

第 02 讲 消元—解二元一次方程组

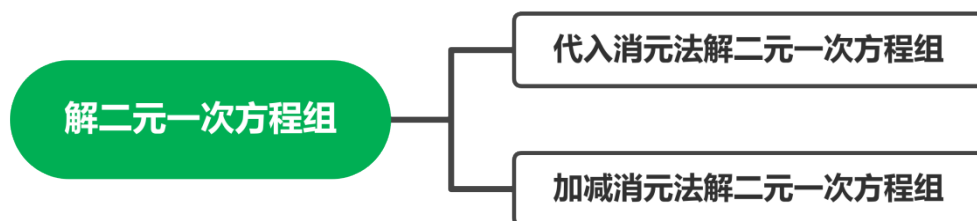
01

学习目标

课程标准	学习目标
①代入消元法解二元一次方程组 ②加减消元法解二元一次方程组	1. 掌握消元思想以及利用消元解一元二次方程组的两种方法,能够根据方程组的特点选择合适的方法解二元一次方程组。

02

思维导图



03

知识清单

知识点 01 代入消元法解二元一次方程组

1. 消元思想:

将多元方程中的未知数逐个消除转换为一元一次方程,先求出一个未知数在求其他未知数这样由多化少的转换思想叫做消元思想。

2. 代入消元法:

将二元一次方程组中其中一个方程的未知数用另一个未知数表示出来,在代入另一个方程中实现消元,进而求得这个二元一次方程的解的方法。简称代入法。

3. 代入消元法的具体步骤:

(1) 变形: 即把其中一个方程中一个未知数用 另一个未知数 表示出来。

(2) 代入: 将变形得到的式子代入 另一个方程。得到消元后的一元一次方程。

(3) 求解: 解消元后的一元一次方程。

(4) 回代: 把求得的一元一次方程的解代回变形后的式子求出另一个未知数的值。

(5) 写解: 把两个未知数的解用 $\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$ 联立起来。一定要写成 $\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$ 的形式。

注意：代入消元法多使用于方程组中未知数系数为 ± 1 时的方程，有直接代入，变形代入与整体代入。

【即学即练 1】

1. 利用代入消元法解方程组：

$$(1) \begin{cases} x+3y=7 \\ x=y-9 \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} 5x-2y=17 \\ 3x+4y=5 \end{cases}.$$

【分析】(1) 利用代入消元法解方程组；

【解答】解：(1) $\begin{cases} x+3y=7 \text{ ①} \\ x=y-9 \text{ ②} \end{cases},$

把②代入①得 $y-9+3y=7$,

解得 $y=4$,

把 $y=4$ 代入②得 $x=4-9=-5$,

所以方程组的解为 $\begin{cases} x=-5 \\ y=4 \end{cases};$

$$(2) \begin{cases} 5x-2y=17 \text{ ①} \\ 3x+4y=5 \text{ ②} \end{cases},$$

由①得 $y = \frac{5x-17}{2}$ ③,

把③代入②中得 $3x+4 \times \frac{5x-17}{2} = 5$

解得 $x=3$,

把 $x=3$ 代入③得 $y = \frac{5 \times 3 - 17}{2},$

解得 $y=-1$,

所以方程组的解为 $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}.$

知识点 02 加减消元法解二元一次方程组

1. 加减消元法：

在二元一次方程组的两个方程中，若同一个未知数的系数相等或互为相反数时，把这两个方程分别相减或相加就能消除这个未知数，得到一个一元一次方程。这种方法叫做加减消元法。

2. 加减消元法的具体步骤：

(1) 变形：把方程组中系数的最小公倍数较小的未知数的系数化成相等或互为相反数。

(2) 加减：当方程组中同一个未知数的系数化相等时，则把两个方程相减，当方程组中同一个未知数的系数化为相反数时，则把两个方程相加。消元得到一元一次方程。

(3) 求解：解一元一次方程得到其中一个未知数的值。

(4) 回代：将求出的未知数的值带入其中任意一个方程求另一个未知数的值。

(5) 写解：把两个未知数的解用 $\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$ 联立起来。一定要写成 $\begin{cases} x = \dots \\ y = \dots \end{cases}$ 的形式。

【即学即练 1】

2. 用加减消元法解下列方程组.

$$(1) \begin{cases} 2x - y = 7 & \text{①} \\ 2x + 4y = 2 & \text{②} \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} 3x - 4y = 16 & \text{①} \\ 5x + 6y = 33 & \text{②} \end{cases}.$$

【分析】两方程组利用加减消元法求出解即可.

【解答】解：(1) ② - ①得： $5y = -3$,

解得： $y = -\frac{3}{5}$,

将 $y = -\frac{3}{5}$ 代入①得： $2x + \frac{3}{5} = 7$, 即 $x = \frac{11}{5}$,

则方程组的解为 $\begin{cases} x = \frac{11}{5} \\ y = -\frac{3}{5} \end{cases}$;

(2) ① $\times 3$ + ② $\times 2$ 得： $19x = 114$, 即 $x = 6$,

将 $x = 6$ 代入①得： $18 - 4y = 16$, 即 $y = \frac{1}{2}$,

则方程组的解为 $\begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$.

04

题型精讲

题型 01 解二元一次方程组

【典例 1】解下列方程组：

$$(1) \begin{cases} y = 4x - 13 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} 2x + 3y = -4 \\ 2x - 3y = 8 \end{cases}.$$

【分析】(1) 利用代入消元法解方程组即可；

(2) 利用加减消元法解方程组即可.

【解答】解：(1) $\begin{cases} y = 4x - 13 & \text{①} \\ 3x + 2y = 7 & \text{②} \end{cases}$,

①代入②，得

$$3x+2(4x-13)=7,$$

解得 $x=3$,

把 $x=3$ 代入①，得 $y=-1$,

所以原方程组的解为: $\begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases}$;

$$(2) \begin{cases} 2x+3y=-4 \textcircled{1} \\ 2x-3y=8 \textcircled{2} \end{cases},$$

①+②，得 $4x=4$,

解得 $x=1$,

把 $x=1$ 代入①，得 $y=-2$,

所以原方程组的解为: $\begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$.

【变式 1】 用合适的方法解方程组:

$$(1) \begin{cases} y=x+3 \\ 7x+5y=9 \end{cases};$$

$$(2) \begin{cases} 3x+4y=16 \\ 5x-6y=33 \end{cases}.$$

【分析】 (1) 方程组利用代入消元法求出解即可;

(2) 方程组利用加减消元法求出解即可.

【解答】 解: (1) $\begin{cases} y=x+3 \textcircled{1} \\ 7x+5y=9 \textcircled{2} \end{cases}$,

把①代入②得: $7x+5x+15=9$,

解得: $x=-\frac{1}{2}$,

把 $x=-\frac{1}{2}$ 代入①得: $y=\frac{5}{2}$,

则方程组的解为 $\begin{cases} x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$;

$$(2) \begin{cases} 3x+4y=16 \textcircled{1} \\ 5x-6y=33 \textcircled{2} \end{cases},$$

① $\times 3$ +② $\times 2$ 得: $19x=114$, 即 $x=6$,

把 $x=6$ 代入①得: $y=-\frac{1}{2}$,

则方程组的解为 $\begin{cases} x=6 \\ y=-\frac{1}{2} \end{cases}$.

【变式 2】 解下列方程组:

$$(1) \begin{cases} x+2y=3 \\ 5x-4y=1 \end{cases}; \quad (2) \begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 3 \\ 3x-2(y-1)=20 \end{cases}.$$

【分析】(1) 方程组利用加减消元法求出解即可；

(2) 方程组整理后，利用加减消元法求出解即可.

【解答】解：(1) $\begin{cases} x+2y=3 \textcircled{1} \\ 5x-4y=1 \textcircled{2} \end{cases},$

$\textcircled{1} \times 2$ 得： $2x+4y=6 \textcircled{3}$,

$\textcircled{2} + \textcircled{3}$ 得， $7x=7$,

解得： $x=1$,

把 $x=1$ 代入 $\textcircled{1}$ 得： $y=1$,

则方程组的解为 $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases};$

(2) 方程组整理得： $\begin{cases} 3x+4y=36 \textcircled{1} \\ 3x-2y=18 \textcircled{2} \end{cases},$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ 得： $6y=18$,

解得： $y=3$,

把 $y=3$ 代入 $\textcircled{1}$ 得： $3x+12=36$,

解得： $x=8$,

则方程组的解为 $\begin{cases} x=8 \\ y=3 \end{cases}.$

【变式 3】解方程组

$$(1) \begin{cases} x+y=4 \\ 2x-y=5 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y+1}{3} = 1 \\ 3x+2y=10 \end{cases}.$$

【分析】(1) 方程组中两方程相加消去 y 求出 x 的值，进而求出 y 的值，即可确定出方程组的解；

(2) 将两个方程先化简，再选择正确的方法进行消元，本题适合用加减法求解.

【解答】解：(1) $\begin{cases} x+y=4 \textcircled{1} \\ 2x-y=5 \textcircled{2} \end{cases},$

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ 得： $3x=9$,

解得： $x=3$,

将 $x=3$ 代入 $\textcircled{1}$ 得： $3+y=4$,

解得： $y=1$,

则原方程组的解为 $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases};$

(2) 化简可得 $\begin{cases} 3x-2y=8 & \textcircled{1} \\ 3x+2y=10 & \textcircled{2} \end{cases}$,

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$, 得 $6x=18$,

解得 $x=3$,

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$, 得 $-4y=-2$,

解得 $y=\frac{1}{2}$.

$\therefore$ 原方程组的解为 $\begin{cases} x=3 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$.

【变式 4】解方程组:

$\textcircled{1} \begin{cases} 3x-2y=6 \\ 2x+3y=17 \end{cases}$;

$\textcircled{2} \begin{cases} x+4y=14 \\ \frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = \frac{1}{12} \end{cases}$.

【分析】本题可以运用消元法, 先消去一个未知量, 变成一元一次方程, 求出解, 再将解代入原方程, 解出另一个, 即可得到方程组的解.

【解答】解: (1) $\begin{cases} 3x-2y=6 & \textcircled{1} \\ 2x+3y=17 & \textcircled{2} \end{cases}$

$\textcircled{1} \times 2$, 得: $6x-4y=12$ $\textcircled{3}$,

$\textcircled{2} \times 3$, 得: $6x+9y=51$ $\textcircled{4}$,

则 $\textcircled{4} - \textcircled{3}$ 得: $13y=39$,

解得: $y=3$,

将 $y=3$ 代入 $\textcircled{1}$, 得: $3x-2 \times 3=6$,

解得: $x=4$.

故原方程组的解为: $\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}$.

(2) $\begin{cases} x+4y=14 & \textcircled{1} \\ \frac{x-3}{4} - \frac{y-3}{3} = \frac{1}{12} & \textcircled{2} \end{cases}$

方程 $\textcircled{2}$ 两边同时乘以 12 得: $3(x-3) - 4(y-3) = 1$,

化简, 得: $3x-4y=-2$ $\textcircled{3}$,

$\textcircled{1} + \textcircled{3}$, 得: $4x=12$,

解得: $x=3$.

将 $x=3$ 代入 $\textcircled{1}$, 得: $3+4y=14$,

解得: $y=\frac{11}{4}$.

故原方程组的解为：
$$\begin{cases} x=3 \\ y=\frac{11}{4} \end{cases}.$$

【变式5】解下列方程：

$$(1) \begin{cases} 3x-y=5 \\ 2x+5y=26 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{3(x-y)}{2} + \frac{y}{4} = 1 \\ 2(x+2y) = 5(x+y) + 5 \end{cases}.$$

【分析】(1) 方程组利用加减消元法求出解即可；

(2) 方程组整理后，利用加减消元法求出解即可.

【解答】解：(1)
$$\begin{cases} 3x-y=5 \textcircled{1} \\ 2x+5y=26 \textcircled{2} \end{cases},$$

$\textcircled{1} \times 5 + \textcircled{2}$ 得： $17x = 51$,

解得： $x = 3$,

把 $x = 3$ 代入 $\textcircled{1}$ 得： $y = 4$,

则方程组的解为
$$\begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases};$$

(2) 方程组整理得：
$$\begin{cases} 6x-5y=4 \textcircled{1} \\ 3x+y=-5 \textcircled{2} \end{cases},$$

$\textcircled{1} + \textcircled{2} \times 5$ 得： $21x = -21$,

解得： $x = -1$,

把 $x = -1$ 代入 $\textcircled{2}$ 得： $y = -2$,

则方程组的解为
$$\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}.$$

题型 02 利用二元一次方程组的解与解二元一次方程组求值

【典例1】如果方程组
$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x-y=9 \end{cases}$$
 的解是方程 $7x+my=16$ 的一个解，则 m 的值为 ()

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

【分析】两个方程具有相同的解，可运用加减消元法得出二元一次方程组的解，然后将得出的 x 、 y 的值代入 $7x+my=16$ 中，即可得出 m 的值.

【解答】解：解方程组
$$\begin{cases} 2x+3y=7 \\ 5x-y=9 \end{cases}$$
，得
$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases},$$

将
$$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$
 代入 $7x+my=16$ ，得 $14+m=16$,

解得 $m=2$,

故选：C.

【变式1】已知 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} mx+ky=13 \\ (m+k)x-my=9 \end{cases}$ 的解，求 k 和 m 的值.

【分析】首先根据 $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} mx+ky=13 \\ (m+k)x-my=9 \end{cases}$ 的解，得 $\begin{cases} 3m+2k=13 \\ 3(m+k)-2m=9 \end{cases}$ ，再解这个关于 m, k 的二元一次方程即可求出 k 和 m 的值.

【解答】解： $\because \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ 是方程组 $\begin{cases} mx+ky=13 \\ (m+k)x-my=9 \end{cases}$ 的解，

$$\therefore \begin{cases} 3m+2k=13 \\ 3(m+k)-2m=9 \end{cases},$$

由 $3(m+k)-2m=9$ ，得： $m=9-3k$ ，

将 $m=9-3k$ 代入 $3m+2k=13$ ，得： $3(9-3k)+2k=13$ ，

解得： $k=2$ ，

将 $k=2$ 代入 $m=9-3k$ ，得： $m=3$ ，

$\therefore k=2; m=3$.

【变式2】若方程组 $\begin{cases} ax-by=8 \\ ax+by=4 \end{cases}$ 的解为 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ ，则 $a+b$ 的值为（ ）

A. 1

B. -1

C. 3

D. -3

【分析】把 x, y 的值代入原方程组可转化成关于 a, b 的二元一次方程组，解方程组即可求出 a, b 的值，结论可得.

【解答】解：把 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 代入方程组 $\begin{cases} ax-by=8 \\ ax+by=4 \end{cases}$ 得，

$$\begin{cases} 2a-b=8 \\ 2a+b=4 \end{cases}.$$

解这个方程组得： $\begin{cases} a=3 \\ b=-2 \end{cases}$.

$\therefore a+b=3-2=1$.

故选：A.

【变式3】已知 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 是二元一次方程组 $\begin{cases} mx+ny=8 \\ nx-my=1 \end{cases}$ 的解，则 $2m-n$ 的平方根为（ ）

A. 2

B. 4

C. $\pm\sqrt{2}$

D. ± 2

【分析】由 $x=2, y=1$ 是二元一次方程组的解，将 $x=2, y=1$ 代入方程组求出 m 与 n 的值，进而求出 $2m-n$ 的值，利用平方根的定义即可求出 $2m-n$ 的平方根.

【解答】解：将 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 代入方程组 $\begin{cases} mx+ny=8 \\ nx-my=1 \end{cases}$ 中，得： $\begin{cases} 2m+n=8 \\ 2n-m=1 \end{cases}$ ，

解得： $\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases}$ ，

$$\therefore 2m - n = 6 - 2 = 4,$$

则 $2m - n$ 的平方根为 ± 2 .

故选: D.

题型 03 二元一次方程组的解满足的特殊关系

【典例 1】已知方程组 $\begin{cases} 2x+y=1 \\ kx+(k-1)y=6 \end{cases}$ 的解满足 $x+y=5$, 求 k 的值为 ()

A. -2

B. 2

C. 3

D. 4

【分析】先将已知方程组中不含字母 k 的方程与 $x+y=5$, 组成方程组求出 x 、 y 的值, 再把 x 、 y 的值代入含 k 的方程求即可.

【解答】解: 由题意得:

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x+y=5 \end{cases}, \text{解得: } \begin{cases} x=-4 \\ y=9 \end{cases},$$

把 $\begin{cases} x=-4 \\ y=9 \end{cases}$ 代入 $kx+(k-1)y=6$ 得:

$$-4k+(k-1) \times 9=6$$

解之得: $k=3$,

故选: C.

【变式 1】方程组 $\begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=3 \end{cases}$ 的解满足 $2x-ky=10$, 则 k 的值为 ()

A. 4

B. -4

C. 6

D. -6

【分析】首先应用代入消元法, 求出方程组 $\begin{cases} x+y=-1 \text{ ①} \\ x-y=3 \text{ ②} \end{cases}$ 的解是多少; 然后应用代入法, 求出 k 的值为

$$\text{【解答】解: } \begin{cases} x+y=-1 \text{ ①} \\ x-y=3 \text{ ②} \end{cases},$$

①+②, 可得: $2x=2$,

解得 $x=1$,

把 $x=1$ 代入①, 可得: $1+y=-1$,

解得 $y=-2$,

$$\therefore \text{原方程组的解是 } \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases},$$

$$\therefore 2 \times 1 - (-2k) = 10,$$

$$\therefore 2k+2=10,$$

解得 $k=4$.

故选: A.

【变式2】若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 3x-2y=2k-3 \\ 2x+7y=3k-2 \end{cases}$ 的解满足 $x+y=2023$, 则 k 等于 ()

A. 2021

B. 2022

C. 2023

D. 2024

【分析】让方程组中的两个方程直接相加得到 $5x+5y=5k-5$, 化简得 $x+y=k-1$, 结合已知即可求出 k 的值.

【解答】解: $\begin{cases} 3x-2y=2k-3 \text{ ①} \\ 2x+7y=3k-2 \text{ ②} \end{cases}$,

①+②得, $5x+5y=5k-5$,

即 $x+y=k-1$,

因为 $x+y=2023$,

所以 $k-1=2023$,

所以 $k=2024$,

故选: D.

【变式3】已知方程组 $\begin{cases} 3x+5y=k+2 \\ 2x+3y=k \end{cases}$, x 与 y 的值之和等于 2, 则 k 的值为 4.

【分析】首先解关于 x 的不等式组, 求得 x, y 的值, 然后根据 x 与 y 的和是 2, 即可得到一个关于 k 的方程, 从而求解.

【解答】解: 解方程组 $\begin{cases} 3x+5y=k+2 \\ 2x+3y=k \end{cases}$, 得: $\begin{cases} x=2k-6 \\ y=4-k \end{cases}$,

则 $(2k-6) + (4-k) = 2$,

解得: $k=4$.

故答案为: 4.

【变式4】若关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 3x+4y=m-9 \\ 4x+3y=m+5 \end{cases}$ 的解中 x 与 y 互为相反数, 则 $m=$ 2.

【分析】先根据已知条件和互为相反数的和为 0, 求出 $x+y=0$, 然后把已知方程组中的两个方程相加, 得到关于 m 的方程, 解方程即可.

【解答】解: $\because$ 关于 x, y 的方程组 $\begin{cases} 3x+4y=m-9 \\ 4x+3y=m+5 \end{cases}$ 的解中 x 与 y 互为相反数,

$\therefore x+y=0$,

$\begin{cases} 3x+4y=m-9 \text{ ①} \\ 4x+3y=m+5 \text{ ②} \end{cases}$,

①+②得: $7x+7y=2m-4$,

$7(x+y)=2m-4$,

$\therefore 2m-4=0$,

$2m=4$,

$\therefore m=2,$

故答案为: 2.

题型 05 同解方程

【典例 1】已知关于 x 、 y 的方程组 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ ax+3y=-1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x-y=1 \\ 4x+by=11 \end{cases}$ 有相同的解, 则 a 和 b 的值为 ()

- A. $\begin{cases} a=2 \\ b=-3 \end{cases}$ B. $\begin{cases} a=4 \\ b=-6 \end{cases}$ C. $\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$ D. $\begin{cases} a=-4 \\ b=6 \end{cases}$

【分析】利用方程组的解的定义, x 、 y 满足 4 个方程, 则先解 $2x+y=5$ 和 $x-y=1$ 组成的方程组, 再把 x 、 y 代入另外两个方程得到关于 a 、 b 的方程组, 然后解方程组求出 a 、 b 的值.

【解答】解: 解方程组 $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-y=1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$,

把 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 代入 $\begin{cases} ax+3y=-1 \\ 4x+by=11 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} 2a+3=-1 \\ 8+b=11 \end{cases}$,

解得 $\begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases}$.

故选: C.

【变式 1】若方程组 $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+3y=5 \end{cases}$ 与方程 $3ax-2ay=12$ 具有相同的解, 则 a 的值为 ()

- A. 3 B. -3 C. 2 D. -2

【分析】先解方程组再代入后面方程即可.

【解答】解: 解 $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+3y=5 \end{cases}$,

得 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$,

因为方程组 $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+3y=5 \end{cases}$ 与方程 $3ax-2ay=12$ 具有相同的解,

将 $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ 代入 $3ax-2ay=12$,

所以 $6a-2a=12$,

解得 $a=3$,

故选: A.

【变式 2】若关于 x 、 y 的二元一次方程组 $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解也是关于 x 、 y 的二元一次方程 $4x+ky=13$ 的解, 则

k 的值是 ()

- A. -2 B. -1 C. 2 D. 1

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/246025130050011031>