

江西省南昌三中 2024 年高三第三次调研考试（数学试题）试卷

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号、考场号和座位号填写在试题卷和答题卡上。用 2B 铅笔将试卷类型（B）填涂在答题卡相应位置上。将条形码粘贴在答题卡右上角“条形码粘贴处”。
2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试题卷上。
3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。
4. 考生必须保证答题卡的整洁。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

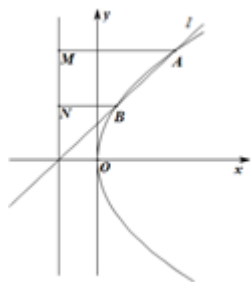
1. 设 $a, b \in R, i$ 是虚数单位，则“复数 $z = a + bi$ 为纯虚数”是“ $ab = 0$ ”的（ ）

- A. 充要条件
B. 必要不充分条件
C. 既不充分也不必要条件
D. 充分不必要条件

2. 已知椭圆 C 的中心为原点 O ， $F(-2\sqrt{5}, 0)$ 为 C 的左焦点， P 为 C 上一点，满足 $|OP| = |OF|$ 且 $|PF| = 4$ ，则椭圆 C 的方程为（ ）

- A. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{5} = 1$ B. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$ C. $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{10} = 1$ D. $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{25} = 1$

3. 如图，已知直线 $l: y = k(x+1) (k > 0)$ 与抛物线 $C: y^2 = 4x$ 相交于 A, B 两点，且 A, B 两点在抛物线准线上的投影分别是 M, N ，若 $|AM| = 2|BN|$ ，则 k 的值是（ ）



- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ D. $2\sqrt{2}$

4. 在 $\triangle ABC$ 中，“ $\tan B \tan C > 1$ ”是“ $\triangle ABC$ 为钝角三角形”的（ ）

- A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

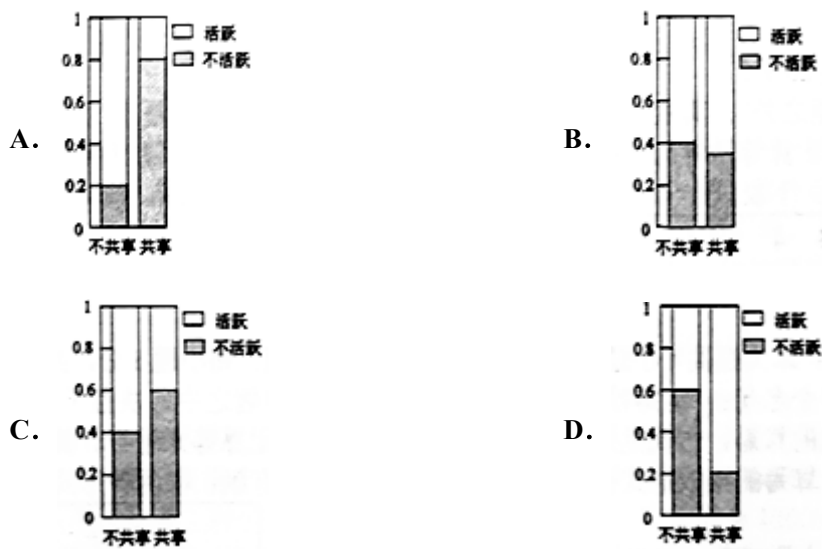
5. 设不等式组 $\begin{cases} x + y \geq 0 \\ x - \sqrt{3}y \leq 0 \end{cases}$ 表示的平面区域为 Ω ，若从圆 $C: x^2 + y^2 = 4$ 的内部随机选取一点 P ，则 P 取自 Ω 的概率为（ ）

- A. $\frac{5}{24}$ B. $\frac{7}{24}$ C. $\frac{11}{24}$ D. $\frac{17}{24}$

6. 设函数 $f'(x)$ 是奇函数 $f(x)(x \in R)$ 的导函数, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) \ln x < -\frac{1}{x} f(x)$, 则使得 $(x^2 - 1)f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 ()

- A. $(-1, 0) \cup (0, 1)$ B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
C. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ D. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

7. 党的十九大报告明确提出: 在共享经济等领域培育增长点、形成新动能. 共享经济是公众将闲置资源通过社会化平台与他人共享, 进而获得收入的经济现象. 为考察共享经济对企业经济活跃度的影响, 在四个不同的企业各取两个部门进行共享经济对比试验, 根据四个企业得到的试验数据画出如下四个等高条形图, 最能体现共享经济对该部门的发展有显著效果的图形是 ()



8. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2)$, $\vec{b} = (4\lambda, -1)$, 且 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 则 $\lambda =$ ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{4}$ C. 1 D. 2

9. 已知函数 $f(x) = x^3 - ax - 1$, 以下结论正确的个数为 ()

- ①当 $a = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的图象的对称中心为 $(0, -1)$;
②当 $a \geq 3$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为单调递减函数;
③若函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上不单调, 则 $0 < a < 3$;
④当 $a = 12$ 时, $f(x)$ 在 $[-4, 5]$ 上的最大值为 1.

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

10. 已知随机变量 ξ_i 满足 $P(\xi_i = k) = C_2^k (1 - p_i)^{2-k} p_i^k$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2$. 若 $\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$, 则 ()

- A. $E(\xi_1) < E(\xi_2)$, $D(\xi_1) < D(\xi_2)$ B. $E(\xi_1) < E(\xi_2)$, $D(\xi_1) > D(\xi_2)$
C. $E(\xi_1) > E(\xi_2)$, $D(\xi_1) < D(\xi_2)$ D. $E(\xi_1) > E(\xi_2)$, $D(\xi_1) > D(\xi_2)$

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2 + \log_{\frac{1}{2}} x, & \frac{1}{8} \leq x < 1 \\ 2^x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$, 若 $f(a) = f(b)$ ($a < b$), 则 ab 的最小值为 ()

参考数据: $\ln 2 \approx 0.69$, $\ln^2 2 \approx 0.48$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ C. $\log_2 \sqrt{3}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$, 则函数 $f(x)$ 的图象的对称轴方程为 ()

- A. $x = k\pi - \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ B. $x = k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$
C. $x = \frac{1}{2}k\pi, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = \frac{1}{2}k\pi + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 设 $P(x, y)$ 为椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 在第一象限上的点, 则 $\frac{x}{4-x} + \frac{3y}{6-y}$ 的最小值为_____.

14. 在直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = -8 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \frac{t}{2} \end{cases}$ (t 为参数), 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3s^2 \\ y = 2\sqrt{3}s \end{cases}$ (s 为

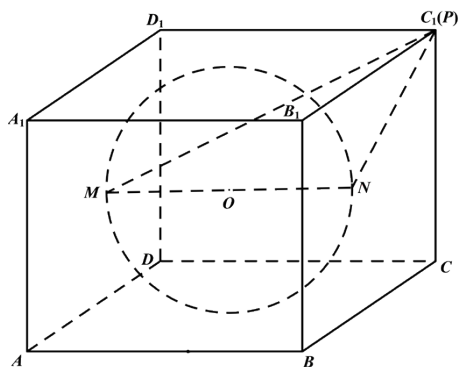
参数).

(1) 求直线 l 和曲线 C 的普通方程;

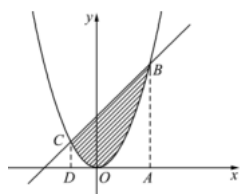
(2) 设 P 为曲线 C 上的动点, 求点 P 到直线 l 距离的最小值及此时 P 点的坐标.

15. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, MN 是它的内切球的一条弦(我们把球面上任意两点之间的线段称为球的弦),

P 为正方体表面上的动点, 当弦 MN 的长度最大时, $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$ 的取值范围是_____.



16. 如图梯形 $ABCD$ 为直角梯形, $AB \perp AD, CD \perp AD$, 图中阴影部分为曲线 $y = x^2$ 与直线 $x = x + 2$ 围成的平面图形, 向直角梯形 $ABCD$ 内投入一质点, 质点落入阴影部分的概率是_____



三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (12 分) 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $a \sin(A+B) = c \sin \frac{B+C}{2}$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\sqrt{3}$, $b+c=5$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

18. (12 分) 过点 $P(-4,0)$ 的动直线 l 与抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 相交于 D, E 两点, 已知当 l 的斜率为 $\frac{1}{2}$ 时,

$$\overrightarrow{PE} = 4\overrightarrow{PD}.$$

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 设 DE 的中垂线在 y 轴上的截距为 b , 求 b 的取值范围.

19. (12 分) 已知等比数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 且 $a_1 + a_5 = \frac{17}{2}$, $a_2 a_4 = 4$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $b_n = na_n (n \in \mathbb{N}^*)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

20. (12 分) 某调查机构为了了解某产品年产量 x (吨)对价格 y (千克/吨)和利润 z 的影响, 对近五年该产品的年产量和价格统计如下表:

x	1	2	3	4	5
y	17.0	16.5	15.5	13.8	12.2

(1) 求 y 关于 x 的线性回归方程 $y = \hat{b}x + \hat{a}$;

(2) 若每吨该产品的成本为 12 千元, 假设该产品可全部卖出, 预测当年产量为多少时, 年利润 w 取到最大值?

参考公式:
$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$$

21. (12 分) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = a_{n+2} - 2, n \in N^*$.

(1) 若数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 求数列 $\{a_n\}$ 的公比 q 的值;

(2) 设正项数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 若 $b_1 = 1$, 且 $2T_n = b_{n+1}^2 - n - 1$.

①求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式;

②求证: $\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{2^{b_i}} < \frac{a_1 + a_2 + a_3}{2}$.

22. (10 分) 设函数 $f(x) = |x+3|$, $g(x) = |2x-1|$.

(1) 解不等式 $f(x) < g(x)$;

(2) 若 $2f(x) + g(x) > ax + 4$ 对任意的实数 x 恒成立, 求 a 的取值范围.

参考答案

一、选择题: 本题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1、D

【解析】

结合纯虚数的概念, 可得 $a = 0, b \neq 0$, 再结合充分条件和必要条件的定义即可判定选项.

【详解】

若复数 $z = a + bi$ 为纯虚数, 则 $a = 0, b \neq 0$, 所以 $ab = 0$, 若 $ab = 0$, 不妨设 $a = 1, b = 0$, 此时复数 $z = a + bi = 1$,

不是纯虚数, 所以“复数 $z = a + bi$ 为纯虚数”是“ $ab = 0$ ”的充分不必要条件.

故选: D

【点睛】

本题考查充分条件和必要条件，考查了纯虚数的概念，理解充分必要条件的逻辑关系是解题的关键，属于基础题.

2、B

【解析】

由题意可得 $c=2\sqrt{5}$ ，设右焦点为 F' ，由 $|OP|=|OF|=|OF'|$ 知，

$$\angle PFF' = \angle FPO, \angle OF'P = \angle OPF',$$

$$\text{所以 } \angle PFF' + \angle OF'P = \angle FPO + \angle OPF',$$

$$\text{由 } \angle PFF' + \angle OF'P + \angle FPO + \angle OPF' = 180^\circ \text{ 知,}$$

$$\angle FPO + \angle OPF' = 90^\circ, \text{ 即 } PF \perp PF'.$$

$$\text{在 Rt}\triangle PFF' \text{ 中, 由勾股定理, 得 } |PF'| = \sqrt{FF'^2 - PF^2} = \sqrt{(4\sqrt{5})^2 - 4^2} = 8,$$

$$\text{由椭圆定义, 得 } |PF| + |PF'| = 2a = 4 + 8 = 12, \text{ 从而 } a = 6, \text{ 得 } a^2 = 36,$$

$$\text{于是 } b^2 = a^2 - c^2 = 36 - (2\sqrt{5})^2 = 16,$$

$$\text{所以椭圆的方程为 } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

故选 B.

点睛：椭圆的定义：到两定点距离之和为常数的点的轨迹，当和大于两定点间的距离时，轨迹是椭圆，当和等于两定点间的距离时，轨迹是线段（两定点间的连线段），当和小于两定点间的距离时，轨迹不存在.

3、C

【解析】

直线 $y = k(x+1) (k > 0)$ 恒过定点 $P(-1, 0)$ ，由此推导出 $|OB| = \frac{1}{2}|AF|$ ，由此能求出点 B 的坐标，从而能求出 k 的值.

【详解】

设抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的准线为 $l: x = -1$ ，

直线 $y = k(x+1) (k > 0)$ 恒过定点 $P(-1, 0)$ ，

如图过 A 、 B 分别作 $AM \perp l$ 于 M ， $BN \perp l$ 于 N ，

$$\text{由 } |AM| = 2|BN|, \text{ 则 } |FA| = 2|FB|,$$

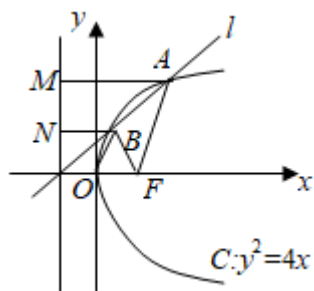
$$\text{点 } B \text{ 为 } AP \text{ 的中点、连接 } OB, \text{ 则 } |OB| = \frac{1}{2}|AF|,$$

$\therefore |OB| = |BF|$, 点 B 的横坐标为 $\frac{1}{2}$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $B\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$, 把 $B\left(\frac{1}{2}, \sqrt{2}\right)$ 代入直线 $y = k(x+1) (k > 0)$,

解得 $k = \frac{2\sqrt{2}}{3}$,

故选: C.



【点睛】

本题考查直线与圆锥曲线中参数的求法, 考查抛物线的性质, 是中档题, 解题时要注意等价转化思想的合理运用, 属于中档题.

4、C

【解析】

分析: 从两个方向去判断, 先看 $\tan A \tan B > 1$ 能推出三角形的形状是锐角三角形, 而非钝角三角形, 从而得到充分性不成立, 再看当三角形是钝角三角形时, 也推不出 $\tan A \tan B > 1$ 成立, 从而必要性也不满足, 从而选出正确的结果.

详解: 由题意可得, 在 $\triangle ABC$ 中, 因为 $\tan A \tan B > 1$,

所以 $\frac{\sin A \sin B}{\cos A \cos B} > 1$, 因为 $0 < A < \pi, 0 < B < \pi$,

所以 $\sin A \sin B > 0, \cos A \cos B > 0$,

结合三角形内角的条件, 故 A, B 同为锐角, 因为 $\sin A \sin B > \cos A \cos B$,

所以 $\cos A \cos B - \sin A \sin B < 0$, 即 $\cos(A+B) < 0$, 所以 $\frac{\pi}{2} < A+B < \pi$,

因此 $0 < C < \frac{\pi}{2}$, 所以 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 不是钝角三角形,

所以充分性不满足,

反之, 若 $\triangle ABC$ 是钝角三角形, 也推不出“ $\tan B \tan C > 1$ ”, 故必要性不成立,

所以为既不充分也不必要条件, 故选 D.

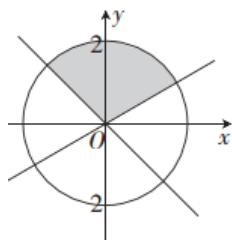
点睛: 该题考查的是有关充分必要条件的判断问题, 在解题的过程中, 需要用到不等式的等价转化, 余弦的和角公式, 诱导公式等, 需要明确对应此类问题的解题步骤, 以及三角形形状对应的特征.

5、B

【解析】

画出不等式组表示的可行域, 求得阴影部分扇形对应的圆心角, 根据几何概型概率计算公式, 计算出所求概率.

【详解】



作出 Ω 中在圆 C 内部的区域, 如图所示,

因为直线 $x + y = 0$, $x - \sqrt{3}y = 0$ 的倾斜角分别为 $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$,

所以由图可得 P 取自 Ω 的概率为 $\frac{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}}{2\pi} = \frac{7}{24}$.

故选: B

【点睛】

本小题主要考查几何概型的计算, 考查线性可行域的画法, 属于基础题.

6、D

【解析】

构造函数, 令 $g(x) = \ln x \cdot f(x) (x > 0)$, 则 $g'(x) = \ln x f'(x) + \frac{f(x)}{x}$,

由 $f'(x) \ln x < -\frac{1}{x} f(x)$ 可得 $g'(x) < 0$,

则 $g(x)$ 是区间 $(0, +\infty)$ 上的单调递减函数,

且 $g(1) = \ln 1 \times f(1) = 0$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $g(x) > 0, \therefore \ln x < 0, f(x) < 0, (x^2 - 1)f(x) > 0$;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $g(x) < 0, \therefore \ln x > 0, \therefore f(x) < 0, (x^2 - 1)f(x) < 0$

$\therefore f(x)$ 是奇函数, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $f(x) > 0, (x^2 - 1)f(x) < 0$

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, -1)$ 时, $f(x) > 0, (x^2 - 1)f(x) > 0$.

综上所述, 使得 $(x^2 - 1)f(x) > 0$ 成立的 x 的取值范围是 $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

本题选择 *D* 选项.

点睛：函数的单调性是函数的重要性质之一，它的应用贯穿于整个高中数学的教学之中．某些数学问题从表面上看似与函数的单调性无关，但如果我们能挖掘其内在联系，抓住其本质，那么运用函数的单调性解题，能起到化难为易、化繁为简的作用．因此对函数的单调性进行全面、准确的认识，并掌握好使用的技巧和方法，这是非常必要的．根据题目的特点，构造一个适当的函数，利用它的单调性进行解题，是一种常用技巧．许多问题，如果运用这种思想去解决，往往能获得简洁明快的思路，有着非凡的功效．

7、D

【解析】

根据四个列联表中的等高条形图可知，

图中D中共享与不共享的企业经济活跃度的差异最大，

它最能体现共享经济对该部门的发展有显著效果，故选D．

8、A

【解析】

根据向量垂直的坐标表示列方程，解方程求得 λ 的值．

【详解】

由于向量 $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (4\lambda, -1)$ ，且 $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，所以 $1 \times 4\lambda + 2 \times (-1) = 0$ 解得 $\lambda = \frac{1}{2}$ ．

故选：A

【点睛】

本小题主要考查向量垂直的坐标表示，属于基础题．

9、C

【解析】

逐一分析选项，①根据函数 $y = x^3$ 的对称中心判断；②利用导数判断函数的单调性；③先求函数的导数，若满足条件，则极值点必在区间 $(-1, 1)$ ；④利用导数求函数在给定区间的最值．

【详解】

① $y = x^3$ 为奇函数，其图象的对称中心为原点，根据平移知识，函数 $f(x)$ 的图象的对称中心为 $(0, -1)$ ，正确．

②由题意知 $f'(x) = 3x^2 - a$ ．因为当 $-1 < x < 1$ 时， $3x^2 < 3$ ，

又 $a \geq 3$ ，所以 $f'(x) < 0$ 在 $(-1, 1)$ 上恒成立，所以函数 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上为单调递减函数，正确．

③由题意知 $f'(x) = 3x^2 - a$ ，当 $a \leq 0$ 时， $f'(x) \geq 0$ ，此时 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为增函数，不合题意，故 $a > 0$ ．

令 $f'(x) = 0$ ，解得 $x = \pm \frac{\sqrt{3a}}{3}$ ．因为 $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 上不单调，所以 $f'(x) = 0$ 在 $(-1, 1)$ 上有解，

需 $0 < \frac{\sqrt{3a}}{3} < 1$, 解得 $0 < a < 3$, 正确.

④令 $f'(x) = 3x^2 - 12 = 0$, 得 $x = \pm 2$. 根据函数的单调性, $f(x)$ 在 $[-4, 5]$ 上的最大值只可能为 $f(-2)$ 或 $f(5)$.

因为 $f(-2) = 15$, $f(5) = 64$, 所以最大值为 64, 结论错误.

故选: C

【点睛】

本题考查利用导数研究函数的单调性, 极值, 最值, 意在考查基本的判断方法, 属于基础题型.

10、B

【解析】

根据二项分布的性质可得: $E(\xi_i) = p_i$, $D(\xi_i) = p_i(1 - p_i)$, 再根据 $\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$ 和二次函数的性质求解.

【详解】

因为随机变量 ξ_i 满足 $P(\xi_i = k) = C_2^k (1 - p_i)^{2-k} p_i^k$, $i = 1, 2$, $k = 0, 1, 2$.

所以 ξ_i 服从二项分布,

由二项分布的性质可得: $E(\xi_i) = p_i$, $D(\xi_i) = p_i(1 - p_i)$,

因为 $\frac{1}{2} < p_1 < p_2 < 1$,

所以 $E(\xi_1) < E(\xi_2)$,

由二次函数的性质可得: $f(x) = x(1 - x)$, 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递减,

所以 $D(\xi_1) > D(\xi_2)$.

故选: B

【点睛】

本题主要考查二项分布的性质及二次函数的性质的应用, 还考查了理解辨析的能力, 属于中档题.

11、A

【解析】

首先 $f(x)$ 的单调性, 由此判断出 $\begin{cases} \frac{1}{4} \leq a < 1 \\ 1 < b \leq 2 \end{cases}$, 由 $f(a) = f(b)$ 求得 a, b 的关系式. 利用导数求得 $\log_2 ab$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/246102203222011000>