FQ} = 0$ ，从而 $OM \perp FQ$ ，

所以，点 T 始终在以 OF 为直径的圆上，且该圆方程为 $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

5. (2023·广东佛山·统考一模) 已知椭圆 $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左焦点为 $F(-1, 0)$ ，

左、右顶点及上顶点分别记为 A 、 B 、 C ，且 $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CB} = 1$ 。

(1) 求椭圆 Γ 的方程；

(2) 设过 F 的直线 PQ 交椭圆 Γ 于 P 、 Q 两点，若直线 PA 、 QA 与直线 $l: x + 4 = 0$ 分别交于 M 、 N 两点， l 与 x 轴的交点为 K ，则 $|MK| \cdot |KN|$ 是否为定值？若为定值，请求出该定值；若不为定值，请说明理由。

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 为定值 9

【分析】(1) 首先表示 C 、 B 的坐标，即可得到 $\overrightarrow{CF}$ ， $\overrightarrow{CB}$ ，根据 $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CB} = 1$ 及 $b^2 = a^2 - c^2$

，求出 a ，即可求出 b^2 ，从而得解；

(2) 设直线 PQ 的方程为 $x = my - 1$ ， $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ ，联立直线与椭圆方程，消元、列出韦达定理，即可得到直线 PA 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$ ，令 $x = -4$ 求出 y_M ，同理得到 y_N ，则 $|MK| \cdot |KN| = |y_M y_N|$ ，代入计算可得。

【详解】(1) 解：依题意 $C(0, b)$ ， $B(a, 0)$ ， $F(-1, 0)$ ，所以 $\overrightarrow{CF} = (-1, -b)$ ， $\overrightarrow{CB} = (a, -b)$ ，

由 $\overrightarrow{CF} \cdot \overrightarrow{CB} = 1$ ，可得 $b^2 - a = 1$ ，即 $a^2 - a - 2 = 0$ ，解得 $a = 2$ 或 $a = -1$ （舍去），故 $a^2 = 4$ ， $b^2 = 3$ ，

所以椭圆 Γ 的方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 。

(2) 解：设直线 PQ 的方程为 $x = my - 1$ ， $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ ，

联立 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，消去 x 整理得 $(3m^2 + 4)y^2 - 6my - 9 = 0$ ，

所以 $y_1 + y_2 = \frac{6m}{3m^2 + 4}$ ， $y_1 y_2 = \frac{-9}{3m^2 + 4}$ ，

直线 PA 的方程为 $y = \frac{y_1}{x_1 + 2}(x + 2)$ ，令 $x = -4$ ，得 $y_M = \frac{-2y_1}{x_1 + 2} = \frac{-2y_1}{my_1 + 1}$ ，

同理可得 $y_N = \frac{-2y_2}{my_2 + 1}$ ，

所以 $|MK| \cdot |KN| = |y_M y_N| = \left| \frac{-2y_1}{my_1 + 1} \cdot \frac{-2y_2}{my_2 + 1} \right| = \left| \frac{4y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 + m(y_1 + y_2) + 1} \right|$

$\left| \frac{\frac{-36}{3m^2 + 4}}{\frac{-9m^2}{3m^2 + 4} + \frac{6m^2}{3m^2 + 4} + 1} \right| = 9$ ，

故 $|MK| \cdot |KN|$ 为定值 9。

6. (2023·广东江门·统考一模) 已知 M 是平面直角坐标系内的一个动点，直线 MA 与直线 $y = x$ 垂直， A 为垂足且位于第一象限，直线 MB 与直线 $y = -x$ 垂直， B 为垂足且位于第四象限，四边形 $OAMB$ (O 为原点) 的面积为 8，动点 M 的轨迹为 C 。

(1) 求轨迹 C 的方程；

(2) 已知 $T(5, 3)$ 是轨迹 C 上一点，直线 l 交轨迹 C 于 P, Q 两点，直线 TP, TQ 的斜率之和为 1， $\tan \angle PTQ = 1$ ，求 $\triangle TPQ$ 的面积。

【答案】(1) $x^2 - y^2 = 16$ ($x \geq 4$)

(2) $\frac{55}{3}$

【分析】(1) 设动点 $M(x_0, y_0)$ ，由题意知 $|AM| = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}}$ ， $|BM| = \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}}$ ，由题意 $\frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}} = 8$ ，化简可得轨迹 C 的方程：

(2) 设直线 TP 的倾斜角为 α ，斜率为 k ，直线 TQ 倾斜角为 β ，则 TQ 斜率为 $1-k$ ， $\tan \alpha = k$ ， $\tan \beta = 1-k$ ，由过点 T 直线与曲线 C 有两个交点确定 k 的范围，由 $\tan \angle PTQ = \tan(\beta - \alpha) = 1$ ，解得 $k = 3$ ，从而可得直线 TP 、 TQ 的方程，与曲线 C 的方程联立解得 P, Q 的坐标，求出 $|PT|$ 及点 Q 到直线 TP 的距离 d ，即可求出 $\triangle TPQ$ 的面积。

【详解】(1) 设动点 $M(x_0, y_0)$ ，由题意知 M 只能在直线 $y = x$ 与直线 $y = -x$ 所夹的范围内活动。

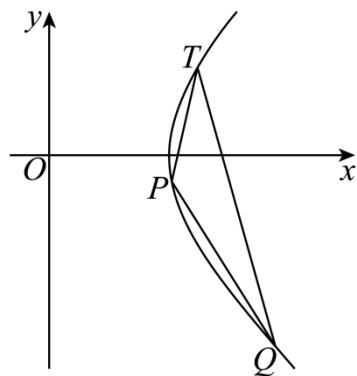
$$|AM| = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}}, \quad |BM| = \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}},$$

动点 $M(x_0, y_0)$ 在 $y = x$ 右侧，有 $x_0 - y_0 > 0$ ，同理有 $x_0 + y_0 > 0$ ，

$\therefore$ 四边形 $OAMB$ 的面积为 8， $\therefore \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} \cdot \frac{|x_0 + y_0|}{\sqrt{2}} = 8$ ，即 $x_0^2 - y_0^2 = 16$ ，

所以所求轨迹 C 方程为 $x^2 - y^2 = 16$ ($x \geq 4$)。

(2) 如图，设直线 TP 的倾斜角为 α ，斜率为 k ，直线 TQ 倾斜角为 β ，则 TQ 斜率为 $1-k$ ，



$\tan \alpha = k$ ， $\tan \beta = 1-k$ ， $T(5, 3)$ 在曲线 C 上，过点 T 直线与曲线 C 有两个交点，

则 $k > 1$ 或 $k < -1$ ，同时 $1-k > 1$ 或 $1-k < -1$ ，解得 $k > 2$ 或 $k < -1$ 。

$\tan \angle PTQ = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan \beta - \tan \alpha}{1 + \tan \beta \tan \alpha} = \frac{1-k-k}{1+(1-k)k} = 1$ ，解得 $k = 3$ 或 $k = 0$ (舍去)。

$k = 3$ 时，直线 TP 的方程为 $y = 3x - 12$ ，

联立 $\begin{cases} y = 3x - 12 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$ ，消 y 得： $x^2 - 9x + 20 = 0$ ，则 $x = 4$ 或 $x = 5$ ，得 $P(4, 0)$ 。

直线 TQ 的方程为 $y = -2x + 13$,

联立 $\begin{cases} y = -2x + 13 \\ x^2 - y^2 = 16 \end{cases}$, 消 y 得: $3x^2 - 52x + 185 = 0$, 则 $x = \frac{37}{3}$ 或 $x = 5$, 得 $Q\left(\frac{37}{3}, -\frac{35}{3}\right)$,

$$|PT| = \sqrt{(5-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10},$$

点 Q 到直线 TP 的距离 $d = \frac{\left|37 + \frac{35}{3} - 12\right|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{110}{3\sqrt{10}}$,

$$S_{\triangle TPQ} = \frac{1}{2} \times |TP| \times d = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{110}{3\sqrt{10}} = \frac{55}{3}.$$

方法二: $|PT| = \sqrt{(5-4)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{10}$,

$$|TQ| = \sqrt{\left(5 - \frac{37}{3}\right)^2 + \left(3 + \frac{35}{3}\right)^2} = \frac{22\sqrt{5}}{3},$$

$$\tan \angle PTQ = 1, \text{ 则 } \sin \angle PTQ = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$S_{\triangle TPQ} = \frac{1}{2} |TP| |TQ| \sin \angle PTQ = \frac{1}{2} \times \sqrt{10} \times \frac{22\sqrt{5}}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{55}{3}.$$

7. (2023·广东佛山·华南师大附中南海实验高中校考模拟预测) 在椭圆

$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 中, $c = 2$, 过点 $(0, b)$ 与 $(a, 0)$ 的直线的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 设 F 为椭圆 C 的右焦点, P 为直线 $x = 3$ 上任意一点, 过 F 作 PF 的垂线交椭圆 C 于 M, N 两点, 求 $\frac{|MN|}{|PF|}$ 的最大值.

【答案】(1) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) 最大值为 $\sqrt{3}$.

【分析】(1) 利用两点的斜率公式及椭圆中 a, b, c 的关系即可求解;

(2) 根据横截式方程设出直线 MN 的方程, 联立直线 MN 的方程与椭圆方程, 利用韦达定理及弦长公式, 结合两点间的距离公式及基本不等式即可求解.

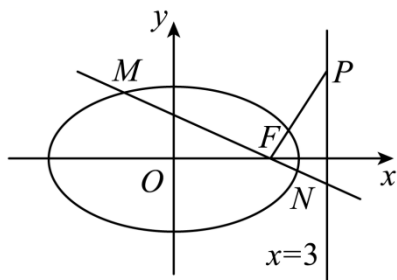
【详解】(1) 过点 $(0, b)$ 与 $(a, 0)$ 的直线的斜率为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$$\text{所以 } \frac{b}{-a} = -\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 即 } a = \sqrt{3}b,$$

$$\text{又 } c = 2, \text{ 即 } a^2 = b^2 + 4, \text{ 解得 } b^2 = 2, a^2 = 6,$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的标准方程是 } \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1.$$

(2) 由题知 $F(2, 0)$, 作出图形如图所示



设点 $P(3, m)$ ，则直线 FP 的斜率为 $k_{FP} = m$ 。

当 $m \neq 0$ 时，直线 MN 的斜率 $k_{MN} = -\frac{1}{m}$ ，直线 MN 的方程是 $x = -my + 2$ ；

当 $m = 0$ 时，直线 MN 的方程是 $x = 2$ ，也符合 $x = -my + 2$ 的形式，

将直线 MN 的方程 $x = -my + 2$ 代入椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ 方程得

$$(m^2 + 3)y^2 - 4my - 2 = 0, \text{ 且 } \Delta = (-4m)^2 + 8(m^2 + 3) = 24m^2 + 24 > 0,$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 则 } y_1 + y_2 = \frac{4m}{m^2 + 3}, y_1 y_2 = -\frac{2}{m^2 + 3}.$$

$$\text{所以 } |MN| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(m^2 + 1)(y_1 - y_2)^2} = \sqrt{(m^2 + 1)[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2]}$$

$$= \sqrt{(m^2 + 1) \cdot \frac{24m^2 + 24}{(m^2 + 3)^2}} = \sqrt{24} \cdot \frac{m^2 + 1}{m^2 + 3}$$

$$\text{又 } |PF| = \sqrt{m^2 + 1}, \text{ 令 } t = \sqrt{m^2 + 1} (t \geq 1), \text{ 则}$$

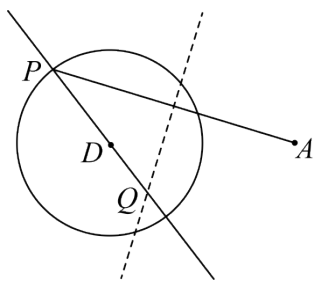
$$\frac{|MN|}{|PF|} = \sqrt{24} \cdot \frac{t}{t^2 + 2} = \frac{\sqrt{24}}{t + \frac{2}{t}} \leq \frac{\sqrt{24}}{2\sqrt{2}} = \sqrt{3},$$

$$\text{当且仅当 } t = \frac{2}{t}, \text{ 即 } t = \sqrt{2} \text{ 时等号成立,}$$

$$\text{由 } t = \sqrt{m^2 + 1} = \sqrt{2}, \text{ 解得 } m^2 = 1,$$

所以 $\frac{|MN|}{|PF|}$ 的最大值为 $\sqrt{3}$ 。

8. (2023·广东深圳·校考二模) 中国是纸的故乡，折纸也是起源于中国.后来数学家将几何学原理运用到折纸中，并且利用折纸来研究几何学，很好的把折纸艺术与数学相结合.将一张纸片折叠一次，纸片上会留下一条折痕，如果在纸片上按照一定的规律折出很多折痕后，纸上能显现出一条漂亮曲线的轮廓.如图，一张圆形纸片的圆心为点 D ， A 是圆外的一个定点， P 是圆 D 上任意一点，把纸片折叠使得点 A 与 P 重合，然后展平纸片，折痕与直线 DP 相交于点 Q ，当点 P 在圆上运动时，得到点 Q 的轨迹.



(1)证明：点 Q 的轨迹是双曲线；

(2)设定点 A 坐标为 $(2,0)$ ，纸片圆的边界方程为 $(x+2)^2 + y^2 = r^2$.若点 $M(2,3)$ 位于 (1) 中所描述的双曲线上，过点 M 的直线 l 交该双曲线的渐近线于 E, F 两点，且点 E, F 位于 y 轴右侧， O 为坐标原点，求 $\angle EOF$ 面积的最小值.

【答案】(1)证明见解析.

(2) $\sqrt{3}$

【分析】(1) 利用双曲线的定义即可证得结果.

(2) 利用直线与双曲线的位置关系即可求得结果.

【详解】(1) 证明：设圆 D 半径为 r ，由题意知 $|QA| = |QP|$ ，

所以 $||QA| - |QD|| = ||QP| - |QD|| = |DP| = r$ ，

因此，动点 Q 到定点 A 和 D 的距离之差的绝对值为定值 r ，且 $r < |DA|$ ，

由双曲线定义知，点 Q 的轨迹是以 A, D 为焦点的双曲线.

(2) 由 (1) 知双曲线中 $2a = r$ ， $2c = 4$ ，设双曲线方程为 $\frac{x^2}{\frac{r^2}{4}} - \frac{y^2}{4 - \frac{r^2}{4}} = 1$ ，

又点 $M(2,3)$ 在双曲线上， $\frac{4}{\frac{r^2}{4}} - \frac{9}{4 - \frac{r^2}{4}} = 1$ ，解得 $r = 2$ ，因此双曲线方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ ，

渐近线为 $y = \pm\sqrt{3}x$ ，则 $\angle EOA = \angle AOF = \frac{1}{2}\angle EOF = \frac{\pi}{3}$.

①直线 l 斜率不存在，此时 $\angle EOF$ 为顶角为 $\frac{2\pi}{3}$ 的等腰三角形，且 $|OE| = 4$ ，所以

$S_{\angle EOF} = 4\sqrt{3}$ ；

②若直线 l 斜率存在，设为： $y = k(x-2) + 3$ ，联立双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ ，得：

$(3-k^2)x^2 + (4k^2-6k)x - 4k^2 + 12k - 12 = 0$.

因为直线 l 交双曲线于 y 轴右侧于两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ ，

所以 $\Delta = (4k^2 - 6k)^2 - 4(3 - k^2)(-4k^2 + 12k - 12) \geq 0$ ，且 $x_1 + x_2 = \frac{6k - 4k^2}{3 - k^2} > 0$ ，

$x_1 x_2 = \frac{-4k^2 + 12k - 12}{3 - k^2} > 0$ ；解得 $k < -\sqrt{3}$ 或 $k > \sqrt{3}$ 。

设 $E(x_3, y_3)$ ， $F(x_4, y_4)$ ，联立直线和渐近线方程解得： $x_3 = \frac{3-2k}{\sqrt{3}-k}$ ， $x_4 = \frac{3-2k}{-\sqrt{3}-k}$ ，

所以 $|OE| = \frac{|x_3|}{\cos \angle EOA} = 2|x_3|$ ， $|OF| = \frac{|x_4|}{\cos \angle FOA} = 2|x_4|$ ，

$$S_{\triangle EOF} = \frac{1}{2} \cdot |OE| \cdot |OF| \sin \angle EOF = \frac{1}{2} \cdot 2|x_3| \cdot 2|x_4| \sin \frac{2\pi}{3}$$

$$= \sqrt{3} |x_3 x_4| = \frac{\sqrt{3}(3-2k)^2}{k^2-3} = 4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} \cdot \frac{7-4k}{k^2-3}，$$

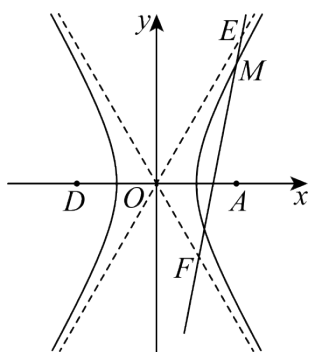
$$\text{令 } f(k) = \frac{7-4k}{k^2-3}，f'(k) = \frac{2(2k-3)(k-2)}{(k^2-3)^2}，$$

当 $k < -\sqrt{3}$ 时， $f'(k) > 0$ ， $f(k)$ 单调递增，且 $f(k) > 0$ ，此时 $S_{\triangle EOF} > 4\sqrt{3}$ 。

当 $\sqrt{3} < k < 2$ 时， $f'(k) < 0$ ， $f(k)$ 单调递减，当 $k > 2$ 时， $f'(k) > 0$ ， $f(k)$ 单调递增所

以 $f(k)$ 的极小值为 $f(2) = -1$ ，此时 $S_{\triangle EOF} = \sqrt{3}$ 。

综上所述， $\triangle EOF$ 面积的最小值为 $\sqrt{3}$ ，此时 $k = 2$ 且 $\Delta = 0$ ，即直线 l 与双曲线相切。



【点睛】方法点睛：圆锥曲线中关于最值的求解方法主要有：①二次函数型，利用二次函数最值求解；②基本不等式法，借助基本不等式求解最值；③导数法，利用导数求解最值。

9. (2023·广东深圳·校考一模) 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长是短轴长的 $\sqrt{2}$ 倍，过椭圆 C 的右焦点 F 的直线 l 与 C 交于 P, Q 两点，且当直线 l 的倾斜角为 45° 时， $|PQ| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 若点 P 在 x 轴上方， E 为线段 PF 的中点，椭圆 C 的左焦点为 F' ，直线 PO (O 为坐标原点) 与 EF' 交于点 A ，求 $\frac{S_{\triangle QF'A}}{S_{\triangle PQF'}}$ (S 表示面积) 的取值范围。

【答案】(1) $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$

(2) $\left(\frac{6-\sqrt{2}}{12}, \frac{6+\sqrt{2}}{12}\right)$

【分析】第一问先求出 a 、 b 的关系式，再联立直线 l 与椭圆方程解出 b 即可. 第二问由

$S_{\triangle QF'A} = S_{\triangle OQF'} + S_{\triangle OAF'} + S_{\triangle OAQ}$ 求得 $S_{\triangle QF'A}$ ，再求 $S_{\triangle PQF'}$ ，联立直线 l 与椭圆方程，消去参

数即可求 $\frac{S_{\triangle QF'A}}{S_{\triangle PQF'}}$ 的取值范围.

【详解】(1) 依题意， $2a = 2\sqrt{2}b$ ，得 $a^2 = 2b^2$ ，

则椭圆 $C: \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

设直线 l 的斜率为 k .

由题易知 $F(b, 0)$ ，故当倾斜角为 45° 时，直线 $l: y = x - b$.

联立 $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 2b^2 = 0 \\ y = x - b \end{cases}$ 可得 $3x^2 - 4bx = 0$ ，解得 $x = 0$ 或 $x = \frac{4}{3}b$.

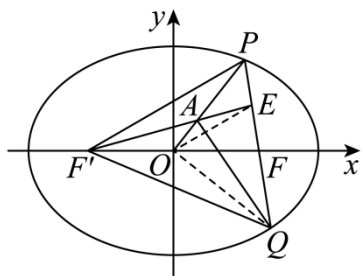
故 $|PQ| = \sqrt{1+1} \cdot \left| \frac{4}{3}b - 0 \right| = \frac{4\sqrt{2}}{3}b = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ ，解得 $b = 1$.

故椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 依题意， $F'(-1, 0), F(1, 0)$.

设 $P(x_1, y_1), Q(x_2, y_2)$ ，则 $y_1 > 0, y_2 < 0$.

如图，连接 OE, OQ ，



因为 O, E 分别为线段 FF', PF 的中点，

所以 $\frac{OE}{PF'} = \frac{OA}{AP} = \frac{1}{2}$ ，

$$S_{\triangle QF'A} = S_{\triangle OQF'} + S_{\triangle OAF'} + S_{\triangle OAQ} = S_{\triangle OQF'} + \frac{1}{3}S_{\triangle POF'} + \frac{1}{3}S_{\triangle POQ}$$

$$= -\frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{6}(y_1 - y_2) = \frac{1}{3}(y_1 - 2y_2),$$

$\triangle PQF'$ 的面积为 $S_{\triangle PQF'} = y_1 - y_2$.

记 $\frac{S_{\triangle QF'A}}{S_{\triangle PQF'}} = \lambda = \frac{y_1 - 2y_2}{3(y_1 - y_2)}$, 得 $\frac{y_1}{y_2} = \frac{3\lambda - 2}{3\lambda - 1}$.

设直线 $l: x = ty + 1$, 与椭圆 C 的方程联立, 消去 x 得 $(t^2 + 2)y^2 + 2ty - 1 = 0$,

由根与系数的关系可得 $y_1 + y_2 = \frac{-2t}{t^2 + 2}$, $y_1 y_2 = \frac{-1}{t^2 + 2}$.

令 $y_1 = my_2$, 其中 $m = \frac{3\lambda - 2}{3\lambda - 1}$,

则 $\begin{cases} m < 0 \\ (m+1)y_2 = \frac{-2t}{t^2 + 2} \text{ 可得 } \frac{(m+1)^2}{m} = \frac{-4t^2}{t^2 + 2} \\ my_2^2 = \frac{-1}{t^2 + 2} \end{cases}$.

当 $t = 0$ 时, $\frac{(m+1)^2}{m} = 0, m = -1$, 此时 $\lambda = \frac{1}{2}$.

当 $t \neq 0$ 时, $\frac{(m+1)^2}{m} = \frac{-4}{1 + \frac{2}{t^2}} \in (-4, 0)$, 所以 $-4 < \frac{(m+1)^2}{m} < 0$,

又 $m < 0$, 解得 $-3 - 2\sqrt{2} < m < -3 + 2\sqrt{2}$.

所以 $-3 - 2\sqrt{2} < \frac{3\lambda - 2}{3\lambda - 1} < -3 + 2\sqrt{2}$, 解得 $\frac{6 - \sqrt{2}}{12} < \lambda < \frac{6 + \sqrt{2}}{12}$,

又因为 $\frac{6 - \sqrt{2}}{12} < \frac{1}{2} < \frac{6 + \sqrt{2}}{12}$,

所以实数 λ 的取值范围是 $\left(\frac{6 - \sqrt{2}}{12}, \frac{6 + \sqrt{2}}{12}\right)$.

10. (2023·广东·统考模拟预测) 已知圆 O 的方程为 $x^2 + y^2 = 4$, P 为圆上动点, 点 F 坐标为 $(1, 0)$, 连 OP , FP . 过点 P 作直线 FP 的垂线 l , 线段 FP 的中垂线交 OP 于点 M , 直线 FM 交 l 于点 A .

(1) 求点 A 的轨迹方程;

(2) 记点 A 的轨迹为曲线 C , 过点 $G(4, 0)$ 作斜率不为 0 的直线 n 交曲线 C 于不同两点 S ,

R , 直线 $x = 1$ 与直线 n 交于点 H , 记 $\lambda = \frac{S_{\triangle HFR}}{S_{\triangle HFS}}$, $\mu = \frac{S_{\triangle GFS}}{S_{\triangle GFR}}$, 问: $\lambda \cdot \mu$ 是否为定值?若是,

求出该定值; 若不是, 请说明理由.

【答案】(1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 1; 理由见解析

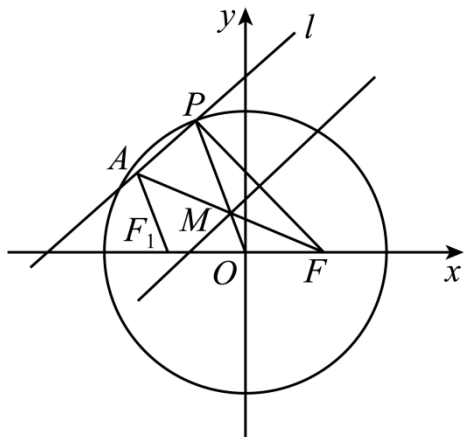
(2) 首先根据面积公式, 理由线段比值表示 λ, μ , 再设直线 $n: x = ty + 4$, 与椭圆方程联立, 利用坐标表示 $\lambda \cdot \mu$.

所以 $|AF_1| = 2|OM|$,

$$|AF_1| + |AF| = 2|OM| + 2|MF| = 2|OM| + 2|MP| = 2(|OM| + |MP|),$$

$$= 2|OP| = 4 > |F_1F_2|,$$

所以点 A 的轨迹方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$;


$$\lambda = \frac{S_{VHFR}}{S_{VHFS}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot HR \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot HS \cdot h} = \frac{HR}{HS}, \quad \mu = \frac{S_{VGFS}}{S_{VGFR}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot GS \cdot h}{\frac{1}{2} \cdot GR \cdot h} = \frac{GS}{GR},$$

$$\lambda\mu = \frac{HR \cdot GS}{HS \cdot GR} = \frac{(y_2 - y_H)y_1}{(y_H - y_1)y_2},$$

设直线 $n: x = ty + 4$ ，令 $x = 1$ ， $H\left(1, -\frac{3}{t}\right)$ ，

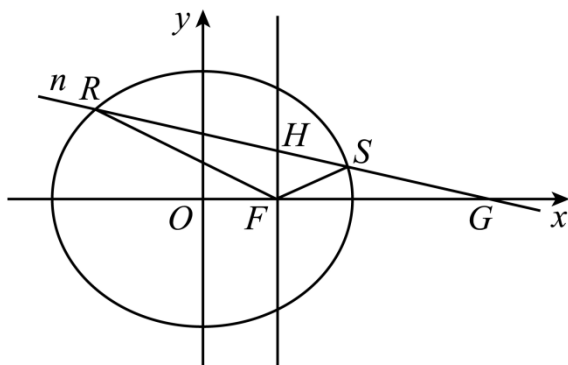
$$\text{进而 } \lambda\mu = \frac{\left(y_2 + \frac{3}{t}\right)y_1}{\left(-\frac{3}{t} - y_1\right)y_2} = \frac{ty_1y_2 + 3y_1}{-3y_2 - ty_1y_2},$$

$$\text{联立} \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x = ty + 4 \end{cases}, \text{消去 } x, \text{得} (3t^2 + 4)y^2 + 24ty + 36 = 0,$$

所以 $y_1 + y_2 = \frac{-24t}{3t^2 + 4}$, $y_1 y_2 = \frac{36}{3t^2 + 4}$, $ty_1 y_2 = -\frac{3}{2}(y_1 + y_2)$,

$$\text{所以 } \lambda\mu = \frac{-\frac{3}{2}(y_1+y_2)+3y_1}{-3y_2+\frac{3}{2}(y_1+y_2)} = \frac{\frac{3}{2}(y_1-y_2)}{\frac{3}{2}(y_1-y_2)} = 1,$$

所以 $\lambda \cdot \mu$ 是定值为 1.



11. (2023·广东茂名·统考二模) 已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$

的左、右焦点, P 为渐近线上一点, 且 $\sqrt{3}|PF_1| = \sqrt{7}|PF_2|$, $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{\sqrt{21}}{7}$.

(1) 求双曲线的离心率;

(2) 若双曲线 E 实轴长为 2, 过点 F_2 且斜率为 k 的直线 l 交双曲线 C 的右支不同的 A, B

两点, Q 为 x 轴上一点且满足 $|QA| = |QB|$, 试探究 $\frac{2|QF_2|}{|AF_1| + |BF_1| - 4}$ 是否为定值, 若是, 则

求出该定值; 若不是, 请说明理由.

【答案】 (1) 2

(2) 是, 2

【分析】 (1) 判断出 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形, 利用边长关系得到 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$, 利用齐次式法

求出离心率; (2) 利用“设而不求法”表示出 $|QF_2|$, $|AB|$, 利用双曲线的定义得到

$|AF_1| + |BF_1| - 4 = |AB|$, 进而证明出 $\frac{2|QF_2|}{|AF_1| + |BF_1| - 4}$ 为定值.

【详解】 (1) 由 $\sqrt{3}|PF_1| = \sqrt{7}|PF_2|$, 可设 $|PF_1| = \sqrt{7}x$, $|PF_2| = \sqrt{3}x$

在 $\triangle PF_1F_2$ 中, 因为 $\cos \angle F_1PF_2 = \frac{\sqrt{21}}{7}$,

所以 $|F_1F_2|^2 = 7x^2 + 3x^2 - 2\sqrt{7}x \cdot \sqrt{3}x \cdot \frac{\sqrt{21}}{7} = 4x^2$, 即 $|F_1F_2| = 2x$,

所以 $|PF_1|^2 = |PF_2|^2 + |F_1F_2|^2$, 即 $\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形.

所以在 $\triangle OPF_2$ 中, $PF_2 \perp OF_2$, $|PF_2| = \sqrt{3}x$, $|OF_2| = x$, 所以 $\frac{b}{a} = \frac{|PF_2|}{|OF_2|} = \sqrt{3}$,

则双曲线的离心率为 $e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} = \sqrt{1+3} = 2$.

(2) 由 (1) 可知在双曲线 E 中有 $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ 且实轴长为 2, 所以 $a = 1$, $b = \sqrt{3}$

所以双曲线 E 方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$.

由 $F_2(2, 0)$, 故设斜率为 k 的直线 l 为 $y = k(x - 2)$,

$$\text{联立} \begin{cases} y = k(x - 2) \\ x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \end{cases}, \text{ 可得 } (3 - k^2)x^2 + 4k^2x - 4k^2 - 3 = 0,$$

因为直线 l 与双曲线右支交于不同两点, 所以
$$\begin{cases} \Delta = 36(k^2 + 1) > 0 \\ \frac{-4k^2}{3 - k^2} > 0 \\ \frac{-4k^2 - 3}{3 - k^2} > 0 \end{cases}, \text{ 解得: } k^2 > 3.$$

设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{4k^2}{k^2 - 3}$, $x_1x_2 = \frac{4k^2 + 3}{k^2 - 3}$,

则 $\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2k^2}{k^2 - 3}$, $\frac{y_1 + y_2}{2} = k\left(\frac{2k^2}{k^2 - 3} - 2\right) = \frac{6k}{k^2 - 3}$,

即 A, B 的中点坐标为 $\left(\frac{2k^2}{k^2 - 3}, \frac{6k}{k^2 - 3}\right)$,

因为 Q 为 x 轴上一点, 满足 $|QA| = |QB|$, 故 Q 为 AB 的垂直平分线与 x 轴的交点,

AB 的垂直平分线的方程为: $y - \frac{6k}{k^2 - 3} = -\frac{1}{k}\left(x - \frac{2k^2}{k^2 - 3}\right)$,

令 $y = 0$, 则得 $x = \frac{8k^2}{k^2 - 3}$, 即 $Q\left(\frac{8k^2}{k^2 - 3}, 0\right)$,

所以 $|QF_2| = \left|\frac{8k^2}{k^2 - 3} - 2\right| = \frac{6(k^2 + 1)}{|k^2 - 3|}$,

又 $|AB| = \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2}$

$= \sqrt{1 + k^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{4k^2}{k^2 - 3}\right)^2 - 4 \times \frac{4k^2 + 3}{k^2 - 3}} = \frac{6(k^2 + 1)}{|k^2 - 3|}$

又因为 A, B 在双曲线的右支上, 故 $|AF_1| - |AF_2| = 2a = 2$, $|BF_1| - |BF_2| = 2$,

故 $|AF_1| + |BF_1| - |AF_2| - |BF_2| = 4$ ，即 $|AF_1| + |BF_1| - 4 = |AB|$ ，

$$\text{故 } \frac{2|QF_2|}{|AF_1| + |BF_1| - 4} = \frac{2|QF_2|}{|AB|} = \frac{2 \cdot \frac{6(k^2+1)}{|k^2-3|}}{\frac{6(k^2+1)}{|k^2-3|}} = 2, \text{ 即 } \frac{2|QF_2|}{|AF_1| + |BF_1| - 4} \text{ 为定值.}$$

12. (2023·广东广州·统考模拟预测) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$ ，直线 l 过 C 的右焦点 F 且与 C 交于 M, N 两点.

(1) 若 M, N 两点均在双曲线 C 的右支上，求证： $\frac{1}{|MF|} + \frac{1}{|NF|}$ 为定值；

(2) 试判断以 MN 为直径的圆是否过定点？若经过定点，求出定点坐标；若不过定点，请说明理由.

【答案】(1) 证明见解析

(2) 圆过定点 $(-2, 0)$

【分析】(1) 设直线 $MN: x = ty + 4$ ，与双曲线方程联立得出韦达定理，根据弦长公式表示 $|MF|, |NF|$ ，再代入求得结果.

(2) 表示圆的方程，由对称性可知定点在 x 轴上，令 $y = 0$ 进行求解即可.

【详解】(1) 如图，

由 $F(4, 0)$ ，设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$ ，直线 $MN: x = ty + 4$ ，

代入 $3x^2 - y^2 = 12$ ，整理得： $(3t^2 - 1)y^2 + 24ty + 36 = 0$ ，

$$\text{由 } \begin{cases} \Delta > 0 \\ y_1 y_2 < 0 \end{cases} \text{ 解得： } t \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$\text{由韦达定理： } y_1 + y_2 = \frac{-24t}{3t^2 - 1}, y_1 y_2 = \frac{36}{3t^2 - 1},$$

$$\text{由 } |MF| = \sqrt{(x_1 - 4)^2 + y_1^2} = 2ty_1 + 6,$$

$$\text{同理， } |NF| = 2ty_2 + 6.$$

$$\begin{aligned} \therefore \frac{1}{|MF|} + \frac{1}{|NF|} &= \frac{1}{2ty_1 + 6} + \frac{1}{2ty_2 + 6} \\ &= \frac{2t(y_1 + y_2) + 12}{4t^2 y_1 y_2 + 12t(y_1 + y_2) + 36} = \frac{\frac{-48t^2}{3t^2 - 1} + 12}{\frac{144t^2}{3t^2 - 1} + \frac{-288t^2}{3t^2 - 1} + 36} \\ &= \frac{-12t^2 - 12}{-36t^2 - 36} = \frac{1}{3} \text{ 为定值.} \end{aligned}$$

另法：由 $|MF| = \sqrt{(x_1 - 4)^2 + y_1^2} = \sqrt{t^2 + 1} |y_1|$ ，

同理， $|NF| = \sqrt{t^2 + 1} |y_2|$ 。

由于 $y_1 y_2 < 0$ ，不妨设 $y_1 > 0, y_2 < 0$ ，

$$\text{则 } \frac{1}{|MF|} + \frac{1}{|NF|} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \left(\frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_2} \right) = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \cdot \frac{y_2 - y_1}{y_1 y_2}.$$

$$\text{由 } (y_2 - y_1)^2 = (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 = \left(-\frac{24t}{3t^2 - 1} \right)^2 - \frac{4 \times 36}{3t^2 - 1} = \frac{144(t^2 + 1)}{3t^2 - 1},$$

$$\text{得 } y_2 - y_1 = \frac{12\sqrt{t^2 + 1}}{3t^2 - 1}.$$

$$\text{所以 } \frac{1}{|MF|} + \frac{1}{|NF|} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \cdot \frac{y_2 - y_1}{y_1 y_2} = \frac{1}{\sqrt{t^2 + 1}} \cdot \frac{\frac{12\sqrt{t^2 + 1}}{3t^2 - 1}}{\frac{36}{3t^2 - 1}} = \frac{1}{3} \text{ 为定值.}$$

$$(2) \text{ 由题意：圆的方程为 } \left(x - \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^2 + \left(y - \frac{y_1 + y_2}{2} \right)^2 = \frac{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}{4}$$

$$\text{即 } x^2 + y^2 - (x_1 + x_2)x - (y_1 + y_2)y + x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

由对称性可知：若存在定点，则必在 x 轴上

$$\text{令 } y = 0, \text{ 有 } x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$$

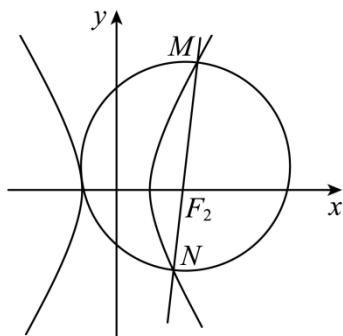
$$\text{由 (1) 可知 } x_1 + x_2 = t(y_1 + y_2) + 8 = \frac{-8}{3t^2 - 1},$$

$$x_1 x_2 = (ty_1 + 4)(ty_2 + 4) = t^2 y_1 y_2 + 4t(y_1 + y_2) + 16 = \frac{36t^2}{3t^2 - 1} - \frac{96t^2}{3t^2 - 1} + 16 = \frac{-12t^2 - 16}{3t^2 - 1}$$

$$\text{代入方程后有：} x^2 + \frac{8}{3t^2 - 1}x + \frac{20 - 12t^2}{3t^2 - 1} = 0,$$

$$\text{即 } (x^2 - 4) + \frac{8}{3t^2 - 1}(x + 2) = 0,$$

$$\text{令 } \begin{cases} x + 2 = 0 \\ x^2 - 4 = 0 \end{cases} \text{ 即 } x = -2. \text{ 故圆过定点 } (-2, 0).$$



13. (2023·广东·统考模拟预测) 已知抛物线 $C: y^2 = 4x$ ，过点 $A(3, 4)$ 作不与 x

轴垂直的直线 l , l' 分别与抛物线 C 交于 M, N 和 P, Q 两点.

(1) 若 M, N 两点的纵坐标之和为 -6, 求直线 l 的斜率;

(2) 证明: $\frac{k_{MN} + k_{PQ}}{k_{MN} \cdot k_{PQ}} = \frac{k_{MQ} + k_{NP}}{k_{MQ} \cdot k_{NP}}$;

(3) 若点 E 为线段 MN 的中点, 点 G 为线段 PQ 的中点, 求 $\frac{k_{MN} + k_{PQ}}{k_{MN} \cdot k_{PQ}} - \frac{1}{k_{EG}}$ 的值.

注: k 表示直线的斜率.

【答案】 (1) $-\frac{2}{3}$

(2) 证明见解析

(3) 2

【分析】 (1) 解设出点的坐标, 利用 M 和 N 的方程式相减即可得出答案.

(2) 分别用 y_1, y_2, y_3, y_4 表示出 k_{MN} , k_{PQ} , k_{MQ} , k_{NP} , 即可得出结论.

(3) 利用坐标得出 y_E , x_E , y_G , x_G , 再表示出相应的斜率, 即可得出答案.

【详解】 (1) 设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, $P(x_3, y_3)$, $Q(x_4, y_4)$,

则 $x_1 \neq x_2$, $x_3 \neq x_4$.

依题意 $\begin{cases} y_1^2 = 4x_1 \\ y_2^2 = 4x_2 \end{cases}$, 两式相减可得 $(y_1 + y_2)(y_1 - y_2) = 4(x_1 - x_2)$,

故 $-6(y_1 - y_2) = 4(x_1 - x_2)$,

则 $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{2}{3}$, 即直线 l 的斜率为 $-\frac{2}{3}$.

(2) 由 (1) 知, $k_{MN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{\frac{y_2^2}{4} - \frac{y_1^2}{4}} = \frac{4}{y_2 + y_1}$,

同理 $k_{PQ} = \frac{4}{y_3 + y_4}$, $k_{MQ} = \frac{4}{y_1 + y_4}$, $k_{NP} = \frac{4}{y_2 + y_3}$.

因为 $\frac{k_{MN} + k_{PQ}}{k_{MN} \cdot k_{PQ}} = \frac{1}{k_{MN}} + \frac{1}{k_{PQ}} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$,

$\frac{k_{MQ} + k_{NP}}{k_{MQ} \cdot k_{NP}} = \frac{1}{k_{MQ}} + \frac{1}{k_{NP}} = \frac{y_1 + y_2 + y_3 + y_4}{4}$,

所以 $\frac{k_{MN} + k_{PQ}}{k_{MN} \cdot k_{PQ}} = \frac{k_{MQ} + k_{NP}}{k_{MQ} \cdot k_{NP}}$.

(3) 记 $k_{MN} = k_1$, $k_{PQ} = k_2$, $k_{EG} = k_3$.

联立 $\begin{cases} y-4=k_1(x-3) \\ y^2=4x \end{cases}$, 得 $k_1 y^2 - 4y + 4(4-3k_1) = 0$,

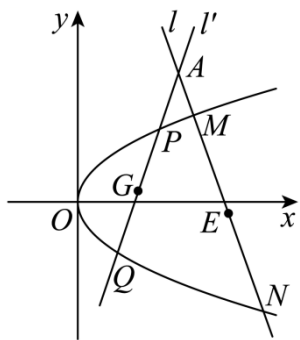
故 $y_1 + y_2 = \frac{4}{k_1}$, $y_1 y_2 = \frac{4(4-3k_1)}{k_1}$,

所以 $y_E = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \frac{2}{k_1}$, $x_E = \frac{y_E^2}{4} + 3 = \frac{2-4k_1}{k_1^2} + 3$,

同理可得, $y_G = \frac{2}{k_2}$, $x_G = \frac{2-4k_2}{k_2^2} + 3$,

故 $\frac{1}{k_3} = \frac{x_E - x_G}{y_E - y_G} = \frac{\frac{2-4k_1}{k_1^2} - \frac{2-4k_2}{k_2^2}}{\frac{2}{k_1} - \frac{2}{k_2}} = \frac{\left(\frac{1}{k_1^2} - \frac{1}{k_2^2}\right) - \left(\frac{2}{k_1} - \frac{2}{k_2}\right)}{\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} - 2$,

即 $\frac{k_{MN} + k_{PQ}}{k_{MN} \cdot k_{PQ}} - \frac{1}{k_{EG}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_3} = 2$.



14. (2023·广东汕头·统考三模) 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长为

$2\sqrt{2}$, C 的一条渐近线斜率为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 l 交 C 于 P, Q 两点, 点 $M(\sqrt{2}a, b)$ 在双曲线 C 上.

(1) 若直线 l 过 C 的右焦点, 且斜率为 -1 , 求 $\triangle PMQ$ 的面积;

(2) 设 P, Q 为双曲线 C 上异于点 $M(\sqrt{2}a, b)$ 的两动点, 记直线 MP, MQ 的斜率分别为 k_1, k_2 , 若 $k_1 + k_2 = 2k_1 k_2$, 求证: 直线 PQ 过定点.

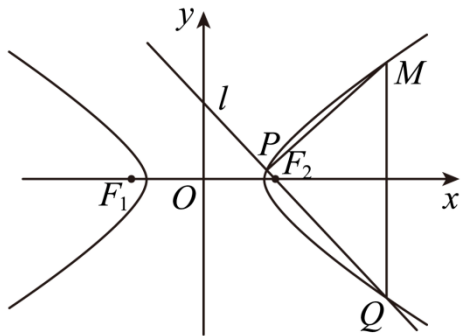
【答案】(1) $6 - 2\sqrt{3}$

(2) 证明见详解.

【分析】(1) 根据双曲线离心率公式, 结合双曲线焦距定义求出双曲线的方程联立进行求解即可;

(2) 设出直线方程与双曲线方程联立，根据一元二次方程根的判别式、根与系数关系，结合直线斜率公式进行求解即可。

【详解】(1) 如图：



因为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长为 $2\sqrt{2}$ ，

所以 $2a = 2\sqrt{2}$ ，即 $a = \sqrt{2}$ 。又因为 C 的一条渐近线斜率为 $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，

所以 $-\frac{b}{a} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，所以 $b = 1$ ，故双曲线 $C: \frac{x^2}{2} - y^2 = 1$ 。

则其右焦点坐标为 $(\sqrt{3}, 0)$ ，因为直线 l 过 C 的右焦点，且斜率为 -1 ，

所以直线 l 的方程为： $y = -x + \sqrt{3}$ ，设 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ 。

$$\text{联立} \begin{cases} y = -x + \sqrt{3} \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases} \text{得： } x^2 - 4\sqrt{3}x + 8 = 0,$$

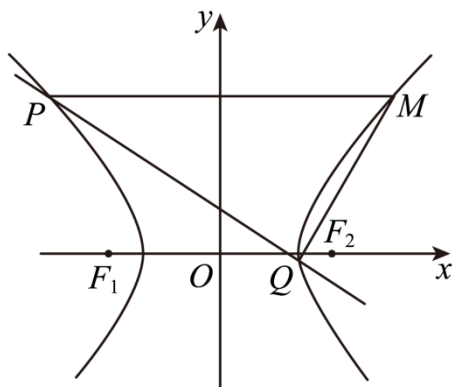
所以由韦达定理得： $x_1 + x_2 = 4\sqrt{3}$ ， $x_1 x_2 = 8$ 。

$$\text{所以 } |PQ| = \sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2]} = \sqrt{2(48-32)} = 4\sqrt{2},$$

点 $M(2, 1)$ 到直线 l 的距离为： $d = \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ 。

$$\text{所以 } S_{\triangle PMQ} = \frac{1}{2} |PQ| d = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times \frac{3-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 6 - 2\sqrt{3}.$$

(2) 证明：如图



设直线 PQ 的方程为: $x = my + n$, 设 $P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$.

联立 $\begin{cases} x = my + n \\ \frac{x^2}{2} - y^2 = 1 \end{cases}$ 得: $(m^2 - 2)y^2 + 2mny + n^2 - 2 = 0$.

$$\Delta = 4m^2n^2 - 4(m^2 - 2)(n^2 - 2) = 8(m^2 + n^2 - 2) > 0, \text{ 即 } m^2 + n^2 > 2$$

所以: $y_1 + y_2 = \frac{-2mn}{m^2 - 2}$, $y_1 y_2 = \frac{n^2 - 2}{m^2 - 2}$.

而 $M(2, 1)$, 则 $k_1 = \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2}$, $k_2 = \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2}$.

因为 $k_1 + k_2 = 2k_1 k_2$, 所以 $\frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} + \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2} = 2 \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} \times \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2}$

整理的: $\frac{(y_1 - 1)(x_2 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} + \frac{(y_2 - 1)(x_1 - 2)}{(x_1 - 2)(x_2 - 2)} = 2 \frac{y_1 - 1}{x_1 - 2} \cdot \frac{y_2 - 1}{x_2 - 2}$,

所以 $(y_1 - 1)(x_2 - 2) + (y_2 - 1)(x_1 - 2) = 2(y_1 - 1)(y_2 - 1)$,

所以: $y_1 x_2 + y_2 x_1 - x_2 - x_1 + 2 = 2y_1 y_2$,

所以 $y_1(my_2 + n) + y_2(my_1 + n) - (my_2 + n) - (my_1 + n) + 2 = 2y_1 y_2$,

整理得: $(2m - 2)y_1 y_2 + (n - m)(y_1 + y_2) - 2n + 2 = 0$,

代入韦达定理得: $\frac{(2m - 2)(n^2 - 2)}{m^2 - 2} + \frac{-2mn(n - m)}{m^2 - 2} + \frac{(-2n + 2)(m^2 - 2)}{m^2 - 2} = 0$,

所以 $(2m - 2)(n^2 - 2) - 2mn(n - m) + (-2n + 2)(m^2 - 2) = 0$,

整理得: $m^2 - n^2 - 2m - 2n = 0$,

即 $(m - n)(m + n - 2) = 0$, 则 $m = n$ 或 $m = 2 - n$.

当 $m = n$ 时, 直线 PQ 的方程为: $x = ny + n = n(y + 1)$, 所以过定点 $(0, -1)$;

当 $m = 2 - n$ 时, 直线 PQ 的方程为: $x = (2 - n)y + n = n(1 - y) + 2y$, 所以过定点

$(2, 1)$.

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/245142223004012020>