

重难点突破 05 数列综合运用

一. 选择题 (共 15 小题)

1. (2023·顺义区一模) 若等差数列 $\{a_n\}$ 和等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2 = 2$, $b_5 = 16$,

则 $\{a_n\}$ 的公差为()

A. 1

B. -1

C. -2

D. 2

【解答】解：设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q , $b_2 = 2$, $b_5 = 16$,

$$\text{则} \begin{cases} b_2 = b_1 \cdot q = 2 \\ b_5 = b_1 \cdot q^4 = 16 \end{cases}, \text{解得 } q = 2,$$

$$\therefore a_1 = b_1 = 1,$$

设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , $a_2 = 2$,

$$\text{则 } a_2 = a_1 + d = 1 + d = 2, \text{解得 } d = 1,$$

故选：A.

2. (2023·温州模拟) 已知数列 $\{a_n\}$ 各项为正数, $\{b_n\}$ 满足 $a_n^2 = b_n b_{n+1}$, $a_n + a_{n+1} = 2b_{n+1}$, 则()

A. $\{b_n\}$ 是等差数列

B. $\{b_n\}$ 是等比数列

C. $\{\sqrt{b_n}\}$ 是等差数列

D. $\{\sqrt{b_n}\}$ 是等比数列

【解答】解：数列 $\{a_n\}$ 各项为正数, $\{b_n\}$ 满足 $a_n^2 = b_n b_{n+1}$, $a_n + a_{n+1} = 2b_{n+1}$,

可得 $a_n > 0$, $b_n > 0$,

$$a_n = \sqrt{b_n b_{n+1}}, \quad a_n + a_{n+1} = \sqrt{b_n b_{n+1}} + \sqrt{b_{n+1} b_{n+2}} = 2b_{n+1} = 2\sqrt{b_{n+1}^2},$$

$$\text{即有 } \sqrt{b_n} + \sqrt{b_{n+2}} = 2\sqrt{b_{n+1}},$$

可得 $\{\sqrt{b_n}\}$ 是等差数列.

故选：C.

3. (2023•全国二模) 意大利著名数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时, 发现有这样一列数: 1, 1, 2, 3, 5, L, 从第三项起, 每个数等于它前面两个数的和, 即

$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n (n \in N^*)$, 后来人们把这样的一列数组成的数列 $\{a_n\}$ 称为“斐波那契数列”. 记

$a_{2023} = m$, 则 $a_2 + a_4 + a_6 + L + a_{2022} = (\quad)$

- A. $m-2$ B. $m-1$ C. m D. $m+1$

【解答】解: 因为 $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$,

所以 $a_{2023} = a_{2022} + a_{2021} = a_{2022} + a_{2020} + a_{2019} = \dots = a_{2022} + a_{2020} + a_{2018} + \dots + a_2 + a_1$,

又因为 $a_1 = 1$, 所以 $a_2 + a_4 + a_6 + \dots + a_{2022} = a_{2023} - a_1 = m - 1$.

故选: B.

4. (2023•皇姑区四模) 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $a_n + a_{n+1} = 2n - 1$, 且存在 $k \in N^*$,

$S_k = S_{k+1} = 190$, 则 a_1 的取值集合为 ()

- A. $\{-20, 19\}$ B. $\{-20, 20\}$ C. $\{-29, 10\}$ D. $\{10\}$

【解答】解: $\because a_n + a_{n+1} = 2n - 1$,

$$\therefore S_{2n} = (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + L + (a_{2n-1} + a_{2n}) = (2 \times 1 - 1) + (2 \times 3 - 1) + L + [2(2n - 1) - 1]$$

$$= 1 + 5 + L + (4n - 3) = \frac{n(1 + 4n - 3)}{2} = n(2n - 1),$$

不妨令 $S_{2n} = 190$, 则 $2n^2 - n - 190 = 0$,

解得 $n = 10$ 或 $n = -\frac{19}{2}$ (不合题意, 舍去), 即 $S_{20} = 190$,

$\because S_k = S_{k+1} = 190$, $\therefore k = 20$ 或 $k = 19$,

$\because a_n + a_{n+1} = 2n - 1$, $\therefore a_{n+1} + a_{n+2} = 2(n + 1) - 1$, 即 $a_{n+2} - a_n = 2$,

当 $k = 20$ 时, $a_{21} = S_{21} - S_{20} = 0$,

$$\therefore a_1 = a_3 - 2 = a_5 - 4 = L = a_{21} - 20 = -20,$$

当 $k = 19$ 时, $a_{20} = 0$, 由 $a_{19} + a_{20} = 2 \times 19 - 1 = 37$ 得 $a_{19} = 37 - a_{20} = 37$,

$$\therefore a_1 = a_3 - 2 = a_5 - 4 = L = a_{19} - 18 = 19,$$

则 a_1 的取值集合为 $\{-20, 19\}$.

故选：A.

5. (2023•濠江区校级模拟) 某软件研发公司对某软件进行升级, 主要是对软件程序中的某序列 $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ 重新编辑, 编辑新序列为 $A^* = \{a_2 - a_1, a_3 - a_2, a_4 - a_3, \dots\}$, 它的第 n 项为 $a_{n+1} - a_n$, 若 $(A^*)^*$ 的所有项都是 2, 且 $a_4 = 24$, $a_5 = 32$, 则 $a_1 = (\quad)$

- A. 8 B. 10 C. 12 D. 14

【解答】解: 令 $b_n = a_{n+1} - a_n$, 则 $A^* = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$,

$$\therefore (A^*)^* = \{b_2 - b_1, b_3 - b_2, b_4 - b_3, \dots\},$$

由题意得对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{n+1} - b_n = 2$, 且 $b_4 = a_5 - a_4 = 8$,

$\therefore$ 数列 $\{b_n\}$ 是公差为 2 的等差数列, 且 $b_n = b_4 + 2(n-4) = 8 + 2(n-4) = 2n$, 即 $a_{n+1} - a_n = 2n$,

$$\therefore a_4 = a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + (a_4 - a_3) = a_1 + 2 + 4 + 6 = a_1 + 12 = 24, \text{ 解得 } a_1 = 12.$$

故选：C.

6. (2023•张家口二模) 欧拉函数 $\varphi(n) (n \in \mathbb{N}^*)$ 的函数值等于所有不超过正整数 n , 且与 n 互质的正整数的个数, 例如: $\varphi(1) = 1$, $\varphi(3) = 2$. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n = \varphi(2^n)$, 其前 n 项和为 S_n , 则 $S_{10} = (\quad)$

- A. 1024 B. 2048 C. 1023 D. 2047

【解答】解: 由题意得 $a_1 = \varphi(2) = 1, a_2 = \varphi(2^2) = 2, a_3 = \varphi(2^3) = 4, a_4 = \varphi(2^4) = 8$,

则 $a_n = \varphi(2^n) = 2^{n-1}$, 即 $\varphi(2^n)$ 表示从 1 到 2^n 的正整数中, 与 2^n 互质的正整数的个数, 相当于去掉从 1 到 2^n 的正整数中所有 2 的倍数的个数 (共 2^{n-1} 个数),

$$\therefore a_n = \varphi(2^n) = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}.$$

$$\therefore S_{10} = 1 + 2 + 4 + \dots + 2^9 = 1023.$$

故选：C.

7. (2023•固始县校级模拟) 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 对任意 $m, n \in \mathbb{N}^+$, $a_{m+n} = a_m a_n$, 若

$$a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+10} = 2^{15} - 2^5, \text{ 则 } k = (\quad)$$

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【解答】解：由 $a_{m+n} = a_m a_n$ ，令 $m=1$ ，则 $a_{n+1} = a_n a_1 = 2a_n$ ，即 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$ ，

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，

则 $a_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$ ，

$$\therefore a_{k+1} + a_{k+2} + \dots + a_{k+10} = \frac{a_{k+1} \cdot (1-2^{10})}{1-2} = \frac{2^{k+1} \cdot (1-2^{10})}{1-2} = 2^{k+1}(2^{10}-1) = 2^5(2^{10}-1)，$$

$\therefore 2^{k+1} = 2^5$ ，则 $k+1=5$ ，解得 $k=4$ ，

故选：C。

8. (2023·李沧区校级一模) 云冈石窟，古称为武州山大石窟寺，是世界文化遗产。若某一石窟的某处“浮雕像”共 7 层，每一层的“浮雕像”个数是其下一层的 2 倍，共有 1016 个“浮雕像”，这些“浮雕像”构成一幅优美的图案，若从最下层往上每一层的“浮雕像”的个数构成一个数列 $\{a_n\}$ ，则 $\log_2(a_3 a_5)$ 的值为()

A. 8

B. 10

C. 12

D. 16

【解答】解：从最下层往上“浮雕像”的数量构成一个数列 $\{a_n\}$ ，

则 $\{a_n\}$ 是以 2 为公比的等比数列，

$$\therefore S_7 = \frac{a_1(1-2^7)}{1-2} = 1016，127a_1 = 1016，解得 a_1 = 8，$$

所以 $a_n = 8 \times 2^{n-1}$ ，

$$\therefore \log_2(a_3 \cdot a_5) = \log_2(8 \times 2^2 \times 8 \times 2^4) = 12。$$

故选：C。

9. (2023·海淀区校级三模) $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列，其公差 $d \neq 0$ ， $\{b_n\}$ 是等比数列，若 $a_1 = b_1$ ， $a_{1012} = b_{1012}$ ， S_n 和 T_n 分别是 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，则()

A. $S_{2023} > T_{2023}$

B. $S_{2023} < T_{2023}$

C. $S_{2023} = T_{2023}$

D. S_{2023} 和 T_{2023} 的大小关系不确定

【解答】解：因为 $\{a_n\}$ 是各项均为正数的等差数列，其公差 $d \neq 0$ ，

则 $S_{2023} = \frac{2023(a_1 + a_{2023})}{2} = 2023a_{1012}$ ，且 $a_{1012} = a_1 + 1011d \neq a_1$ ，则 $b_{1012} \neq b_1$ ，

设等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，则 $q^{1011} = \frac{b_{1012}}{b_1} > 0$ 且 $q^{1011} \neq 1$ ，即 $q > 0$ 且 $q \neq 1$ ，

又因为 $b_1 > 0$ ，所以，等比数列 $\{b_n\}$ 为正项单调数列，

由基本不等式可得 $b_1 + b_{2023} > 2\sqrt{b_1 b_{2023}} = 2b_{1012}$ ， $b_2 + b_{2022} > 2\sqrt{b_2 b_{2022}} = 2b_{1012}$ ，

L， $b_{1011} + b_{1013} > 2\sqrt{b_{1011} b_{1013}} = 2b_{1012}$ ，

所以， $T_{2023} = b_1 + b_2 + L + b_{2023} > 2023b_{1012} = 2023a_{1012} = S_{2023}$ ，

故选：B。

10. (2023·秦安县校级一模) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + L + na_n = 2^n$ ，设

$b_n = \frac{a_n}{(n+1)2^{n-1}}$ ， S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和。若 $S_n < t$ 对任意 $n \in N^*$ 恒成立，则实数 t 的最小值为()

A. 1

B. 2

C. $\frac{3}{2}$

D. $\frac{5}{2}$

【解答】解：因为 $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + L + na_n = 2^n$ ，

所以当 $n=1$ 时， $a_1 = 2$ ；

当 $n \geq 2$ 时， $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + L + (n-1)a_{n-1} = 2^{n-1}$ ，

两式相减得， $na_n = 2^{n-1}$ ，

所以 $a_n = \frac{2^{n-1}}{n}$ ，

当 $n=1$ 时， $a_1 = 2$ ，不满足上式，

所以 $a_n = \begin{cases} 2, & n=1 \\ \frac{2^{n-1}}{n}, & n \geq 2 \end{cases}$ ，

所以 $b_n = \frac{a_n}{(n+1)2^{n-1}} = \begin{cases} 1, & n=1 \\ \frac{1}{n(n+1)}, & n \geq 2 \end{cases} = \begin{cases} 1, & n=1 \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, & n \geq 2 \end{cases}$ ，

当 $n=1$ 时， $S_1 = b_1 = 1$ ；

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = 1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1} < \frac{3}{2}$,

所以 $t \leq \frac{3}{2}$, 即 t 的最小值为 $\frac{3}{2}$.

故选: C.

11. (2023·云南模拟) 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_1 = 2$,

$S_{n+1}^2 - 3^n a_{n+1} = S_n(S_n + 2 \cdot 3^n)$, 则 $S_{2023} =$ ()

- A. $3^{2023} - 1$ B. $\frac{3^{2023} - 1}{2}$ C. $\frac{3^{2023} + 1}{2}$ D. $\frac{3^{2022} + 1}{2}$

【解答】解: 由 $S_{n+1}^2 - 3^n a_{n+1} = S_n(S_n + 2 \cdot 3^n)$,

得 $S_{n+1}^2 - 3^n(S_{n+1} - S_n) = S_n^2 + 2 \cdot 3^n \cdot S_n$,

$\therefore (S_{n+1} + S_n)(S_{n+1} - S_n) - 3^n(S_{n+1} + S_n) = 0$,

因 $a_n > 0$, $\therefore S_{n+1} - S_n = 3^n$,

又 $S_1 = a_1 = 2$,

$\therefore S_{2023} = (S_{2023} - S_{2022}) + (S_{2022} - S_{2021}) + \dots + (S_2 - S_1) + S_1$

$= 3^{2022} + 3^{2021} + \dots + 3^1 + 2$

$= \frac{3 \times (1 - 3^{2022})}{1 - 3} + 2 = \frac{3^{2023} - 3}{2} + 2 = \frac{3^{2023} + 1}{2}$.

故选: C.

12. (2023·北京) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 + 6$, 下列说法正确的是 ()

A. 若 $a_1 = 3$, 则 $\{a_n\}$ 是递减数列, $\exists M \in \mathbb{R}$, 使得 $n > m$ 时, $a_n > M$

B. 若 $a_1 = 5$, 则 $\{a_n\}$ 是递增数列, $\exists M \in \mathbb{R}$, 使得 $n > m$ 时, $a_n < M$

C. 若 $a_1 = 7$, 则 $\{a_n\}$ 是递减数列, $\exists M > 6$, 使得 $n > m$ 时, $a_n > M$

D. 若 $a_1 = 9$, 则 $\{a_n\}$ 是递增数列, $\exists M \in \mathbb{R}$, 使得 $n > m$ 时, $a_n < M$

【解答】解: 法 (i) 对原式进行变形, 得 $a_{n+1} - a_n = [\frac{1}{4}(a_n - 6)^2 - 1](a_n - 6)$,

当 $a_1 = 3$, 则 $a_2 - a_1 < 0$, $a_2 < 3$,

设 $a_k < 3 (k \in \mathbb{Z}, k \geq 2)$, 则 $a_{k+1} - a_k < -3$, 所以 $\{a_n\}$ 是递减数列,

当 $n \rightarrow +\infty$, $a_n \rightarrow -\infty$, A 错误, 同理可证明 D 错误,

当 $a_1 = 5$, 则 $a_2 - a_1 > 0$, 即 $a_2 > 5$, 又因为 $\frac{1}{4}(a_1 - 6)^3 < 0$, 所以 $5 < a_2 < 6$,

假设 $5 < a_k < 6 (k \in \mathbb{Z}, k \geq 2)$, 则 $a_{k+1} - a_k > 0$, 即 $a_{k+1} > 5$, 又因为 $\frac{1}{4}(a_k - 6)^3 < 0$, 所以 $5 < a_{k+1} < 6$,

所以当 $n \rightarrow +\infty$, $a_n \rightarrow 6$, B 正确,

对于 C , 当 $a_1 = 7$, 可得 $a_2 = \frac{1}{4} + 6$, $a_3 = \frac{1}{4^4} + 6$, 可得 $\{a_n\}$ 是递减数列, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 6$,

故不存在 $M > 6$, 使得 $n > m$ 时, $a_n > M$ 恒成立, C 错误.

法(ii) $a_{n+1} = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3 + 6$, 可得 $a_{n+1} - 6 = \frac{1}{4}(a_n - 6)^3$, $n \in \mathbb{N}_+$,

所以 $a_2 - 6 = \frac{1}{4}(a_1 - 6)^3$, $a_3 - 6 = \frac{1}{4}(a_2 - 6)^3 = \frac{1}{4}[\frac{1}{4}(a_1 - 6)^3]^3 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^3} \times (a_1 - 6)^{3^2}$,

$a_4 - 6 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4^3} \times \frac{1}{4^9} \times (a_1 - 6)^{3^3}$,

归纳猜想: $a_n - 6 = \frac{1}{4^{1+3+9+\dots+3^{n-2}}} \times (a_1 - 6)^{3^{n-1}} = \frac{2}{2^{3^{n-1}}} \cdot (a_1 - 6)^{3^{n-1}}$,

当 $a_1 = 3$ 时, $a_n - 6 = \frac{2}{2^{3^{n-1}}} \cdot (-3)^{3^{n-1}} = -2 \times (\frac{3}{2})^{3^{n-1}}$, 即 $a_n = \frac{2}{2^{3^{n-1}}} \cdot (-3)^{3^{n-1}} = -2 \times (\frac{3}{2})^{3^{n-1}} + 6$, 所以

$\{a_n\}$ 是递减数列, 无边界;

$a_1 = 5$ 时, $a_n - 6 = \frac{2}{2^{3^{n-1}}} \cdot (-1)^{3^{n-1}} = -2 \times (\frac{1}{2})^{3^{n-1}}$, 即 $a_n = -2 \times (\frac{1}{2})^{3^{n-1}} + 6 = 2[3 - (\frac{1}{2})^{3^{n-1}}]$, 由复合函

数的单调性, 可得 $\{a_n\}$ 是递增, 有边界, 所以 B 正确;

$a_1 = 7$ 时, $a_n - 6 = \frac{2}{2^{3^{n-1}}} \cdot 1^{3^{n-1}} = 2 \times (\frac{1}{2})^{3^{n-1}}$, 所以 $\{a_n\}$ 是递减数列, 有边界; 所以 C 不正确;

$a_1 = 9$ 时, $a_n - 6 = \frac{2}{2^{3^{n-1}}} \cdot 3^{3^{n-1}} = 2 \times (\frac{3}{2})^{3^{n-1}}$, 所以 $\{a_n\}$ 是递增数列, 无边界; 所以 D 不正确;

故选: B .

13. (2023 秋·兴庆区校级月考) 高斯是德国著名的数学家, 近代数学的奠基者之一, 享有“数学王子”的称号, 用其名字命名的“高斯函数”为: 设 $x \in \mathbb{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, 则 $y = [x]$ 称为“高斯函数”, 例如: $[-2.5] = -3$, $[2.7] = 2$. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足

$a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $a_{n+2} + 2a_n = 3a_{n+1}$, 若 $b_n = [\log_2 a_{n+1}]$, S_n 为数列 $\left\{\frac{1}{b_n b_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和, 则

$S_{2023} = (\quad)$

A. $\frac{2022}{2023}$

B. $\frac{2024}{2023}$

C. $\frac{2023}{2024}$

D. $\frac{2025}{2024}$

【解答】解：由 $a_{n+2} + 2a_n = 3a_{n+1}$ ，得 $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$ 。又 $a_2 - a_1 = 2$ ，所以数列

$\{a_{n+1} - a_n\}$ 构成以 2 为首项，2 为公比的等比数列，

所以 $a_{n+1} - a_n = 2^n$ 。又 $a_2 - a_1 = 2$ ， $a_3 - a_2 = 2^2$ ， $\dots$ ， $a_n - a_{n-1} = 2^{n-1}$ ，

叠加可得 $(a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} (n \dots 2)$ ，

即 $a_n - a_1 = 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}$ ，

所以 $a_n - a_1 = 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{n-1} = \frac{1 \times (2^n - 1)}{2 - 1} = 2^n - 1$ 。

又因为 $a_1 = 1$ 满足上式，所以 $a_n = 2^n - 1 (n \in N^*)$ 。

所以 $a_{n+1} = 2^{n+1} - 1$ 。

因为 $2^n < 2^{n+1} - 1 < 2^{n+1}$ ，

所以 $n < \log_2(2^{n+1} - 1) < \log_2 2^{n+1}$ ，

即 $n < \log_2(2^{n+1} - 1) < n + 1$ ，

所以 $b_n = [\log_2 a_{n+1}] = [\log_2(2^{n+1} - 1)] = n$ 。故 $\frac{1}{b_n b_{n+1}} = \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ 。

所以 $S_{2023} = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}) = 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}$ 。

故选：C。

14. (2023·思明区校级一模) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 + a_2 = 0$ ， $a_{n+2} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_n = 2$ ，则数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项的和为()

A. 50

B. 98

C. 100

D. 102

【解答】解：由 $a_{n+2} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_n = 2$ ， $a_1 + a_2 = 0$ ，

令 $n = 1, 2, 3, 4$ ， $a_{n+2} + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} a_n = 2$ ，

可得 $a_3 - a_1 = 2$ ， $a_4 - a_2 = 2$ ，

两式相加可得 $a_3 + a_4 = 4$ ， $a_5 + a_3 = 2$ ， $a_6 + a_4 = 2$ ，

两式相加 $a_6 + a_5 = 0$ ， $a_7 - a_5 = 2$ ， $a_8 - a_6 = 2 \Rightarrow a_7 + a_8 = 4$ ，

进行推论归纳可得 $a_{4k-3} + a_{4k-2} = 0$, $a_{4k-1} + a_{4k} = 4 (k \in N^*)$,

所以, 对任意的 $k \in N^*$, $a_{4k-3} + a_{4k-2} + a_{4k-1} + a_{4k} = 4$,

所以, 数列 $\{a_n\}$ 的前 100 项的和为 $4 \times 25 = 100$.

故选: C.

15. (2023•龙华区校级模拟) 已知 $a_n = 2n - 1$, $b_n = \begin{cases} 2a_n, n \text{ 为偶数} \\ -a_n, n \text{ 为奇数} \end{cases}$, 若数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和

为 S_n , 则 $S_{2n} =$ ()

A. $3n^2 + n$

B. $4n^2 - 3n + 4$

C. $3n^2 + 2n$

D. $2n^2 + 3n$

【解答】解: 由题意,

可知 $S_{2n} = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \cdots + b_{2n-1} + b_{2n}$

$$= -a_1 + 2a_2 - a_3 + 2a_4 - \cdots - a_{2n-1} + 2a_{2n}$$

$$= (-a_1 + a_2) + (-a_3 + a_4) + \cdots + (-a_{2n-1} + a_{2n}) + (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n})$$

$$= (-1 + 3) + (-5 + 7) + \cdots + [-2(2n-1) + 1 + 2 \cdot 2n - 1] + [3 + 7 + \cdots + (4n-1)]$$

$$= 2 + 2 + \cdots + 2 + \frac{n \cdot (3 + 4n - 1)}{2}$$

$$= 2 \cdot n + n \cdot (2n + 1)$$

$$= 2n^2 + 3n.$$

故选: D.

二. 多选题 (共 5 小题)

16. (2023•扬中市校级模拟) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{2 + 3a_n} (n \in N^*)$, 则下列结论

正确的有 ()

A. $\left\{ \frac{1}{a_n} + 3 \right\}$ 为等比数列

B. $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \frac{1}{2^{n+1} - 3}$

C. $\{a_n\}$ 为递增数列

D. $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 的前 n 项和 $T_n = 2^{n+2} - 3n - 4$

【解答】解：数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$ ， $a_{n+1} = \frac{a_n}{2+3a_n} (n \in N^*)$ ，整理得： $2a_{n+1} + 3a_n a_{n+1} = a_n$ ，

转换为 $\frac{1}{a_{n+1}} + 3 = 2(\frac{1}{a_n} + 3)$ ，

故： $\frac{\frac{1}{a_{n+1}} + 3}{\frac{1}{a_n} + 3} = 2$ (常数)，所以 $\left\{ \frac{1}{a_n} + 3 \right\}$ 是以 $\frac{1}{a_1} + 3 = 4$ 为首项，2 为公比的等比数列。

故： $\frac{1}{a_n} + 3 = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$ ，整理得 $a_n = \frac{1}{2^{n+1} - 3}$ 。

则： $\{a_n\}$ 为递减数列。

进一步整理得： $\frac{1}{a_n} = 2^{n+1} - 3$ ，

所以 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 的前 n 项和： $T_n = \frac{4(2^n - 1)}{2 - 1} - 3n = 2^{n+2} - 3n - 4$ ，

故选：ABD。

17. (2023·昌江县二模) 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $2a_1 + 2^2 a_2 + \dots + 2^n a_n = n (n \in N^*)$ ，

$b_n = \frac{1}{\log_4 a_n \cdot \log_2 a_{n+1}}$ ， S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和。若对任意实数 λ ，都有 $S_n < \lambda$ 成立，则实

数 λ 的可能取值为()

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

【解答】解：由 $2a_1 + 2^2 a_2 + \dots + 2^n a_n = n$ ，得 $2a_1 + 2^2 a_2 + \dots + 2^{n-1} a_{n-1} = n-1 (n \geq 2)$ ，

两式相减得 $2^n a_n = 1$ ，则 $a_n = \frac{1}{2^n}$ ，

又当 $n=1$ 时， $2a_1 = 1$ ，解得 $a_1 = \frac{1}{2}$ ，满足上式，

所以 $a_n = \frac{1}{2^n}$ ，故

$$b_n = \frac{1}{\log_4 a_n \cdot \log_2 a_{n+1}} = \frac{1}{\log_{2^2} 2^{-n} \cdot \log_2 2^{-(n+1)}} = \frac{1}{-\frac{n}{2} \cdot [-(n+1)]} = \frac{2}{n(n+1)} = 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)，$$

所以 $S_n = 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{2}{n+1} < 2$ ，又 $S_n < \lambda$ ，所以 $\lambda \geq 2$ 。

故选：BCD。

18. (2023·黄冈模拟) 设数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n ，满足 $(a_n - 1)^2 = 4(100 - S_n)$ ， $n \in N^*$ 且

$a_1 > 0$ ， $a_2 > 0$ ，则下列选项正确的是()

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/246111141131010224>