

培优冲刺 07 数列递推公式与求和归类



题型大集合

目录

题型一：数列型恒成立求参.....	1
题型二：是否存在型求参.....	3
题型三：恒成立证明型.....	6
题型四：求和型不等式证明.....	8
题型五：数列不定方程.....	11
题型六：恒成立求参：奇偶讨论型.....	12
题型七：下标数列.....	15
题型八：高斯取整数列型.....	17
题型九：前 n 项积型不等式恒成立求参.....	20
题型十：先放缩再求和型证明不等式.....	23
题型十一：插入数型：等差型.....	26
题型十二：插入数列型.....	29
题型十三：新结构 19 题型压轴.....	31



题型大提升

题型一：数列型恒成立求参



分离参数法基本步骤为：

第一步：首先对待含参的不等式问题在能够判断出参数的系数正负的情况下，可以根据不等式的性质将参数分离出来，得到一个一端是参数，另一端是变量表达式的不等式，

第二步：先求出含变量一边的式子的最值，通常使用导函数或基本不等式进行求解。

第三步：由此推出参数的取值范围即可得到结论.

数列恒成立求参数关键“坑”：

数列是以正整数为“变量”的函数，所以求最小值时要注意正整数的取值范围

1. (河北省邯郸市部分学校2023届高三下学期开学考试数学试题) 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$ ， $a_1 = m$ ， m 为常数.

(1) 求证： $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是等差数列；

(2) 若对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ ，都有 $a_{n+1} > a_n$ ，求实数 m 的取值范围.

【答案】(1) 证明见解析

(2) $(-4, +\infty)$

【分析】(1) 等式两边同除以 2^{n+1} ，用等差数列的定义证明；

(2) 将条件转化为 $m > -2n - 2$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立，求 $-2n - 2$ 的最大值即可.

【详解】(1) 证明：因为 $a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+1}$ ，

等式两边同除以 2^{n+1} ，得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 1$ ，即 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = 1$ ，

所以数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是首项为 $\frac{m}{2}$ ，公差为1的等差数列.

(2) 由(1)得 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{m}{2} + (n-1)$ ，因此 $a_n = m \cdot 2^{n-1} + (n-1) \cdot 2^n$.

由 $a_{n+1} > a_n$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立，得 $m \cdot 2^n + n \cdot 2^{n+1} > m \cdot 2^{n-1} + (n-1) \cdot 2^n$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 均成立.

因为 $2^{n-1} > 0$ ，不等式两边同除以 2^{n-1} ，得 $2m + 4n > m + 2n - 2$ ，

即 $m > -2n - 2$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立，

当 $n=1$ 时， $-2n-2$ 取最大值 -4 ，所以 $m > -4$ ，

所以实数 m 的取值范围为 $(-4, +\infty)$.

2. (河北省石家庄二中教育集团2022-2023学年高三四校联考数学试题) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $0 < a_n < a_{n+1}$ ， $a_1 + a_2 + a_3 = 13$ ，且 $a_2, a_3 + 6, a_4$ 为等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = a_{n+1} \log_3 a_{n+1}$ ， $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ，对任意正整数 n ， $2S_n - (9n+m)a_n > 0$ 恒成立，试求 m 的取值范围.

【答案】(1) $a_n = 3^{n-1}$ (2) $\left(-\infty, -\frac{9}{2}\right]$

【分析】(1) 利用等比数列的通项公式和等差中项求解即可；

(2) 由(1)得 $b_n = 3^n \log_3 3^n = n \cdot 3^n$ ，利用错位相减法得 $2S_n = n \cdot 3^{n+1} - \frac{3^{n+1}}{2} + \frac{3}{2}$ ，则原不等式转化为

$m < \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} - \frac{9}{2}$ 对任意正整数 n 恒成立，求 $\frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} - \frac{9}{2}$ 的最小值即可.

【详解】(1) 因为数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，且满足 $0 < a_n < a_{n+1}$ ，

所以 $a_1 > 0, q > 0$ ①.

$$a_1 + a_2 + a_3 = a_1(1 + q + q^2) = 13 \text{ ②}.$$

又因为 $a_2, a_3 + 6, a_4$ 为等差数列, 所以 $2(a_3 + 6) = a_2 + a_4$, 即 $2(a_1q^2 + 6) = a_1q + a_1q^3$ ③.

$$\text{联立①②③解得} \begin{cases} a_1 = 1 \\ q = 3 \end{cases}, \text{ 所以 } a_n = 3^{n-1}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } b_n = 3^n \log_3 3^n = n \cdot 3^n.$$

$$\text{所以 } S_n = 1 \times 3 + 2 \times 3^2 + 3 \times 3^3 + \dots + n \times 3^n \text{ ④}.$$

$$3S_n = 1 \times 3^2 + 2 \times 3^3 + 3 \times 3^4 + \dots + (n-1) \times 3^n + n \times 3^{n+1} \text{ ⑤}.$$

$$\text{⑤} - \text{④} \text{ 得 } 2S_n = -3 - 3^2 - 3^3 - \dots - 3^n + n \cdot 3^{n+1}$$

$$= -\frac{3(1-3^n)}{1-3} + n \cdot 3^{n+1} = n \cdot 3^{n+1} - \frac{3^{n+1}}{2} + \frac{3}{2}.$$

$$\text{由题意 } 2S_n - (9n+m)a_n > 0 \text{ 即 } n \cdot 3^{n+1} - \frac{3^{n+1}}{2} + \frac{3}{2} - n \cdot 3^{n+1} - m \cdot 3^{n+1} > 0 \text{ 对任意正整数 } n \text{ 恒成立},$$

$$\text{所以 } m < \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} - \frac{9}{2} \text{ 恒成立, 则 } m < \left(\frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} - \frac{9}{2} \right)_{\min} \text{ 即可},$$

$$\text{又因为 } \frac{1}{2 \cdot 3^{n-2}} - \frac{9}{2} \geq -\frac{9}{2}, \text{ 所以 } m \leq -\frac{9}{2}, \text{ 即 } m \text{ 的取值范围是 } \left(-\infty, -\frac{9}{2} \right].$$

3. (重庆市巫山第二中学 2022-2023 学年高三数学试题) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $4S_n = (1+a_n)^2$,

数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1} = \frac{b_n}{2+b_n} (n \in \mathbb{N}^*)$ 且 $b_1 = 1$.

(1) 分别求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且 $(\lambda^2 - 2\lambda) \cdot T_n \geq n \cdot b_n$, 对任意正整数恒成立, 求实数 λ 的取值范围.

$$\text{【答案】(1) } a_n = 2n-1, b_n = \frac{1}{2^n-1} \text{ (2) } (-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$$

【分析】(1) 根据 a_n 与 S_n 的关系和等差数列的定义可求出 a_n , 根据递推公式和等比数列的定义求出 b_n ;

(2) 根据裂项公式 $c_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ 求出 T_n , 将 $(\lambda^2 - 2\lambda) \cdot T_n \geq n \cdot b_n$ 恒成立化为 $\lambda^2 - 2\lambda \geq \frac{2n+1}{2^n-1}$ 对任意正整数 n 恒成立, 再根据数列的单调性求出 $\frac{2n+1}{2^n-1}$ 的最大值, 代入解不等式即可得解.

$$\text{【详解】(1) } \because 4S_n = (a_n + 1)^2, \therefore 4S_{n-1} = (a_{n-1} + 1)^2 (n \geq 2).$$

$$\text{所以 } 4(S_n - S_{n-1}) = (a_n + 1)^2 - (a_{n-1} + 1)^2 (n \geq 2).$$

$$\therefore 4a_n = (a_n + 1)^2 - (a_{n-1} + 1)^2 (n \geq 2), \text{ 化简 } (a_n + a_{n-1}) \cdot (a_n - a_{n-1} - 2) = 0 (n \geq 2).$$

$$\because a_n > 0, \therefore a_n - a_{n-1} = 2 (n \geq 2). \text{ 又 } 4S_1 = (a_1 + 1)^2, \text{ 解得 } a_1 = 1.$$

$\therefore \{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列.

$$\therefore a_n = 1 + 2(n-1) = 2n-1.$$

$$\text{由 } b_{n+1} = \frac{b_n}{2+b_n}, \text{ 可得 } \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{2+b_n}{b_n} = 1 + \frac{2}{b_n}, \frac{1}{b_{n+1}} + 1 = \frac{2}{b_n} + 2 = 2 \left(\frac{1}{b_n} + 1 \right), \text{ 又 } \frac{1}{b_1} + 1 = 2.$$

故数列 $\left\{ \frac{1}{b_n} + 1 \right\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列.

$$\text{则 } \frac{1}{b_n} + 1 = 2 \times 2^{n-1} = 2^n \Rightarrow b_n = \frac{1}{2^n - 1}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } a_n = 2n - 1, \text{ 则 } c_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

$$\text{所以 } T_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] = \frac{n}{2n+1}.$$

$$\text{故 } (\lambda^2 - 2\lambda) \cdot T_n \geq n \cdot b_n \text{ 即 } \lambda^2 - 2\lambda \geq \frac{2n+1}{2^n - 1} \text{ 对任意正整数 } n \text{ 恒成立.}$$

$$\text{设 } f(n) = \frac{2n+1}{2^n - 1}, (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$\text{则 } f(n+1) - f(n) = \frac{2n+3}{2^{n+1} - 1} - \frac{2n+1}{2^n - 1} = -\frac{(2n-1)2^n + 2}{(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)} < 0.$$

$$\text{即 } f(n+1) < f(n), \text{ 则 } f(n) = \frac{2n+1}{2^n - 1} \text{ 单调递减, } f(n)_{\max} = f(1) = 3.$$

$$\lambda^2 - 2\lambda \geq 3, \text{ 解得 } \lambda \leq -1 \text{ 或 } \lambda \geq 3.$$

$$\text{故 } \lambda \text{ 的取值范围为 } (-\infty, -1] \cup [3, +\infty).$$

题型二：是否存在型求参



一般地，已知函数 $y = f(x), x \in [a, b]$ ， $y = g(x), x \in [c, d]$

不等关系

(1) 若 $\forall x_1 \in [a, b], \forall x_2 \in [c, d]$ ，总有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立，故 $f(x)_{\max} < g(x)_{\min}$ ；

(2) 若 $\forall x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d]$ ，有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立，故 $f(x)_{\max} < g(x)_{\max}$ ；

(3) 若 $\exists x_1 \in [a, b], \forall x_2 \in [c, d]$ ，有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立，故 $f(x)_{\min} < g(x)_{\min}$ ；

(4) 若 $\exists x_1 \in [a, b], \exists x_2 \in [c, d]$ ，有 $f(x_1) < g(x_2)$ 成立，故 $f(x)_{\min} < g(x)_{\max}$ 。

1. (上海市敬业中学 2022 届高三上学期数学试题) 设正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，首项为 1，已知对任意整数 m, n ，当 $n > m$ 时， $S_n - S_m = q^m \cdot S_{n-m}$ (q 为正常数) 恒成立。

(1) 求证：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；

(2) 证明：数列 $\{\frac{S_n}{S_{n+1}}\}$ 是递增数列；

(3) 是否存在正常数 c ，使得 $\{\lg(c - S_n)\}$ 为等差数列？若存在，求出常数 c 的值；若不存在，说明理由。

【答案】(1) 证明见解析 (2) 是 (3) 存在， $c = \frac{1}{1-q} (0 < q < 1)$ 。

【分析】(1) 由已知条件，可令 $m = n - 1$ ，代入 $S_n - S_m = q^m \cdot S_{n-m}$ ，即可得到所求出数列 $\{a_n\}$ 通项公式，从而可证 $\{a_n\}$ 是等比数列；

(2) 讨论公比 q 是否为 1，求得 S_n ，以及 $\frac{S_n}{S_{n+1}}$ ，由单调性的定义即可得证；

(3) 假设存在正常数 c 使得 $\{\lg(c - S_n)\}$ 为等差数列，结合对数的运算性质和等差数列的通项公式，即可得到所求结论。

【详解】(1) 因为对任意正整数 m, n ，

当 $n > m$ 时， $S_n - S_m = q^m \cdot S_{n-m}$ 总成立，

所以 $n \geq 2$ 时, 令 $m = n - 1$, 得 $S_n - S_{n-1} = q^{n-1} \cdot S_1$, 即 $a_n = a_1 q^{n-1} = q^{n-1}$,

当 $n = 1$ 时, 也成立, 所以 $a_n = q^{n-1}$, 所以数列 $\{a_n\}$ 是等比数列;

(2) 当 $q = 1$ 时, $S_n = n$, $\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$ 随着 n 的增大而增大; 当 $q > 0$, $q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$,

$$\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{1-q^n}{1-q^{n+1}}.$$

由 $\frac{S_n}{S_{n+1}} - \frac{S_{n+1}}{S_{n+2}} = \frac{1-q^n}{1-q^{n+1}} - \frac{1-q^{n+1}}{1-q^{n+2}} = \frac{-q^n(1-q)^2}{(1-q^{n+1})(1-q^{n+2})} < 0$, 综上可得数列 $\{\frac{S_n}{S_{n+1}}\}$ 是递增数列;

(3) 假设存在正常数 c 使得 $\{\lg(c - S_n)\}$ 为等差数列, 当 $q = 1$ 时, $S_n = n$, 当 $q \neq 1$ 时, $S_n = \frac{1-q^n}{1-q}$,

由 $\{\lg(c - S_n)\}$ 为等差数列, 得 $q \neq 1$, 此时 $\lg(c - S_n) = \lg(c - \frac{1-q^n}{1-q}) = \lg(c - \frac{1}{1-q} + \frac{q^n}{1-q})$

当 $c = \frac{1}{1-q}$ ($0 < q < 1$) 时, $\lg(c - \frac{1}{1-q} + \frac{q^n}{1-q}) = \lg \frac{q^n}{1-q} = n \lg q - \lg(1-q)$ 为等差数列,

所以存在 $c = \frac{1}{1-q}$ ($0 < q < 1$) 使得 $\{\lg(c - S_n)\}$ 为等差数列.

2. (四川省绵阳市 2023 届高三第二次诊断性考试数学(文)试题) 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 a_n, S_n, a_n^2 为等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 已知 $b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 是否存在 $m \in \mathbb{N}^*$, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n b_n \leq a_m b_m$ 恒成立? 若存在, 求出 m 的值; 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) $a_n = n$;

(2) 存在, $m = 2$ 或 $m = 3$;

【分析】(1) 由题设 $2S_n = a_n + a_n^2$ 且 $a_n > 0$, 应用 a_n, S_n 关系求数列通项公式;

(2) 由(1)知 $a_n b_n = n \left(\frac{2}{3}\right)^n$, 构造 $f(x) = x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 且 $x > 0$ 并利用导数研究单调性判断是否存在最大值, 即可得出结论.

【详解】(1) 由题设 $2S_n = a_n + a_n^2$ 且 $a_n > 0$,

当 $n = 1$ 时, $2S_1 = 2a_1 = a_1 + a_1^2$, 可得 $a_1 = 1$;

当 $n \geq 2$ 时, $2(S_n - S_{n-1}) = 2a_n = a_n + a_n^2 - a_{n-1} - a_{n-1}^2$, 则 $a_n + a_{n-1} = a_n^2 - a_{n-1}^2 = (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1})$;

由 $a_n + a_{n-1} > 0$, 故 $a_n - a_{n-1} = 1$.

所以 $\{a_n\}$ 是首项、公差均为 1 的等差数列, 故 $a_n = n$.

(2) 由(1)知: $a_n b_n = n \left(\frac{2}{3}\right)^n$, 要使 $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n b_n \leq a_m b_m$, 即 $n \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq m \left(\frac{2}{3}\right)^m$ 恒成立,

令 $f(x) = x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$ 且 $x > 0$, 则 $f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot x \ln \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^x (1 + x \ln \frac{2}{3})$,

若 $f'(x) = 0$, 即 $1 + x \ln \frac{2}{3} = 0$, 则 $x = \frac{1}{\ln \frac{2}{3}} = \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}$.

在 $(0, \log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2})$ 上 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 递增, $(\log_{\frac{2}{3}} \frac{1}{2}, +\infty)$ 上 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 递减.

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 有最大值, 又 $2 < \log_{\frac{3}{2}} e < 3$,

对于 $n\left(\frac{2}{3}\right)^n$, 当 $n=2$ 时, $a_2b_2 = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$, 当 $n=3$ 时, $a_3b_3 = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{9}$,

综上, $a_1b_1 < a_2b_2 = a_3b_3 > a_4b_4 > \dots > a_nb_n$, 故存在 $m=2$ 或 $m=3$ 使 $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_nb_n \leq a_mb_m$ 恒成立.

3. (江苏省南通市如东县 2022-2023 学年高三上学期数学试题) 已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1=1$,

数列 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 记数列 $\{2^n a_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 是否存在实数 t 使得数列 $\left\{\frac{T_n+t}{2^n}\right\}$ 成等差数列, 若存在, 求出实数 t 的值; 若不存在, 说明理由.

【答案】(1) $a_n = n$; (2) 存在, $t = -2$.

【分析】(1) 由等差数列通项公式得出 $S_n = \frac{n+1}{2}a_n$, 再由 a_n 与 S_n 的关系可得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

(2) 由 (1) 的结论结合错位相减求出 T_n , 先得出 $\left\{\frac{T_n+t}{2^n}\right\}$ 的前三项, 由等差数列的性质得出方程解出 t , 再检验即可.

【详解】(1) 因为 $\frac{S_1}{a_1} = 1$, 数列 $\left\{\frac{S_n}{a_n}\right\}$ 是公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列, 则 $\frac{S_n}{a_n} = 1 + (n-1) \times \frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$, 因此

$$S_n = \frac{n+1}{2}a_n.$$

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = \frac{n}{2}a_{n-1}$, 则有 $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{(n+1)}{2}a_n - \frac{n}{2}a_{n-1}$,

因此 $(n-1)a_n = na_{n-1}$, 即 $\frac{a_n}{n} = \frac{a_{n-1}}{n-1}$, 数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 是常数列, 有 $\frac{a_n}{n} = \frac{a_1}{1} = 1$,

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n$.

(2) 由 (1) 知, $2^n a_n = n2^n$,

则 $T_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \dots + n \times 2^n$,

于是得 $2T_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \dots + n \times 2^{n+1}$,

两式相减得: $-T_n = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n - n \times 2^{n+1} = 2 \times \frac{1-2^n}{1-2} - n \times 2^{n+1} = (1-n)2^{n+1} - 2$,

因此 $T_n = (n-1)2^{n+1} + 2$,

有 $\frac{T_1+t}{2} = \frac{2+t}{2}$, $\frac{T_2+t}{4} = \frac{10+t}{4}$, $\frac{T_3+t}{8} = \frac{34+t}{8}$, 若数列 $\left\{\frac{T_n+t}{2^n}\right\}$ 成等差数列, 则 $2 \times \frac{10+t}{4} = \frac{2+t}{2} + \frac{34+t}{8}$, 解得 $t = -2$,

当 $t = -2$ 时, $\frac{T_n-2}{2^n} = 2n-2$, 则 $\frac{T_{n+1}-2}{2^{n+1}} - \frac{T_n-2}{2^n} = [2(n+1)-2] - (2n-2) = 2$, 从而数列 $\left\{\frac{T_n+t}{2^n}\right\}$ 成等差数列,

所以存在 $t = -2$, 使得数列 $\left\{\frac{T_n+t}{2^n}\right\}$ 成等差数列.

题型三：恒成立证明型



数列与不等式问题要抓住一个中心——函数，两个密切联系：一是数列和函数之间的密切联系，数列的通项公式是数列问题的核心，函数的解析式是研究函数问题的基础；二是方程、不等式与函数的联系，利用它们之间的对应关系进行灵活的处理。

1. (2024 高三·全国·专题练习) 已知在数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1=1$ ，点 $P(2a_n, a_{n+1})$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ 在直线 $x-2y+2=0$ 上。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式。

(2) 设 $b_n = \frac{1}{a_n}$ ， S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，试问：是否存在关于 n 的整式 $g(n)$ ，使得

$S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1} = (S_n - 1) \cdot g(n)$ ($n \geq 2$ ，且 $n \in \mathbb{N}^*$) 恒成立？若存在，写出 $g(n)$ 的表达式，并加以证明；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $a_n = n$ (2) 存在， $g(n) = n$

【分析】(1) 根据已知条件点 $P(2a_n, a_{n+1})$ 在直线 $x-2y+2=0$ 上，可得 $a_{n+1} - a_n = 1$ ，根据等差数列定义判断 $\{a_n\}$ 为等差数列，即可求解。

(2) 根据已知条件得 $nS_n - nS_{n-1} = 1$ ，化为 $nS_n - (n-1)S_{n-1} = S_{n-1} + 1$ ($n \geq 2$)，利用累加法求得 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} = nS_n - n = n(S_n - 1)$ ($n \geq 2$)，结合题意即可求解。

【详解】(1) 因为点 $P(2a_n, a_{n+1})$ ，($n \in \mathbb{N}^*$) 在直线 $x-2y+2=0$ 上，所以 $a_n - a_{n+1} + 1 = 0$ ，即 $a_{n+1} - a_n = 1$ 。

又 $a_1 = 1$ ，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，1 为公差的等差数列，

所以 $a_n = 1 + (n-1) \times 1 = n$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ 。

(2) 因为 $b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{n}$ ，所以 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ 。

所以 $S_n - S_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}\right) = \frac{1}{n}$ ($n \geq 2$)。

即 $nS_n - nS_{n-1} = 1$ ($n \geq 2$)，所以 $nS_n - (n-1)S_{n-1} = S_{n-1} + 1$ ($n \geq 2$)。

$(n-1)S_{n-1} - (n-2)S_{n-2} = S_{n-2} + 1$ ， $(n-2)S_{n-2} - (n-3)S_{n-3} = S_{n-3} + 1$ ，

$\vdots$

$2S_2 - S_1 = S_1 + 1$ 。

所以 $nS_n - S_1 = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} + n - 1$ 。

所以 $S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} = nS_n - n = n(S_n - 1)$ ($n \geq 2$)。

根据题意 $S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1} = (S_n - 1) \cdot g(n)$ ($n \geq 2$ ，且 $n \in \mathbb{N}^*$) 恒成立，

所以 $g(n) = n$ ，所以存在关于 n 的整式 $g(n) = n$ 。

使得 $S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1} = (S_n - 1) \cdot g(n)$ ($n \geq 2$ ，且 $n \in \mathbb{N}^*$) 恒成立。

2. (广西南宁市第八中学 2022-2023 学年高三数学试题) 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_1 = 0$ ， $a_2 = 6$ ，且对于任意正整数 n 都有 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$ 。

(1) 令 $b_n = a_{n+1} - 2a_n$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 m 是一个正数, 无论 m 为何值, 是否都有一个正整数 n 使 $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - 3 \right| < m$ 成立.

【答案】(1) $b_n = 2 \cdot 3^n$; (2) 存在, 详见解析.

【分析】(1) 由题可得 $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n)$, 然后利用等比数列的定义及通项公式即得;

(2) 由题可知 $a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 3^n$, 可得 $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} = \frac{2}{3}$, 令 $\frac{a_n}{3^n} = c_n$, 利用等比数列的通项公式可得 c_n , 即可

得出 a_n , 假设存在正整数 n 满足题意, 由题可得 $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - 3 \right| = \left| \frac{3}{2 \cdot (\frac{3}{2})^n - 3} \right| < m$, 即可求解.

【详解】(1) 因为 $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, 所以 $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n)$, 因为 $b_n = a_{n+1} - 2a_n$, 且 $a_1 = 0, a_2 = 6$, 所以 $b_{n+1} = 3b_n$, 且 $b_1 = 6$, 所以数列 $\{b_n\}$ 是以 6 为首项, 以 3 为公比的等比数列,

所以 $b_n = 6 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n$;

(2) 由 (1) 可得 $a_{n+1} - 2a_n = 2 \cdot 3^n$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} = \frac{2}{3}$, 令 $\frac{a_n}{3^n} = c_n$, 则 $c_{n+1} - \frac{2}{3} \cdot c_n = \frac{2}{3}$, 所以

$c_{n+1} - 2 = \frac{2}{3} \cdot (c_n - 2)$, 且 $c_1 - 2 = -2$, 所以数列 $\{c_n - 2\}$ 是首项为 -2, 公比为 $\frac{2}{3}$ 的等比数列, 所以

$c_n - 2 = -2 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$, 即 $c_n = 2 - 2 \cdot (\frac{2}{3})^{n-1}$.

所以 $a_n = 2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n$, 无论 m 为何值, 假设存在一个正整数 n 使 $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - 3 \right| < m$ 成立,

因为 $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - 3 \right| = \left| \frac{2 \cdot 3^{n+1} - 3 \cdot 2^{n+1}}{2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n} - 3 \right| = \left| \frac{3 \cdot 2^n}{2 \cdot 3^n - 3 \cdot 2^n} \right| = \left| \frac{3}{2 \cdot (\frac{3}{2})^n - 3} \right| < m$, 即 $\frac{3}{2 \cdot (\frac{3}{2})^n - 3} < m$, 可得 $(\frac{3}{2})^n > \frac{3+3m}{2m}$, 取

$n > \frac{\lg \frac{3+3m}{2m}}{\lg \frac{3}{2}}$, 因此 m 是一个正数, 无论 m 为何值, 都有一个正整数 n 使 $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - 3 \right| < m$ 成立, 取 $n > \frac{\lg \frac{3+3m}{2m}}{\lg \frac{3}{2}}$

的正整数即可.

3. (23-24 高三上·重庆·阶段练习) 已知公比不为 1 的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 a_6, a_4, a_5 成等差数列.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的公比;

(2) 是否存在 $r, s, t \in \mathbb{N}^*$, 且 $r > s > t$, 使得 S_r, S_s, S_t 成等差数列? 若存在, 求出 r, s, t 的关系; 若不存在, 请说明理由.

【答案】(1) $q = -2$; (2) 答案见解析.

【分析】(1) 利用 a_6, a_4, a_5 成等差数列和 $\{a_n\}$ 是等比数列, 建立方程, 求出公比即可;

(2) 先假设存在, 通过对数列求和, 验证 S_r, S_s, S_t 为等差数列矛盾, 从而说明不存在.

【详解】(1) 结合题意: a_6, a_4, a_5 成等差数列, 所以 $2a_4 = a_6 + a_5$,

由 $\{a_n\}$ 是等比数列, 所以 $2a_1q^3 = a_1q^5 + a_1q^4$,

整理得 $q^2 + q - 2 = 0$, 解得: $q = 1$ (舍去), 或 $q = -2$.

(2) 假设存在 $r, s, t \in \mathbb{N}^*$, 且 $r > s > t$, 使得 S_r, S_s, S_t 成等差数列

由 (1) 可知 $q = -2$, 所以 $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1[1-(-2)^n]}{3}$.

因为 S_r, S_t, S_s 成等差数列 , 所以 $2S_t = S_r + S_s$.

$$\frac{2a_1[1-(-2)^t]}{3} = \frac{a_1[1-(-2)^r]}{3} + \frac{a_1[1-(-2)^s]}{3} .$$

即 $2[1-(-2)^t] = [1-(-2)^r] + [1-(-2)^s]$, 整理得 : $2(-2)^t = (-2)^r + (-2)^s$.

在上式两边同时除 $(-2)^t$,

得到 : $2 = (-2)^{r-t} + (-2)^{s-t}$.

又 $r > s > t$, 所以 $2 = (-2)^{s-t} [(-2)^{r-s} + 1]$.

因为 $(-2)^{s-t} \in \mathbb{Z}$, $(-2)^{r-s} + 1 \in \mathbb{Z}$, 所以 $(-2)^{s-t} = -2$, $(-2)^{r-s} + 1 = -1$.

所以存在互不相等的正整数 $r, s, t \in \mathbb{N}^*$, 且 $r = s + 1 = t + 2$ 时 , 使得 S_r, S_s, S_t 成等差数列 .

题型四：求和型不等式证明



求和型不等式证明：

先求和再放缩，放缩时，可以直接放缩，可以借助数列的单调性放缩。

求和常用方法

1. 形如 $a_n = b_n$ (等差) + c_n (等比) , 用分组求和法, 分别求和而后相加减
2. 形如 $a_n = b_n$ (等差比) + c_n (裂项) , 用分组求和法, 分别求和而后相加减
3. 形如 $a_n = b_n + c_n$ (b_n, c_n 为可以求和的常见数列) , 用分组求和法, 分别求和而后相加减
4. 错位相减法求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和

若 $\{a_n\}$ 是公差为 $d(d \neq 0)$ 的等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 $q(q \neq 1)$ 的等比数列, 求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

5. 常见的裂项技巧：

$$(1) \frac{1}{n(n+k)} = \frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right) ;$$

$$(2) \frac{1}{\sqrt{n+k} + \sqrt{n}} = \frac{1}{k} (\sqrt{n+k} - \sqrt{n}) ;$$

$$(3) \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$$

$$(4) \frac{2^n}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} = \frac{(2^{n+1}-1)-(2^n-1)}{(2^n-1)(2^{n+1}-1)} = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}$$

$$(5) \text{指数型 } (a-1)a^n = a^{n+1} - a^n ;$$

$$(6) \text{对数型 } \log_a \frac{a_{n+1}}{a_n} = \log_a a_{n+1} - \log_a a_n .$$

$$(7) \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} \right]$$

$$(8) \frac{n}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!}$$

$$(9) \frac{2^n}{(2^{n+1}-1)(2^n-1)} = \frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1}$$

$$(10) \frac{n+2}{n(n+1) \cdot 2^n} = \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{(n+1) \cdot 2^n} \text{ 等}$$

1. (山东省德州市 2022-2023 学年高三上学期期末数学试题) 已知公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_3 = 6$, a_2, a_4, a_8 成等比数列, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = 2b_n - n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 通项公式;

(2) 求 $\sum_{k=1}^{100} a_k^2 \cdot \cos(a_k \cdot \pi)$ 的值;

(3) 证明: $\frac{2}{3} \leq \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{b_i} - \frac{1}{b_{i+1}} \right) < 1$.

【答案】(1) $a_n = n$, $b_n = 2^n - 1$ (2) 5050 (3) 证明见解析

【分析】(1) 根据等差数列的基本量求等差数列的通项, 根据 $T_n - T_{n-1}$ 找到数列 $\{b_n\}$ 的通项公式, 然后再求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

(2) 分别求出奇数项和偶数项通项公式再求和.

(3) 裂项相消法求和, 再证明.

【详解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$.

$$\text{由题意得} \begin{cases} S_3 = 3a_1 + 3d = 6 \\ (a_1 + 3d)^2 = (a_1 + d)(a_1 + 7d) \end{cases}, \text{解得} \begin{cases} a_1 = 1 \\ d = 1 \end{cases}.$$

故数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = n$.

因为: $T_n = 2b_n - n$, 当 $n \geq 2$ 时, $T_{n-1} = 2b_{n-1} - (n-1)$,

两式相减得 $b_n = 2b_{n-1} + 1$.

又 $n = 1$ 时, $b_1 = T_1 = 2b_1 - 1$, 所以 $b_1 = 1$, 所以 $b_1 + 1 = 2 \neq 0$.

因为 $b_{n+1} = 2b_n + 1$, 所以 $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$, 而 $b_n + 1 \neq 0$,

$$\text{即} \frac{b_{n+1} + 1}{b_n + 1} = 2 (n \in \mathbf{N}^*),$$

所以 $\{b_n + 1\}$ 是以 2 为首项, 2 为公比的等比数列, $b_n + 1 = 2^n$, 所以 $b_n = 2^n - 1$.

(2) 当 $k = 2m$, $m \in \mathbf{N}^*$ 时, $a_k^2 \cdot \cos(a_k \cdot \pi) = (2m)^2 \cos 2m\pi = (2m)^2$.

当 $k = 2m - 1$, $m \in \mathbf{N}^*$ 时,

$$a_k^2 \cdot \cos(a_k \cdot \pi) = (2m-1)^2 \cos[(2m-1)\pi] = (-1) \cdot (2m-1)^2$$

$$\text{所以} \sum_{k=1}^{100} a_k^2 \cdot \sin\left(a_k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2^2 - 1^2 + 4^2 - 3^2 + \dots + 100^2 - 99^2$$

$$= (2-1)(2+1) + (4-3)(4+3) + \dots + (100-99)(100+99)$$

$$= 1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = 5050.$$

$$(3) \text{ 由 } \frac{1}{b_n} - \frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{2^n - 1} - \frac{1}{2^{n+1} - 1} \text{ 可得 } \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{b_i} - \frac{1}{b_{i+1}} \right) = \left(\frac{1}{2-1} - \frac{1}{2^2-1} \right) + \left(\frac{1}{2^2-1} - \frac{1}{2^3-1} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2^n-1} - \frac{1}{2^{n+1}-1} \right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1} \text{ 因为 } 2^{n+1}-1 \geq 2^2-1, \text{ 所以 } 0 < \frac{1}{2^{n+1}-1} \leq \frac{1}{3}, \text{ 所以 } \frac{2}{3} \leq 1 - \frac{1}{2^{n+1}-1} < 1. \text{ 则原命题得证.}$$

2. (2023 上·山东·高三山东省实验中学校考) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $2a_n = S_n + 1$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = (-1)^n \frac{2n+1}{\log_2 a_{n+1} \cdot \log_2 a_{n+2}}$ ， $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，证明： $-\frac{3}{2} \leq T_n \leq -\frac{2}{3}$ 。

【答案】(1) $a_n = 2^{n-1}$ (2) 证明见解析。

【分析】(1) 已知 S_n 求 a_n 的问题，一定要分 $n=1$ 和 $n \geq 2$ 进行讨论；

(2) 用裂项相加法求和，再分 n 为奇数、偶数讨论，确定 T_n 的取值范围。

【详解】(1) 因为 $2a_n = S_n + 1$ ，当 $n=1$ 时， $2a_1 = a_1 + 1 \Rightarrow a_1 = 1$ 。

当 $n \geq 2$ 时， $2a_n = S_n + 1$ ，所以 $2a_{n-1} = S_{n-1} + 1$ ，

$$2a_n - 2a_{n-1} = a_n \Rightarrow a_n = 2a_{n-1} \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = 2。$$

所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，故： $a_n = 2^{n-1}$ 。

(2) 证明：因为 $b_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)} = (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right)$ ，

$$\text{所以 } T_n = -\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \cdots + (-1)^n \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) = -1 + (-1)^n \frac{1}{n+1}。$$

当 n 为奇数时， $T_n = -1 - \frac{1}{n+1}$ ，因为 $n+1 \geq 2$ ，所以 $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$ ，所以 $-\frac{3}{2} \leq T_n < -1$ 。

当 n 为偶数时， $T_n = -1 + \frac{1}{n+1}$ ，因为 $n+1 \geq 3$ ，所以 $0 < \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3}$ ，所以 $-1 < T_n \leq -\frac{2}{3}$ 。综上， $-\frac{3}{2} \leq T_n \leq -\frac{2}{3}$ 。

3. (2023 上·湖南长沙·高三长沙麓山国际实验学校校考联考阶段练习) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$a_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + 2, n \in \mathbb{N}^*$ ，数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 1, S_{n+1} - n = S_n + b_n + n + 1$ ，其中 S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和。

(1) 证明数列 $\{a_n + 1\}$ 为等比数列，并求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $c_n = \frac{2(b_n + n)}{n(a_n + 1)}$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ，并证明： $2 \leq T_n < \frac{15}{4}$ 。

【答案】(1) 证明见解析， $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ (2) $T_n = \frac{15}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^{n-1}}$ ，证明见解析

【分析】(1) 由 $a_{n+1} = 3a_n + 2$ ，有 $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1} = 3$ ，可得数列 $\{a_n + 1\}$ 为等比数列，并求出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 由 S_n 和 b_n 的关系得数列 $\{b_n\}$ 的递推公式，累加法求出 $\{b_n\}$ 的通项，得数列 $\{c_n\}$ 的通项，错位相减法求 T_n ，并确定范围。

【详解】(1) 由 $a_{n+1} = 3a_n + 2$ ，可得 $a_{n+1} + 1 = 3(a_n + 1)$ ，即 $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1} = 3$ ，

又 $a_1 + 1 = 2$ ，所以数列 $\{a_n + 1\}$ 是首项为 2，公比为 3 的等比数列，

则有 $a_n + 1 = 2 \cdot 3^{n-1}$ ，可得数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1$ ；

(2) 由 $S_{n+1} - n = S_n + b_n + n + 1$ ，有 $S_{n+1} - S_n = b_n + 2n + 1$ ，即 $b_{n+1} - b_n = 2n + 1$ ，

则当 $n \geq 2$ 时，有： $b_n = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \cdots + (b_2 - b_1) + b_1 = (2n-1) + (2n-3) + \cdots + 3 + 1$
 $= \frac{(2n-1+1)n}{2} = n^2$ ，

$n=1$ 时 $b_1 = 1$ 也满足，所以数列 $\{b_n\}$ 的通项公式为 $b_n = n^2$ 。得 $c_n = \frac{2(n^2 + n)}{2n \cdot 3^{n-1}} = \frac{n+1}{3^{n-1}}$ ，则

$$T_n = \frac{2}{3^0} + \frac{3}{3^1} + \frac{4}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^{n-2}} + \frac{n+1}{3^{n-1}} \quad ①$$

$$3T_n = \frac{2 \times 3}{3^0} + \frac{3}{3^0} + \frac{4}{3^1} + \dots + \frac{n}{3^{n-3}} + \frac{n+1}{3^{n-2}} \quad ② \quad ② - ① \text{得:}$$

$$2T_n = 6 + \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}}\right) - \frac{n+1}{3^{n-1}} = 6 + \frac{1 - \frac{1}{3^n}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n+1}{3^{n-1}} = \frac{15}{2} - \frac{2n+5}{2 \cdot 3^{n-1}}$$

解得 $T_n = \frac{15}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^{n-1}}$, 由 $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{2n+5}{4 \cdot 3^{n-1}} > 0$, 所以 $T_n < \frac{15}{4}$.

又 $c_n > 0$ 所以 $\{T_n\}$ 递增 , 所以 $T_n \geq T_1 = \frac{15}{4} - \frac{2 \times 1 + 5}{4 \cdot 3^{1-1}} = 2$, 因此 $2 \leq T_n < \frac{15}{4}$.

题型五：数列不定方程型

1. (重庆市第十一中学2023届高三上学期10月自主质量抽测数学试题) 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_2 + a_6 = 18$, $S_5 = 35$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 ;

(2) 试求所有的正整数 m , 使得 $\frac{4S_{m+1} - 20m - 27}{a_m a_{m+1}}$ 为整数.

【答案】(1) $a_n = 2n + 1$ (2) $m = 1$

【分析】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 根据已知条件可得出关于 a_1 、 d 的方程组 , 解出这两个量的值 , 可得出数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 ;

(2) 求出 $S_n = n^2 + 2n$, 可得出 $\frac{4S_{m+1} - 20m - 27}{a_m a_{m+1}} = 1 - \frac{6}{2m+1} \in \mathbb{Z}$, 根据 m 为正整数可求得 m 的值.

【详解】(1) 解 : 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 由题意可得 $\begin{cases} a_2 + a_6 = 2a_1 + 6d = 18 \\ S_5 = 5a_1 + 10d = 35 \end{cases}$, 解得 $\begin{cases} a_1 = 3 \\ d = 2 \end{cases}$.

$\therefore a_n = a_1 + (n-1)d = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$.

(2) 解 : 由 (1) 可得 $a_n = 2n + 1$, 则 $S_n = \frac{n(3+2n+1)}{2} = n^2 + 2n$.

所以 , $S_{m+1} = (m+1)^2 + 2(m+1) = m^2 + 4m + 3$.

则 $\frac{4S_{m+1} - 20m - 27}{a_m a_{m+1}} = \frac{4m^2 - 4m - 15}{(2m+1)(2m+3)} = \frac{2m-5}{2m+1} = 1 - \frac{6}{2m+1} \in \mathbb{Z}$.

因为 m 为正整数 , 且 $2m+1$ 为大于1的正奇数 , 故 $2m+1=3$, 解得 $m=1$.

故只有 $m=1$ 时 , $\frac{4S_{m+1} - 20m - 27}{a_m a_{m+1}} = \frac{4m^2 - 4m - 15}{(2m+1)(2m+3)} = -1$ 为整数成立.

2. (23-24 高三·上海·模拟) 已知函数 $f(x) = a \cdot b^x$ 的图像过点 $A\left(4, \frac{1}{4}\right)$ 和 $B(5, 1)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式 ;

(2) 记 $a_n = \log_2 f(n)$, n 是正整数 , S_n 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 , 解关于 n 的不等式 $a_n S_n \geq 0$;

(3) 对于 (2) 中的数列 a_n , 整数 10^4 是否为 $\{a_n S_n\}$ 中的项? 若是 , 则求出相应的项; 若不是 , 则说明理由.

【答案】(1) $f(x) = \frac{1}{1024} \cdot 4^x$; (2) $n = 5, 6, 7, 8, 9$; (3) 10^4 不是数列 $\{a_n S_n\}$ 中的项 , 理由见解析

【分析】(1) 将点 A 、 点 B 代入函数解析式 , 求得 a 、 b 即可.

(2) 易得 $a_n = 2n - 10$, 再由等差数列前 n 项和公式得到 $S_n = n(n-9)$, 解不等式 $a_n S_n \geq 0$ 即可.

(3) 令 $2n(n-5)(n-9)=10^4$ ，再论证方程是否有正整数解即可。

【详解】(1) 因为函数 $f(x)=a \cdot b^x$ 的图像过点 $A\left(4, \frac{1}{4}\right)$ 和 $B(5,1)$ ，所以 $\begin{cases} ab^4 = \frac{1}{4} \\ ab^5 = 1 \end{cases}$ ，解得 $a = \frac{1}{1024}, b = 4$ ，

所以 $f(x) = \frac{1}{1024} \cdot 4^x$ 。

(2) 由(1)知： $a_n = \log_2 \left(\frac{1}{1024} \cdot 4^n \right) = 2n - 10$ ，所以 $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n(n-9)$

所以 $a_n S_n \geq 0$ ，即为 $(2n-10)n(n-9) \leq 0$ ，所以 $(n-5)n(n-9) \leq 0$ ，解得 $5 \leq n \leq 9$ ，故 $n = 5, 6, 7, 8, 9$

(3) 由(2)知 $a_n S_n = 2n(n-5)(n-9)$ ，设 $2n(n-5)(n-9) = 10^4$ ，令 $f(n) = 2n(n-5)(n-9)$ ，

当 $1 \leq n \leq 4$ 时， $f(1) = a_1 S_1 = 64$ ， $f(2) = a_2 S_2 = 84$ ， $f(3) = a_3 S_3 = 72$ ， $f(4) = a_4 S_4 = 40$ ，

由(2)知当 $5 \leq n \leq 9$ 时，易知 $a_n S_n \geq 0$ ，

当 $n \geq 10$ 时， $f(n+1) - f(n) = 2(n+1)(n-4)(n-8) - 2n(n-5)(n-9) = 2(3n^2 - 25n + 32) > 0$ ，所以 $f(n)$ 单调递增，

当 $10 \leq n \leq 22$ 时， $a_n S_n = a_{22} S_{22} = 9724 < 10^4$ ，当 $n \geq 23$ 时， $a_n S_n \geq a_{23} S_{23} = 11592 > 10^4$ 。

因此 10^4 不是数列 $\{a_n S_n\}$ 中的项。

3. (22-23 高三·湖北·联考) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，首项 $a_1 > 0$ ，若 $a_4, 3a_3, a_5$ 成等差数列且 $a_4 = 2a_2 + 4$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) λ 为整数，是否存在正整数 n 使 $10a_n = \lambda S_n + 2\lambda$ 成立？若存在，求正整数 n 及 λ ；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $a_n = 2^{n-1}$ ；

(2) 存在 $n=2$ 时 $\lambda=4$ 满足条件，理由见解析。

【分析】(1) 由已知求出 q, a_1 即可；(2) 根据等比数列求和公式求出 S_n ，然后将数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n 及 S_n 代入 $10a_n = \lambda S_n + 2\lambda$ 化简即可解决问题。

【详解】(1) 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q ，则

$a_4 + a_5 = 6a_3$ 即 $a_3 q + a_3 q^2 = 6a_3$ ， $\therefore q^2 + q - 6 = 0$ ， $\therefore q = 2$ 或 $q = -3$ 。

又 $a_4 = 2a_2 + 4$ 即 $a_1 q(q^2 - 2) = 4$ ， $\therefore a_1 > 0$ ， $\therefore q = 2$ ， $a_1 = 1$ ， $\therefore a_n = 2^{n-1}$ 。

(2) $S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = 2^n - 1$ ， $10a_n = \lambda S_n + 2\lambda$ ， $\therefore \lambda = \frac{10a_n}{S_n + 2} = \frac{5 \times 2^n}{2^n + 1} = 5 - \frac{5}{2^n + 1}$ ，

$\therefore \lambda$ 为整数， $\therefore n=2$ 时 $\lambda=4$ 。

$\therefore$ 存在 $n=2$ 时 $\lambda=4$ 满足条件。

题型六：恒成立求参：奇偶讨论型



正负相间讨论型：

1. 奇偶项正负相间型求和，可以两项结合构成“常数数列”。

2. 如果需要讨论奇偶，一般情况下，先求偶，再求奇。求奇时候，直接代入偶数项公式，再加上最后的奇数项通项。

3. 分奇偶讨论时，对于奇数，带入时要代入 1, 3, 5 等奇数。对于偶数，代入时要代入 2, 4, 6, ...

1. (重庆市第一中学校 2022-2023 学年高三数学试题) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_n = 2a_n - 2$ 。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = \frac{2n-1}{a_n}$ ，数列 $\{b_n\}$ 前 n 项和为 T_n ，是否存在实数 λ ，使得 $T_n < \lambda(-1)^m a_m + 3$ 对任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立，若存在，求出实数 λ 的所有取值；若不存在，说明理由。

【答案】(1) $a_n = 2^n$ ；(2) 存在，0。

【分析】(1) 根据给定的递推公式，探讨数列 $\{a_n\}$ 的性质，再求出其通项公式作答。

(2) 由 (1) 求出 b_n ，利用错位相减法求出 T_n ，再结合数列不等式恒成立求解作答。

【详解】(1) 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ， $S_n = 2a_n - 2$ ，当 $n \geq 2$ 时， $S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2$ ，两式相减得：
 $a_n = 2a_n - 2a_{n-1}$ ，即有 $a_n = 2a_{n-1}$ ，而 $a_1 = S_1 = 2a_1 - 2$ ，即 $a_1 = 2$ ，因此数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列。

所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n = 2^n$ 。

(2) 由 (1) 知， $b_n = \frac{2n-1}{2^n}$ ， $T_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \dots + \frac{2n-1}{2^n}$ ，

则 $\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{5}{2^4} + \dots + \frac{2n-3}{2^n} + \frac{2n-1}{2^{n+1}}$ 。

两式相减得： $\frac{1}{2}T_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} + \frac{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2^{n-1}})}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{2n-1}{2^{n+1}} = \frac{3}{2} - \frac{2n+3}{2^{n+1}}$ 。

于是得 $T_n = 3 - \frac{2n+3}{2^n}$ ，显然 $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ， $T_n < 3$ 。

假设存在实数 λ ，使得 $T_n < \lambda(-1)^m a_m + 3$ 对任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立，

则存在实数 λ ，使得 $\lambda(-1)^m a_m + 3 \geq 3$ 对任意 $m \in \mathbb{N}^*$ 恒成立，即 $\forall m \in \mathbb{N}^*$ ， $\lambda(-1)^m \cdot 2^m \geq 0 \Leftrightarrow \lambda(-1)^m \geq 0$ 成立，
 当 m 为正偶数时， $\lambda \geq 0$ ，当 m 为正奇数时， $\lambda \leq 0$ ，从而 $\lambda = 0$ 。

所以存在实数 λ ，使得 $T_n < \lambda(-1)^m a_m + 3$ 对任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立， λ 的值为 0。

2. (天津市青光中学 2022-2023 学年高三上学期数学试题) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列， $\{b_n\}$ 为等比数列，

$a_1 = b_1 = 1, a_5 = 5(a_4 - a_3), b_5 = 4(b_4 - b_3)$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $c_n = a_n \cdot b_n$ ，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ；

(3) 记 $d_n = 3^n - 2 \cdot (-1)^n \lambda b_n (\lambda \neq 0)$ ，是否存在实数 λ ，使得对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ ，恒有 $d_{n+1} > d_n$ ？若存在，求出 λ 的取值范围；若不存在，说明理由。

【答案】(1) $a_n = n$ ， $b_n = 2^{n-1}$ (2) $T_n = (n-1) \cdot 2^n + 1$ (3) 见解析

【分析】(1) 根据等差、等比数列通项公式，结合题设求基本量，进而写出 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 由 (1) 得 $c_n = n \cdot 2^{n-1}$ ，应用错位相减法求前 n 项和 T_n ；

(3) 由 (1) 得 $d_n = 3^n - (-2)^n \lambda$ ，要使题设不等式恒成立即 $(-2)^{n-1} \lambda < 3^{n-1}$ 在 $n \in \mathbb{N}^*$ 上恒成立，讨论 n 的奇偶性，判断是否存在 λ 使之成立。

【详解】(1) 若 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，结合题设可得： $a_1 + 4d = 5d$ ，又 $a_1 = 1$ ，故 $d = 1$ ，

$\therefore a_n = n$ 。

若 $\{b_n\}$ 的公比为 q 且 $q \neq 0$ ，结合题设可得： $b_1 q^4 = 4b_1 q^2 (q-1)$ ，又 $b_1 = 1$ ，故 $q = 2$ 。

$$\therefore b_n = 2^{n-1}.$$

(2) 由 (1) 知： $c_n = n \cdot 2^{n-1}$ 。

$$\therefore T_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n = 1 \cdot 2^0 + 2 \cdot 2^1 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1},$$

$$\therefore 2T_n = 1 \cdot 2^1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \dots + (n-1) \cdot 2^{n-1} + n \cdot 2^n,$$

以上两式相减，得： $-T_n = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} - n \cdot 2^n = \frac{1-2^n}{1-2} - n \cdot 2^n = (1-n) \cdot 2^n - 1$ ，

$$\therefore T_n = (n-1) \cdot 2^n + 1.$$

(3) 由题设， $d_n = 3^n - (-2)^n \lambda$ ，要使任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒有 $d_{n+1} > d_n$ ，

$$\therefore 3^{n+1} - (-2)^{n+1} \lambda > 3^n - (-2)^n \lambda，则 (-2)^{n-1} \lambda < 3^{n-1} 恒成立$$

当 n 为奇数时， $\lambda < \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ 恒成立，而 $\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \geq 1$ ，故当 $\lambda < 1$ 且 $\lambda \neq 0$ 时，存在 $n \in \mathbf{N}^*$ 使其成立；

当 n 为偶数时， $\lambda > -\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$ 恒成立，而 $-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \leq -\frac{3}{2}$ ，故当 $\lambda > -\frac{3}{2}$ 且 $\lambda \neq 0$ 时，存在 $n \in \mathbf{N}^*$ 使其成立；

综上，存在实数 $\lambda \in \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \cup (0, 1)$ ，使得对任意的 $n \in \mathbf{N}^*$ ，恒有 $d_{n+1} > d_n$ 。

3. (22-23 高三·吉林·阶段练习) 数列 $\{a_n\}$ 中， $a_1 = 1$ ，点 $p(a_n, a_{n+1})$ 在直线 $x - y + 2 = 0$ 上。

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 令 $b_n = \frac{1}{a_n a_{n+1}}$ ，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 。

(i) 求 S_n ；

(ii) 是否存在整数 $\lambda (\lambda \neq 0)$ ，使得不等式 $(-1)^n \lambda < \frac{1+4S_n}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$ 恒成立？若存在，求出所有 λ 的值；若不存在，请说明理由。

【答案】(1) $a_n = 2n$ ；(2) $\{-1, 1\}$ 。

【分析】(1) 由题意结合等差数列的定义可知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 2，据此求解其通项公式即可；

(2) (i) 由题意可得 $b_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right)$ ，然后裂项求和确定其前 n 项和即可。

(ii) 由题意分类讨论 n 为奇数和 n 为偶数两种情况可得 λ 取值集合为 $\{-1, 1\}$ 。

【详解】(1) 因为 $a_1 = 1$ ， $p(a_n, a_{n+1})$ 在直线 $x - y + 2 = 0$ 上，

所以 $a_{n+1} - a_n = 2$ ，即数列 $\{a_n\}$ 为等差数列，公差为 2，

所以 $a_n = 2n - 1$ 。

$$(2) (i) b_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\therefore S_n = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right] \therefore S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right), \therefore S_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{4n+2}.$$

(ii) 存在整数 λ 使得不等式 $(-1)^n \lambda < \frac{1+4S_n}{2} (n \in \mathbf{N}^*)$ 恒成立，因为 $\frac{1+4S_n}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2n+1}$ 。

要使得不等式 $(-1)^n \lambda < \frac{3}{2} - \frac{1}{2n+1} (n \in \mathbf{N}^*)$ 恒成立，应有：当 n 为奇数时， $(-1)^n \lambda < \frac{3}{2} - \frac{1}{2n+1}$ ，即 $\lambda > -$

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{2n+1}.$$

所以当 $n=1$ 时, $-\frac{3}{2} + \frac{1}{2n+1}$ 的最大值为 $-\frac{7}{6}$, 所以只需 $\lambda > -\frac{7}{6}$. 当 n 为偶数时, $\lambda < \frac{3}{2} - \frac{1}{2n+1}$.

所以当 $n=2$ 时, $\frac{3}{2} - \frac{1}{2n+1}$ 的最小值为 $\frac{13}{10}$, 所以只需 $\lambda < \frac{13}{10}$. 可知存在 $-\frac{7}{6} < \lambda < \frac{13}{10}$, 且 $\lambda \neq 0$.

又 λ 为整数, 所以 λ 取值集合为 $\{-1, 1\}$.

题型七：下标数列



下标数列

下标数列, 最常用的是直接函数代入型, $a_n = f(n)$, 则 $a_{g(n)} = f(g(n))$

下标数列, 要注意随着下标数列的代入, 对应的项数和新数列的性质, 以及系数列与原母数列是否存在着联系, 以利用解题突破

1. (2023 江苏高考模拟) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_n = \begin{cases} a_n + \frac{1}{4}, & n \text{ 为偶数,} \\ 2a_{\frac{n+1}{2}} - a + \frac{1}{2}, & n \text{ 为奇数,} \end{cases} \quad (n \in N^*, a \in R, a \text{ 为常数})$

数列 $\{b_n\}$ 中, $b_n = a_{2^{2n-1}}$. (1)求 a_1, a_2, a_3 ; (2)证明: 数列 $\{b_n\}$ 为等差数列;

(3)求证: 数列 $\{b_n\}$ 中存在三项构成等比数列时, a 为有理数.

【答案】 (1) $a_1 = a - \frac{1}{2}$, $a_2 = a - \frac{1}{4}$, $a_3 = a$; (2) 首项为 a , 公差为 1 的等差数列; (3) 见解析.

【详解】 (1) 由已知 $a_1 = 2a_1 - a + \frac{1}{2}$, 得 $a_1 = a - \frac{1}{2}$. $a_2 = a_1 + \frac{1}{4} = a - \frac{1}{4}$, $a_3 = 2a_2 - a + \frac{1}{2} = a$

(2) $b_n = a_{2^{2n-1}} = 2a_{2^{2n-2}} - a + \frac{1}{2}$, $b_{n+1} = a_{2^{2n+1-1}} = 2a_{2^{2n}} - a + \frac{1}{2} = 2\left(a_{2^{2n}} + \frac{1}{4}\right) - a + \frac{1}{2} = 2a_{2^{2n}} - a + 1$

$= 2\left(a_{2^{2n-1}} + \frac{1}{4}\right) - a + 1 = 2a_{2^{2n-1}} - a + \frac{3}{2} \therefore b_{n+1} - b_n = 1$, 又 $b_1 = a_3 = a$

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是首项为 a , 公差为 1 的等差数列

(3) 证明: 由(2)知 $b_n = a + n - 1$ 若三个不同的项 $a+i, a+j, a+k$ 成等比数列, i, j, k 为非负整数, 且

$i < j < k$, 则: $(a+j)^2 = (a+i)(a+k)$, 得 $a(i+k-2j) = j^2 - ik$

若 $i+k-2j=0$, 则 $j^2 - ik = 0$, 得 $i=j=k$, 这与 $i < j < k$ 矛盾.

若 $i+k-2j \neq 0$, 则 $a = \frac{j^2 - ik}{i+k-2j}$ $Q i, j, k$ 为非负整数 $\therefore a$ 是有理数

2. (湖北省黄冈中学 2023 届高三下学期 5 月第三次模拟考试数学试题) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $\{b_n\}$ 是等比数列.

已知 $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 2a_2$, $b_3 = 2a_3 + 2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \begin{cases} 1, & n = 2^k \\ a_n, & n \neq 2^k \end{cases} (k \in \mathbb{N})$, 设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求 S_{2^n} .

【答案】(1) $a_n = n$, $b_n = 2^n$; (2) $S_{2^n} = 2^{2n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + n + 2$.

【分析】

(1) 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列, 根据条件求出 $d = 1$, $q = 2$, 再代入通项公式即可;

(2) 利用等差数列和等比数列的前 n 项和公式求和, 即可得答案;

【详解】

(1) 设 $\{a_n\}$ 是公差为 d 的等差数列, $\{b_n\}$ 是公比为 q 的等比数列,

由 $a_1 = 1$, $b_1 = 2$, $b_2 = 2a_2$, $b_3 = 2a_3 + 2$,

可得 $2q = 2(1+d)$, $2q^2 = 2(1+2d) + 2$,

解得 $d = 1$, $q = 2$,

则 $a_n = 1 + n - 1 = n$, $b_n = 2^n$, $n \in \mathbb{N}^*$;

(2) $S_{2^n} = c_1 + c_2 + \dots + c_{2^n} = (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2^n}) - (a_{2^1} + a_{2^2} + \dots + a_{2^n}) + n$
 $= (1 + 2 + 3 + \dots + 2^n) - (2 + 2^2 + \dots + 2^n) + n$
 $= \frac{1}{2}(1 + 2^n)2^n - \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} + n = 2^{n-1}(1 + 2^n) - 2^{n+1} + 2 + n = 2^{2n-1} - 3 \cdot 2^{n-1} + n + 2$.

3. (河北省衡水市第二中学 2023 届高三模拟数学试题) 定义集合 $M = \{2^{k-1} | k \in \mathbb{N}^*\}$, 数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_n = \begin{cases} a_{n-1} + 2, & n \notin M \\ 0, & n \in M \end{cases}$$

(1) 定义数列 $b_n = a_{2^n + 2^{n-1}}$, 证明: $\{b_n\}$ 为等比数列

(2) 记数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 求满足 $S_{2^n} = 310$ 的正整数 n

【答案】(1) 证明见解析 (2) 5

【分析】(1) 根据数列 $\{a_n\}$ 的递推公式求出 b_n , 再根据等比数列的定义可证结论正确;

(2) 求出 $S_{2^n} - S_{2^{n-1}} = a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \dots + a_{2^n} = 4^{n-1} - 2^{n-1}$, 再根据累加法求出 S_{2^n} , 然后解方程 $S_{2^n} = 310$ 可得结果.

【详解】(1) 依题意可得, $a_{2^n} = 0$, $b_1 = a_{2+1} = a_3 = a_2 + 2 = 2$, $b_2 = a_{4+2} = a_6 = a_5 + 2 = a_4 + 4 = 4$,

当 $n \geq 3$ 时, $b_n = a_{2^n + 2^{n-1}} = a_{2^{n-1} + 2^{n-1} + 1} + 2 = a_{2^{n-1} + 2^{n-1} - 2} + 2 \times 2 = a_{2^{n-1} + 2^{n-1} - 3} + 3 \times 2 = \dots = a_{2^{n-1} + 2^{n-1} - 2^{n-1}} + 2^{n-1} \cdot 2$

$= a_{2^n} + 2^n = 2^n$, 又 $b_1 = 2$, $b_2 = 4$ 都适合上式, 所以 $b_n = 2^n$,

因为 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$, 所以 $\{b_n\}$ 为等比数列.

(2) 依题意得 $a_{2^{n-1}} = a_{2^n} = 0$, $S_{2^n} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2^n}$, $S_{2^{n-1}} = a_1 + a_2 + \dots + a_{2^{n-1}}$,

所以 $S_{2^n} - S_{2^{n-1}} = a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \dots + a_{2^n} = a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \dots + a_{2^{n-1}+2^{n-1}-1}$,

又 $a_{2^{n-1}+1} = a_{2^{n-1}} + 2 = 2 \times 1$, $a_{2^{n-1}+2} = a_{2^{n-1}+1} + 2 = 2 + 2 = 4 = 2 \times 2$, $a_{2^{n-1}+3} = a_{2^{n-1}+2} + 2 = 4 + 2 = 6 = 2 \times 3$, $\dots$,

$a_{2^{n-1}+2^{n-1}-1} = 2(2^{n-1} - 1)$, 所以 $S_{2^n} - S_{2^{n-1}} = a_{2^{n-1}+1} + a_{2^{n-1}+2} + \dots + a_{2^{n-1}+2^{n-1}-1} = 2 \times 1 + 2 \times 2 + \dots + 2(2^{n-1} - 1)$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/245241340011012020>