

湖南省湘潭市第一中学 2024 届高三（最后冲刺）数学试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知等差数列 $\{a_n\}$ ，则“ $a_2 > a_1$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列”的（ ）

- A. 充分而不必要条件
- B. 必要而不充分条件
- C. 充分必要条件
- D. 既不充分也不必要条件

2. 集合 $M = \{y \mid y = \sqrt{4-x^2}, x \in \mathbf{Z}\}$ 的真子集的个数为（ ）

- A. 7
- B. 8
- C. 31
- D. 32

3. 已知向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 θ ，定义 $\vec{a} \times \vec{b}$ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的“向量积”，且 $\vec{a} \times \vec{b}$ 是一个向量，它的长度 $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \theta$ ，若 $\vec{u} = (2, 0)$ ， $\vec{u} - \vec{v} = (1, -\sqrt{3})$ ，则 $|\vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v})| =$ （ ）

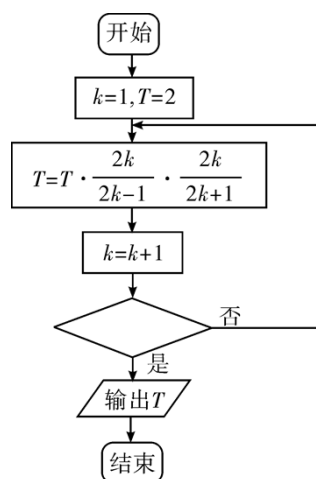
- A. $4\sqrt{3}$
- B. $\sqrt{3}$
- C. 6
- D. $2\sqrt{3}$

4. 已知平面 α 和直线 a, b ，则下列命题正确的是（ ）

- A. 若 $a \parallel b$ ， $b \parallel \alpha$ ，则 $a \parallel \alpha$
- B. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ， $b \perp \alpha$ ，则 $a \parallel \alpha$
- C. 若 $a \parallel b$ ， $b \perp \alpha$ ，则 $a \perp \alpha$
- D. 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ， $b \parallel \alpha$ ，则 $a \perp \alpha$

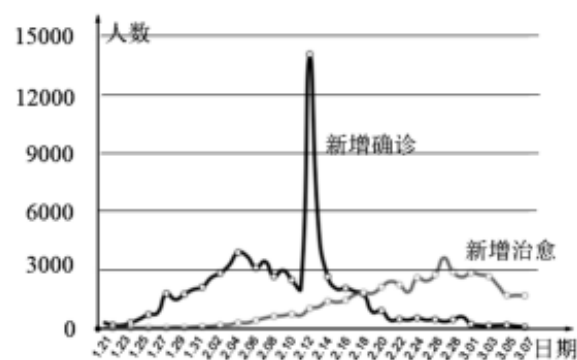
5. 历史上有不少数学家都对圆周率作过研究，第一个用科学方法寻求圆周率数值的人是阿基米德，他用圆内接和外切正多边形的周长确定圆周长的上下界，开创了圆周率计算的几何方法，而中国数学家刘徽只用圆内接正多边形就求得 π 的近似值，他的方法被后人称为割圆术。近代无穷乘积式、无穷连分数、无穷级数等各种 π 值的表达式纷纷出现，使得 π 值的计算精度也迅速增加。华理斯在 1655 年求出一个公式： $\frac{\pi}{2} = \frac{2 \times 2 \times 4 \times 4 \times 6 \times 6 \times L}{1 \times 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7 \times L}$ ，根据该公式绘制出了估计圆周率 π 的近似值的程序框图，如下图所示，执行该程序框图，已知输出的 $T > 2.8$ ，若判断框内填入的条件为

$k \geq m?$ ，则正整数 m 的最小值是



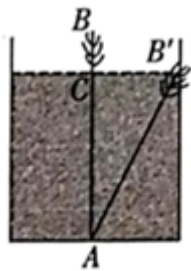
- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

6. 2020年初,湖北出现由新型冠状病毒引发的肺炎.为防止病毒蔓延,各级政府相继启动重大突发公共卫生事件一级响应,全国人心抗击疫情.下图表示1月21日至3月7日我国新型冠状病毒肺炎单日新增治愈和新增确诊病例数,则下列中表述错误的是()



- A. 2月下旬新增确诊人数呈波动下降趋势
 B. 随着全国医疗救治力度逐渐加大, 2月下旬单日治愈人数超过确诊人数
 C. 2月10日至2月14日新增确诊人数波动最大
 D. 我国新型冠状病毒肺炎累计确诊人数在2月12日左右达到峰值

7. 《九章算术》勾股章有一“引葭赴岸”问题“今有饼池径丈, 葭生其中, 出水两尺, 引葭赴岸, 适与岸齐, 问水深, 葭各几何?”, 其意思是: 有一个直径为一丈的圆柱形水池, 池中心生有一颗类似芦苇的植物, 露出水面两尺, 若把它引向岸边, 正好与岸边齐, 问水有多深, 该植物有多高? 其中一丈等于十尺, 如图若从该葭上随机取一点, 则该点取自水下的概率为()



- A. $\frac{12}{13}$ B. $\frac{13}{14}$ C. $\frac{21}{29}$ D. $\frac{14}{15}$

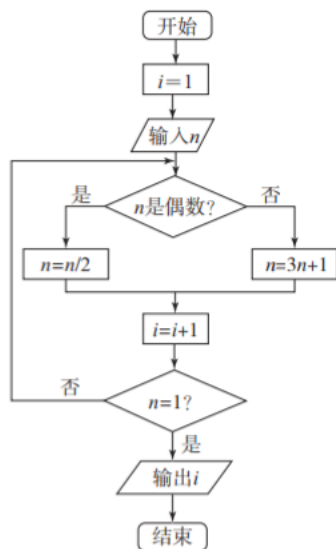
8. 点 O 在 $\triangle ABC$ 所在的平面内, $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$, $|\vec{AB}| = 2$, $|\vec{AC}| = 1$, $\vec{AO} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$), 且 $4\lambda - \mu = 2$ ($\mu \neq 0$), 则 $|\vec{BC}| =$ ()

- A. $\frac{7}{3}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ C. 7 D. $\sqrt{7}$

9. 设 x, y 满足 $\begin{cases} 2x + y \geq 4 \\ x - y \geq -1 \\ x - 2y \leq 2 \end{cases}$, 则 $z = x + y$ 的取值范围是 ()

- A. $[-5, 3]$ B. $[2, 3]$ C. $[2, +\infty)$ D. $(-\infty, 3]$

10. “角谷猜想”的内容是: 对于任意一个大于 1 的整数 n , 如果 n 为偶数就除以 2, 如果 n 是奇数, 就将其乘 3 再加 1, 执行如图所示的程序框图, 若输入 $n = 10$, 则输出 i 的 ()



- A. 6 B. 7 C. 8 D. 9

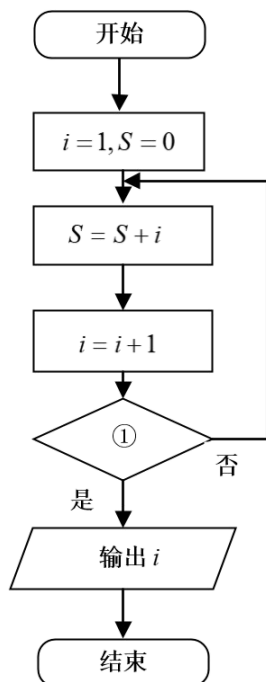
11. 已知 $p: \exists x_0 > 1, \log_{\frac{1}{2}} x_0 > \frac{1}{2}$; $q: \forall x \in \mathbb{R}, e^x > x$, 则下列说法中正确的是 ()

- A. $p \vee q$ 是假命题 B. $p \wedge q$ 是真命题

C. $p \vee (\neg q)$ 是真命题

D. $p \wedge (\neg q)$ 是假命题

12. 执行如图所示的程序框图, 若输出的值为 8, 则框图中①处可以填 ().



A. $S \geq 7?$

B. $S \geq 21?$

C. $S \geq 28?$

D. $S \geq 36?$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 一个算法的伪代码如图所示, 执行此算法, 最后输出的 T 的值为_____.

```

T ← 1
I ← 3
Do
    T ← T × I
    I ← I + 2
Until I > 6
End Do
Print T
(第4题)
    
```

14. 边长为 2 的菱形 $ABCD$ 中, AC 与 BD 交于点 O , E 是线段 OD 的中点, AE 的延长线与 CD 相交于点 F , 若 $\angle BAD = 60^\circ$, 则 $\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{EF} =$ _____.

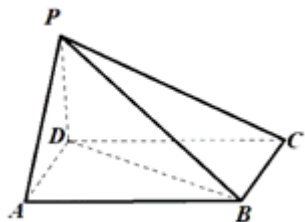
15. $f(x) = \begin{cases} 2e^{x-1}, & x < 2 \\ \log_3(x^2 - 1), & x \geq 2 \end{cases}$, 则 $f(f(2))$ 的值为_____.

16. 若复数 $z = 1 - 3i$ (i 是虚数单位), 则 $z(\bar{z} - 10) =$ _____.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是平行四边形， $PD \perp$ 底面

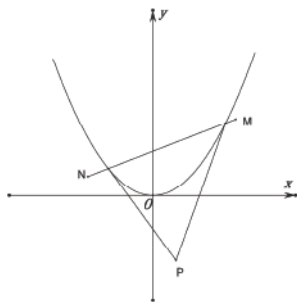
$$ABCD, \quad PD = AD = 1, AB = \sqrt{5}, \quad \sin \angle ABD = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$



(1) 证明： $PA \perp BD$ ；

(2) 求二面角 $A-PB-C$ 的正弦值。

18. (12 分) 已知直线 l 与抛物线 $C: x^2 = 4y$ 交于 M, N 两点。



(1) 当点 M, N 的横坐标之和为 4 时，求直线 l 的斜率；

(2) 已知点 $P(1, -2)$ ，直线 l 过点 $Q(0, 1)$ ，记直线 PM, PN 的斜率分别为 k_1, k_2 ，当 $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$ 取最大值时，求直线 l 的方程。

19. (12 分) 函数 $f(x) = ax - \ln(x+1)$, $g(x) = \sin x$ ，且 $f(x) \geq 0$ 恒成立。

(1) 求实数 a 的集合 M ；

(2) 当 $a \in M$ 时，判断 $f(x)$ 图象与 $g(x)$ 图象的交点个数，并证明。

(参考数据： $\ln 2 \approx 0.69, e^{\frac{x}{2}-1} \approx 1.77$)

20. (12 分) 设函数 $f(x) = x \ln x - ae^x$, $p(x) = kx$ ，其中 $a \in R, e$ 是自然对数的底数。

(I) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上存在两个极值点，求 a 的取值范围；

(II) 若 $\varphi(x) = \ln x + 1 - f'(x)$, $\varphi(1) = e$ ，函数 $\varphi(x)$ 与函数 $p(x)$ 的图象交于 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，且 AB

线段的中点为 $P(x_0, y_0)$ ，证明： $\varphi(x_0) < p(1) < y_0$ 。

21. (12 分) 在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 2\cos\alpha \\ y = 4 + 2\sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数)，以坐标原点为极点， x 轴

的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4\sin\theta$ 。

(1) 把 C_1 的参数方程化为极坐标方程：

(2) 求 C_1 与 C_2 交点的极坐标 ($\rho \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$)。

22. (10 分) 在平面直角坐标系中，曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos\theta \\ y = 1 + \sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数)。以原点为极点， x 轴的非负半轴

为极轴，建立极坐标系。

(1) 求曲线 C 的极坐标方程；

(2) 直线 $l: \begin{cases} x = 1 + t\cos\theta \\ y = t\sin\theta \end{cases}$ (t 为参数) 与曲线 C 交于 A, B 两点，求 $|AB|$ 最大时，直线 l 的直角坐标方程。

参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1、C

【解析】

试题分析：根据充分条件和必要条件的定义进行判断即可。

解：在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_2 > a_1$ ，则 $d > 0$ ，即数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，

若数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列，则 $a_2 > a_1$ ，成立，

即“ $a_2 > a_1$ ”是“数列 $\{a_n\}$ 为单调递增数列”充分必要条件，

故选 C。

考点：必要条件、充分条件与充要条件的判断。

2、A

【解析】

计算 $M = \{2, \sqrt{3}, 0\}$ ，再计算真子集个数得到答案.

【详解】

$M = \{y \mid y = \sqrt{4-x^2}, x \in \mathbf{Z}\} = \{2, \sqrt{3}, 0\}$ ，故真子集个数为： $2^3 - 1 = 7$.

故选：A.

【点睛】

本题考查了集合的真子集个数，意在考查学生的计算能力.

3、D

【解析】

先根据向量坐标运算求出 $\vec{u} + \vec{v} = (3, \sqrt{3})$ 和 $\cos \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle$ ，进而求出 $\sin \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle$ ，代入题中给的定义即可求解.

【详解】

由题意 $\vec{v} = \vec{u} - (\vec{u} - \vec{v}) = (1, \sqrt{3})$ ，则 $\vec{u} + \vec{v} = (3, \sqrt{3})$ ， $\cos \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，得 $\sin \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = \frac{1}{2}$ ，由定义知

$$|\vec{u} \times (\vec{u} + \vec{v})| = |\vec{u}| \cdot |\vec{u} + \vec{v}| \sin \langle \vec{u}, \vec{u} + \vec{v} \rangle = 2 \times 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 2\sqrt{3},$$

故选:D.

【点睛】

此题考查向量的坐标运算，引入新定义，属于简单题目.

4、C

【解析】

根据线面的位置关系，结合线面平行的判定定理、平行线的性质进行判断即可.

【详解】

A：当 $a \subset \alpha$ 时，也可以满足 $a \parallel b$ ， $b \parallel \alpha$ ，故本命题不正确；

B：当 $a \subset \alpha$ 时，也可以满足 $a \perp b$ ， $b \perp \alpha$ ，故本命题不正确；

C：根据平行线的性质可知：当 $a \parallel b$ ， $b \perp \alpha$ ，时，能得到 $a \perp \alpha$ ，故本命题是正确的；

D：当 $a \subset \alpha$ 时，也可以满足 $a \perp b$ ， $b \parallel \alpha$ ，故本命题不正确.

故选：C

【点睛】

本题考查了线面的位置关系，考查了平行线的性质，考查了推理论证能力.

5、B

【解析】

初始： $k=1$ ， $T=2$ ， 第一次循环： $T=2 \times \frac{2}{1} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{3} < 2.8$ ， $k=2$ ， 继续循环；

第二次循环： $T=\frac{8}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{128}{45} > 2.8$ ， $k=3$ ， 此时 $T > 2.8$ ， 满足条件， 结束循环，

所以判断框内填入的条件可以是 $k \geq 3?$ ， 所以正整数 m 的最小值是 3， 故选 B.

6、 D

【解析】

根据新增确诊曲线的走势可判断 A 选项的正误；根据新增确诊曲线与新增治愈曲线的位置关系可判断 B 选项的正误；根据 2 月 10 日至 2 月 14 日新增确诊曲线的走势可判断 C 选项的正误；根据新增确诊人数的变化可判断 D 选项的正误. 综合可得出结论.

【详解】

对于 A 选项， 由图象可知， 2 月下旬新增确诊人数呈波动下降趋势， A 选项正确；

对于 B 选项， 由图象可知， 随着全国医疗救治力度逐渐加大， 2 月下旬单日治愈人数超过确诊人数， B 选项正确；

对于 C 选项， 由图象可知， 2 月 10 日至 2 月 14 日新增确诊人数波动最大， C 选项正确；

对于 D 选项， 在 2 月 16 日及以前， 我国新型冠状病毒肺炎新增确诊人数大于新增治愈人数， 我国新型冠状病毒肺炎累计确诊人数不在 2 月 12 日左右达到峰值， D 选项错误.

故选： D.

【点睛】

本题考查统计图表的应用， 考查数据处理能力， 属于基础题.

7、 C

【解析】

由题意知： $BC=2$ ， $B'C=5$ ， 设 $AC=x$ ， 则 $AB=AB'=x+2$ ， 在 $\text{Rt}\triangle ACB'$ 中， 列勾股方程可解得 x ， 然后由

$P = \frac{x}{x+2}$ 得出答案.

【详解】

解： 由题意知： $BC=2$ ， $B'C=5$ ， 设 $AC=x$ ， 则 $AB=AB'=x+2$

在 $\text{Rt}\triangle ACB'$ 中， 列勾股方程得： $5^2 + x^2 = (x+2)^2$ ， 解得 $x = \frac{21}{4}$

所以从该葭上随机取一点， 则该点取自水下的概率为 $P = \frac{x}{x+2} = \frac{\frac{21}{4}}{\frac{21}{4}+2} = \frac{21}{29}$

故选 C.

【点睛】

本题考查了几何概型中的长度型，属于基础题.

8、D

【解析】

确定点 O 为 $\triangle ABC$ 外心，代入化简得到 $\lambda = \frac{5}{6}$ ， $\mu = \frac{4}{3}$ ，再根据 $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ 计算得到答案.

【详解】

由 $|\vec{OA}| = |\vec{OB}| = |\vec{OC}|$ 可知，点 O 为 $\triangle ABC$ 外心，

则 $\vec{AB} \cdot \vec{AO} = \frac{1}{2} \vec{AB}^2 = 2$ ， $\vec{AC} \cdot \vec{AO} = \frac{1}{2} \vec{AC}^2 = \frac{1}{2}$ ，又 $\vec{AO} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$ ，

$$\text{所以} \begin{cases} \vec{AO} \cdot \vec{AB} = \lambda \vec{AB}^2 + \mu \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 4\lambda + \mu \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 2, \\ \vec{AO} \cdot \vec{AC} = \lambda \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \mu \vec{AC}^2 = \lambda \vec{AB} \cdot \vec{AC} + \mu = \frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{①}$$

因为 $4\lambda - \mu = 2$ ，②

联立方程①②可得 $\lambda = \frac{5}{6}$ ， $\mu = \frac{4}{3}$ ， $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -1$ ，因为 $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$ ，

所以 $\vec{BC}^2 = \vec{AC}^2 + \vec{AB}^2 - 2\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 7$ ，即 $|\vec{BC}| = \sqrt{7}$ 。

故选：D

【点睛】

本题考查了向量模长的计算，意在考查学生的计算能力.

9、C

【解析】

首先绘制出可行域，再绘制出目标函数，根据可行域范围求出目标函数中 z 的取值范围.

【详解】

$$\text{由题知 } x, y \text{ 满足 } \begin{cases} 2x + y \geq 4 \\ x - y \geq -1 \\ x - 2y \leq 2 \end{cases}, \text{ 可行域如下图所示,}$$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/246011103035010122>