

2024 届新疆库车县乌尊镇乌尊中学高三下学期入学测试（四）数学试题试卷

注意事项：

1. 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚，将条形码准确粘贴在条形码区域内。
2. 答题时请按要求用笔。
3. 请按照题号顺序在答题卡各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效；在草稿纸、试卷上答题无效。
4. 作图可先使用铅笔画出，确定后必须用黑色字迹的签字笔描黑。
5. 保持卡面清洁，不要折暴、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、修正带、刮纸刀。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 等比数列 $\{a_n\}$, 若 $a_3 = 4, a_{15} = 9$ 则 $a_9 =$ ()

- A. ± 6 B. 6 C. -6 D. $\frac{13}{2}$

2. 已知 m, n 为异面直线, $m \perp$ 平面 α , $n \perp$ 平面 β , 直线 l 满足 $l \perp m, l \perp n, l \not\subset \alpha, l \not\subset \beta$, 则 ()

- A. $\alpha \parallel \beta$ 且 $l \parallel \alpha$ B. $\alpha \perp \beta$ 且 $l \perp \beta$
C. α 与 β 相交, 且交线垂直于 l D. α 与 β 相交, 且交线平行于 l

3. 已知集合 $A = \left\{x \mid \frac{x-1}{x+2} < 0\right\}, B = \{-1, 0, 1\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()

- A. $\{x \mid -1 < x < 1\}$ B. $\{-1, 0, 1\}$ C. $\{-1, 0\}$ D. $\{0, 1\}$

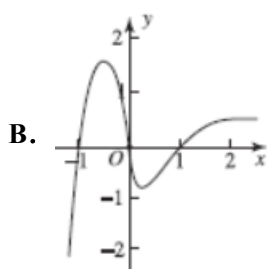
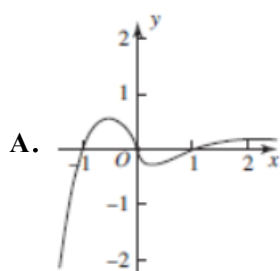
4. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 $2c$, 焦点到双曲线 C 的渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$, 则双曲线的渐近线方程为 ()

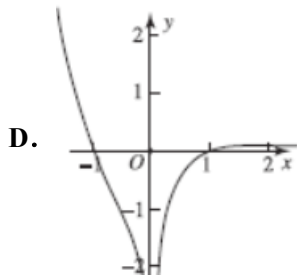
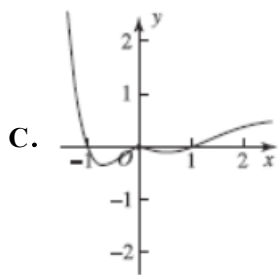
- A. $y = \pm \sqrt{3}x$ B. $y = \pm \sqrt{2}x$ C. $y = \pm x$ D. $y = \pm 2x$

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$, 公差 $d \neq 0$, 且 a_1, a_2, a_5 成等比数列, 则 $d =$

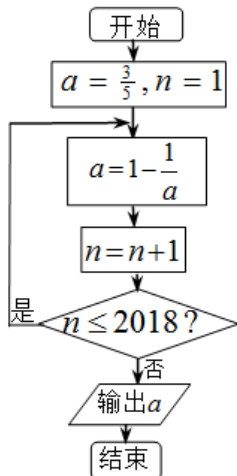
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

6. 函数 $f(x) = \frac{x \ln |x|}{e^x}$ 的大致图象为 ()



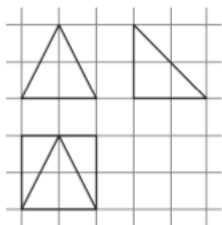


7. 阅读如图的程序框图，运行相应的程序，则输出的 a 的值为 ()



- A. $-\frac{2}{3}$ B. $-\frac{3}{2}$ C. $\frac{5}{2}$ D. $\frac{2}{5}$

8. 如图所示，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线画出的是某几何体的三视图，则该几何体的体积是 ()



- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{16}{3}$ C. $\frac{4}{3}$ D. 8

9. 设 i 为虚数单位，复数 $z = (a+i)(1-i) \in \mathbb{R}$ ，则实数 a 的值是 ()

- A. 1 B. -1 C. 0 D. 2

10. 已知函数 $f(x) = \ln x$ ， $g(x) = (2m+3)x + n$ ，若对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 总有 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立，记 $(2m+3)n$ 的最小值为 $f(m, n)$ ，则 $f(m, n)$ 最大值为 ()

- A. 1 B. $\frac{1}{e}$ C. $\frac{1}{e^2}$ D. $\frac{1}{\sqrt{e}}$

11. 若点 $P(-3, 4)$ 是角 α 的终边上一点，则 $\sin 2\alpha =$ ()

- A. $-\frac{24}{25}$ B. $-\frac{7}{25}$ C. $\frac{16}{25}$ D. $\frac{8}{5}$

12. 已知某口袋中有 3 个白球和 a 个黑球 ($a \in N^*$), 现从中随机取出一球, 再换回一个不同颜色的球 (即若取出的是白球, 则放回一个黑球; 若取出的是黑球, 则放回一个白球), 记换好球后袋中白球的个数是 ξ . 若 $E\xi = 3$, 则

$$D\xi = (\quad)$$

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{3}{2}$ D. 2

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $2c \cos B = 2a + b$, 则 $\angle C =$ _____.

14. 设 P 为有公共焦点 F_1, F_2 的椭圆 C_1 与双曲线 C_2 的一个交点, 且 $PF_1 \perp PF_2$, 椭圆 C_1 的离心率为 e_1 , 双曲线 C_2 的离心率为 e_2 , 若 $e_2 = 3e_1$, 则 $e_1 =$ _____.

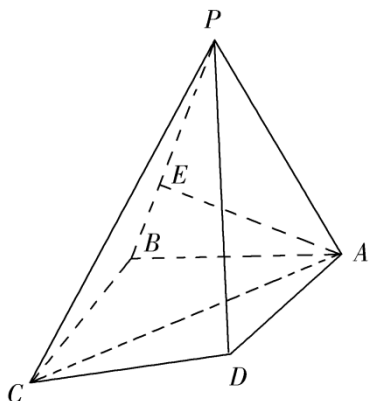
15. 已知 $(ax+b)^6$ 的展开式中 x^4 项的系数与 x^5 项的系数分别为 135 与 -18, 则 $(ax+b)^6$ 展开式所有项系数之和为 _____.

16. 已知 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, 过左焦点 F_1 的直线与椭圆 C 交于 A, B 两点, 且 $|AF_1| = 3|BF_1|, |AB| = |BF_2|$, 则椭圆的离心率为 _____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\triangle PAB$ 是等边三角形, $BC \perp AB$, $BC = CD = 2\sqrt{3}$, $AB = AD = 2$.

- (1) 若 $PB = 3BE$, 求证: $AE \perp$ 平面 PCD ;
(2) 若 $PC = 4$, 求二面角 $A-PC-B$ 的正弦值.



18. (12 分) 已知函数 $f(x) = ax \ln x + b$ (a, b 为实数) 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = x - 1$.

(1) 求实数 a, b 的值及函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 设函数 $g(x) = \frac{f(x)+1}{x}$, 证明 $g(x_1) = g(x_2) (x_1 < x_2)$ 时, $x_1 + x_2 > 2$.

19. (12 分) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = m^2 \\ y = 2m \end{cases}$ (m 为参数). 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin \theta - \rho \cos \theta + 1 = 0$.

(I) 求直线 l 的直角坐标方程与曲线 C 的普通方程;

(II) 已知点 $P(2, 1)$, 设直线 l 与曲线 C 相交于 M, N 两点, 求 $\frac{1}{|PM|} + \frac{1}{|PN|}$ 的值.

20. (12 分) 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho \cos^2 \theta = 4 \sin \theta$.

(1) 求曲线 C_1 的极坐标方程和曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 过原点且倾斜角为 $\alpha (\frac{\pi}{4} \leq \alpha < \frac{\pi}{3})$ 的射线 l 与曲线 C_1, C_2 分别交于 A, B 两点 (异于原点), 求 $|OA| \cdot |OB|$ 的取值范围.

21. (12 分) $f(x) = \ln x - ax$ 有最大值, 且最大值大于 0.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 当 $a = \frac{1}{3}$ 时, $f(x)$ 有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 证明: $x_1^2 x_2 < 30$.

(参考数据: $\ln 0.9 \approx -0.1$)

22. (10 分) 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列, $\{b_n\}$ 为等比数列, $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 满足 $a_1 = 3, b_1 = 1, b_2 + S_2 = 10, a_5 - 2b_2 = a_3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 令 $c_n = \begin{cases} \frac{2}{S_n}, & n \text{ 为奇数} \\ b_n, & n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n , 求 T_{2n} .

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、B

【解析】

根据等比中项性质代入可得解，由等比数列项的性质确定值即可。

【详解】

由等比数列中等比中项性质可知， $a_3 \cdot a_{15} = a_9^2$ ，

所以 $a_9 = \pm\sqrt{a_3 \cdot a_{15}} = \pm\sqrt{36} = \pm 6$ ，

而由等比数列性质可知奇数项符号相同，所以 $a_9 = 6$ ，

故选：B.

【点睛】

本题考查了等比数列中等比中项的简单应用，注意项的符号特征，属于基础题。

2、D

【解析】

试题分析：由 $m \perp$ 平面 α ，直线 l 满足 $l \perp m$ ，且 $l \not\subset \alpha$ ，所以 $l \parallel \alpha$ ，又 $n \perp$ 平面 β ， $l \perp n, l \not\subset \beta$ ，所以 $l \parallel \beta$ ，由直线 m, n 为异面直线，且 $m \perp$ 平面 $\alpha, n \perp$ 平面 β ，则 α 与 β 相交，否则，若 $\alpha \parallel \beta$ 则推出 $m \parallel n$ ，与 m, n 异面矛盾，所以 α, β 相交，且交线平行于 l ，故选 D.

考点：平面与平面的位置关系，平面的基本性质及其推论。

3、C

【解析】

先化简集合 A ，再与集合 B 求交集。

【详解】

因为 $A = \left\{ x \mid \frac{x-1}{x+2} < 0 \right\} = \{x \mid -2 < x < 1\}$ ， $B = \{-1, 0, 1\}$ ，

所以 $A \cap B = \{-1, 0\}$.

故选：C

【点睛】

本题主要考查集合的基本运算以及分式不等式的解法，属于基础题.

4、A

【解析】

利用双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦点到渐近线的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ ，求出 a, b 的关系式，然后求解双曲线的渐近线方程.

【详解】

双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦点 $(c, 0)$ 到渐近线 $bx + ay = 0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{3}}{2}c$ ，

可得： $\frac{bc}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}c$ ，可得 $\frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $\frac{b}{a} = \sqrt{3}$ ，则 C 的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$ 。

故选 A.

【点睛】

本题考查双曲线的简单性质的应用，构建出 a, b 的关系是解题的关键，考查计算能力，属于中档题.

5、D

【解析】

先用公差 d 表示出 a_2, a_5 ，结合等比数列求出 d 。

【详解】

$a_2 = 2 + d, a_5 = 2 + 4d$ ，因为 a_1, a_2, a_5 成等比数列，所以 $(2 + d)^2 = 2(2 + 4d)$ ，解得 $d = 4$ 。

【点睛】

本题主要考查等差数列的通项公式.属于简单题，化归基本量，寻求等量关系是求解的关键.

6、A

【解析】

利用特殊点的坐标代入，排除掉 C, D；再由 $f(-\frac{1}{2}) < 1$ 判断 A 选项正确.

【详解】

$f(-1.1) = \frac{-1.1 \ln |1.1|}{e^{1.1}} < 0$ ，排除掉 C, D；

$f(-\frac{1}{2}) = \frac{-\frac{1}{2} \ln |\frac{1}{2}|}{e^{-\frac{1}{2}}} = \sqrt{e} \ln \sqrt{2}$ ，

$$Q \ln \sqrt{2} < \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}, \quad \sqrt{e} < 2,$$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} \ln \sqrt{2} < 1.$$

故选：A.

【点睛】

本题考查了由函数解析式判断函数的大致图象问题，代入特殊点，采用排除法求解是解决这类问题的一种常用方法，属于中档题.

7、C

【解析】

根据给定的程序框图，计算前几次的运算规律，得出运算的周期性，确定跳出循环时的 n 的值，进而求解 a 的值，得到答案.

【详解】

由题意， $a = \frac{3}{5}, n = 1$,

第 1 次循环， $a = -\frac{2}{3}, n = 2$ ，满足判断条件；

第 2 次循环， $a = \frac{5}{2}, n = 3$ ，满足判断条件；

第 3 次循环， $a = \frac{3}{5}, n = 4$ ，满足判断条件；

L L

可得 a 的值满足以 3 项为周期的计算规律，

所以当 $n = 2019$ 时，跳出循环，此时 n 和 $n = 3$ 时的值对应的 a 相同，即 $a = \frac{5}{2}$.

故选：C.

【点睛】

本题主要考查了循环结构的程序框图的计算与输出问题，其中解答中认真审题，得出程序运行时的计算规律是解答的关键，着重考查了推理与计算能力.

8、A

【解析】

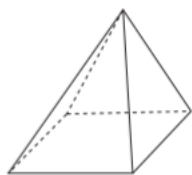
由三视图还原出原几何体，得出几何体的结构特征，然后计算体积.

【详解】

由三视图知原几何体是一个四棱锥，四棱锥底面是边长为 2 的正方形，高为 2，

直观图如图所示， $V = \frac{1}{3} \times 2 \times 2 \times 2 = \frac{8}{3}$.

故选：A.



【点睛】

本题考查三视图，考查棱锥的体积公式，掌握基本几何体的三视图是解题关键.

9、A

【解析】

根据复数的乘法运算化简，由复数的意义即可求得 a 的值.

【详解】

复数 $z = (a+i)(1-i) \in R$,

由复数乘法运算化简可得 $z = a+1+(1-a)i$,

所以由复数定义可知 $1-a=0$,

解得 $a=1$,

故选：A.

【点睛】

本题考查了复数的乘法运算，复数的意义，属于基础题.

10、C

【解析】

对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 总有 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立，因为 $\ln x \leq (2m+3)x+n$ ，对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，可得 $2m+3 > 0$ ，

令 $y = \ln x - (2m+3)x - n$ ，可得 $y' = \frac{1}{x} - (2m+3)$ ，结合已知，即可求得答案.

【详解】

Q 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 总有 $f(x) \leq g(x)$ 恒成立

$\therefore \ln x \leq (2m+3)x+n$ ，对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立，

$\therefore 2m+3 > 0$

令 $y = \ln x - (2m+3)x - n$ ，

$$\text{可得 } y' = \frac{1}{x} - (2m+3)$$

$$\text{令 } y' = 0, \text{ 得 } x = \frac{1}{2m+3}$$

$$\text{当 } x > \frac{1}{2m+3}, y' < 0$$

$$\text{当 } 0 < x < \frac{1}{2m+3}, y' > 0$$

$$\therefore x = \frac{1}{2m+3}, y_{\max} = \ln \frac{1}{2m+3} - 1 - n \leq 0, 2m+3 \geq e^{-1-n}$$

$$\text{故 } (2m+3)n \geq \frac{n}{e^{n+1}} = f(m, n)$$

$$\text{Q } f'(m, n) = \frac{1-n}{e^{n+1}}$$

$$\text{令 } \frac{1-n}{e^{n+1}} = 0, \text{ 得 } n = 1$$

$$\therefore \text{当 } n > 1 \text{ 时, } f'(m, n) < 0$$

$$\text{当 } n < 1, f'(m, n) > 0$$

$$\therefore \text{当 } n = 1 \text{ 时, } f(m, n)_{\max} = \frac{1}{e^2}$$

故选: C.

【点睛】

本题主要考查了根据不等式恒成立求最值问题, 解题关键是掌握不等式恒成立的解法和导数求函数单调性的解法, 考查了分析能力和计算能力, 属于难题.

11、A

【解析】

根据三角函数的定义, 求得 $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5}$, 再由正弦的倍角公式, 即可求解.

【详解】

由题意, 点 $P(-3, 4)$ 是角 α 的终边上一点,

根据三角函数的定义, 可得 $\sin \alpha = \frac{4}{5}, \cos \alpha = -\frac{3}{5}$,

则 $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \times \frac{4}{5} \times (-\frac{3}{5}) = -\frac{24}{25}$, 故选 A.

【点睛】

本题主要考查了三角函数的定义和正弦的倍角公式的化简、求值, 其中解答中根据三角函数的定义和正弦的倍角公式, 准确化简、计算是解答的关键, 着重考查了推理与运算能力, 属于基础题.

12、B

【解析】

由题意 $\xi = 2$ 或 4 ，则 $D\xi = \frac{1}{2}[(2-3)^2 + (4-3)^2] = 1$ ，故选 B.

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13、 120°

【解析】

$$\because 2c \cos B = 2a + b, \therefore 2c \times \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 2a + b, \text{ 即 } a^2 + b^2 - c^2 = -ab,$$

$$\therefore \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = -\frac{1}{2}, \therefore C = 120^\circ.$$

14、 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

【解析】

$$\text{设 } \angle F_1 A F_2 = 2\theta$$

根据椭圆的几何性质可得 $S_{\Delta P F_1 F_2} = b_1^2 \tan \theta = b_1^2$

$$\text{Q } e_1 = \frac{c}{a_1}, \therefore a_1 = \frac{c}{e_1}, \therefore b_1^2 = a_1^2 - c^2 = c^2 \left(\frac{1}{e_1^2} - 1 \right)$$

根据双曲线的几何性质可得， $S_{\Delta P F_1 F_2} = \frac{b_2^2}{\tan \theta} = b_2^2$

$$\text{Q } e_2 = \frac{c}{a_2}, \therefore a_2 = \frac{c}{e_2}$$

$$\therefore b_2^2 = c^2 - a_2^2 = c^2 \left(1 - \frac{1}{e_2^2} \right)$$

$$\therefore c^2 \left(\frac{1}{e_1^2} - 1 \right) = c^2 \left(1 - \frac{1}{e_2^2} \right)$$

$$\text{即 } \frac{1}{e_1^2} + \frac{1}{e_2^2} = 2, \text{Q } 3e_1 = e_2, \therefore e_1 = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

故答案为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$

15、64

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/246002040052010211>