

湖南省长沙市 2024-2025 学年高二数学上学期期末试题

本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，共 8 页．时量 120 分钟．满分 150 分．

第 I 卷

一、选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_4 = 11$ ， $a_6 = 15$ ，则 $\{a_n\}$ 的公差为（ ）

- A. -2 B. 2 C. -3 D. 3

【答案】B

【解析】

【分析】依据等差数列的定义，列出方程，解之即可．

【详解】设 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，

$$\text{则 } a_1 + 3d = 11, a_1 + 5d = 15,$$

解得 $d = 2$ ．

故选：B．

2. 假如直线 $a \subset$ 平面 α ，直线 $b \subset$ 平面 β ，且 $\alpha // \beta$ ，则 a 与 b （ ）

- A. 共面 B. 平行
C. 是异面直线 D. 可能平行，也可能是异面直线

【答案】D

【解析】

【分析】依据线面和面面的位置关系干脆得出结论．

【详解】 $\alpha // \beta$ ，说明 a 与 b 无公共点，

$\therefore a$ 与 b 可能平行也可能是异面直线．

故选：D．

3. 4 位同学到 3 个小区参与垃圾分类宣扬活动，每位同学只能去一个小区，则不同的支配方法共有（ ）

- A. 3^4 种 B. 4^3 种 C. A_4^3 种 D. $C_4^2 A_3^3$ 种

【答案】A

【解析】

【分析】由分步计数原理可得答案．

【详解】4 位同学到 3 个小区参与垃圾分类宣扬活动，每位同学只能去一个小区，则每位同学都有 3 种选择，所以共有 3^4 种不同的支配方法，

故选：A

4. $(x-1)^{10}$ 的绽开式的第 6 项的系数是

- A. $-C_{10}^6$ B. C_{10}^6 C. $-C_{10}^5$ D. C_{10}^5

【答案】C

【解析】

【分析】先写出二项式绽开式的通项，通过通项求解.

【详解】由题得 $T_{r+1} = C_{10}^r x^{10-r} (-1)^r (r=0,1,2,\dots,10)$,

令 $r=5$, 所以 $T_6 = C_{10}^5 x^5 (-1)^5 = -C_{10}^5 x^5$,

所以 $(x-1)^{10}$ 的绽开式的第 6 项的系数是 $-C_{10}^5$.

故选 C

【点睛】本题主要考查二项式绽开式的系数问题，意在考查学生对该学问的理解驾驭水平，属于基础题.

5. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ；等比数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，且 $a_1 = b_1 = 1, b_4 = 2a_4 = 8$ ，则

$S_5 + T_5 =$ ()

- A. 22 B. 34 C. 46 D. 50

【答案】C

【解析】

【分析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，解出 d 和 q ，再求出 S_5 和 T_5 ，即可.

【详解】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，等比数列 $\{b_n\}$ 的公比为 q ，

因为 $a_1 = b_1 = 1, b_4 = 2a_4 = 8$,

$$a_4 = a_1 + 3d = 1 + 3d = 4, b_4 = b_1 q^{n-1} = q^3 = 8$$

解得： $d=1, q=2$.

$$\text{则 } S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15,$$

$$T_5 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31,$$

$$\text{所以 } S_5 + T_5 = 15 + 31 = 46.$$

故选：C

【点睛】等差（比）数列问题解决的基本方法：基本量代换和敏捷运用性质.

6. 已知编号为 1, 2, 3 的三个盒子, 其中 1 号盒子内装有两个 1 号球, 一个 2 号球和一个 3 号球; 2 号盒子内装有两个 1 号球, 一个 3 号球; 3 号盒子内装有三个 1 号球, 两个 2 号球. 若第一次先从 1 号盒子内随机抽取 1 个球, 将取出的球放入与球同编号的盒子中, 其次次从放入球的盒子中任取一个球, 则其次次抽到 3 号球的概率为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{7}{36}$ C. $\frac{11}{48}$ D. $\frac{1}{6}$

【答案】C

【解析】

【分析】记第一次抽到第 i 号球的事务分别为 $A_i (i=1,2,3)$, 记其次次在第 i 号盒内抽到 3 号球的事务分别为 $B_i (i=1,2,3)$, 再利用全概率公式求解即可.

【详解】记第一次抽到第 i 号球的事务分别为 $A_i (i=1,2,3)$,

$$\text{则有 } P(A_1) = \frac{1}{2}, \quad P(A_2) = P(A_3) = \frac{1}{4},$$

记其次次在第 i 号盒内抽到 3 号球的事务分别为 $B_i (i=1,2,3)$,

$$\text{而 } A_1, A_2, A_3 \text{ 两两互斥, 和为 } \Omega, \quad P(B_1|A_1) = \frac{1}{4}, \quad P(B_2|A_2) = \frac{1}{4}, \quad P(B_3|A_3) = \frac{1}{6},$$

记其次次抽到 3 号球的事务为 B ,

$$P(B) = \sum_{i=1}^3 P(A_i B_i) = \sum_{i=1}^3 [P(A_i) \cdot P(B_i|A_i)] = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{6} = \frac{11}{48}.$$

故选:C.

7. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的中心是坐标原点 O , F 是椭圆 E 的焦点. 若椭圆 E 上存在点 P ,

使 $\triangle OFP$ 是等边三角形, 则椭圆 E 的离心率为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $4-2\sqrt{3}$ C. $\sqrt{3}-1$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【答案】C

【解析】

【分析】设点 P 为椭圆 E 上位于第一象限内的点, 设 F_1 为椭圆 E 的左焦点, 计算出 $|PF|$ 、 $|PF_1|$, 利用椭

当 $0 < x < e$ 时, $f'(x) > 0$, 所以, 函数 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增,

因为 $0 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < e$, 则 $f(\sqrt{2}) < f(\sqrt{3})$, 即 $\frac{2\ln\sqrt{2}}{\sqrt{2}} < \frac{2\ln\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$, 即 $\sqrt{3}\ln 2 < \sqrt{2}\ln 3$,

所以, $b < c$,

因为 $3^5 = 243 < 256 = 2^8$, 故 $5\ln 3 < 8\ln 2$, 即 $\ln 3 < \frac{8}{5}\ln 2 < \sqrt{3}\ln 2$, 即 $a < b$,

因此, $c > b > a$.

故选: D.

二、选择题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分)

9. 已知曲线 $C: \frac{x^2}{4-m} + \frac{y^2}{2+m} = 1$, 则 ()

A. $m = 2$ 时, 则 C 的焦点是 $F_1(0, \sqrt{2})$, $F_2(0, -\sqrt{2})$

B. 当 $m = 6$ 时, 则 C 的渐近线方程为 $y = \pm 2x$

C. 当 C 表示双曲线时, 则 m 的取值范围为 $m < -2$

D. 存在 m , 使 C 表示圆

【答案】ABD

【解析】

【分析】AB 选项, 代入 m 的值, 分别得出是什么类型的曲线, 进而作出推断; C 选项, 要想使曲线 C 表示双曲线要满足 $(4-m)(2+m) < 0$; D 选项, 求出曲线 C 表示圆时 m 的值.

【详解】当 $m = 2$ 时, 曲线 $C: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$, 是焦点在 y 轴上的椭圆, 且 $c^2 = 4 - 2 = 2$, 所以交点坐标为

$F_1(0, \sqrt{2})$, $F_2(0, -\sqrt{2})$, A 正确 当 $m = 6$ 时, 曲线 $C: \frac{y^2}{8} - \frac{x^2}{2} = 1$, 是焦点在 y 轴上的双曲线, 则 C

的渐近线为 $y = \pm 2x$, B 正确; 当 C 表示双曲线时, 要满足: $(4-m)(2+m) < 0$, 解得: $m > 4$ 或

$m < -2$, C 错误; 当 $4-m = 2+m$, 即 $m = 1$ 时, $x^2 + y^2 = 3$, 表示圆, D 正确

故选: ABD

10. 设直线 $l: y = kx + 1 (k \in \mathbf{R})$ 与圆 $C: x^2 + y^2 = 5$, 则下列结论正确的为 ()

A. l 与 C 可能相离

B. l 不行能将 C 的周长平分

C. 当 $k=1$ 时, l 被 C 截得的弦长为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

D. l 被 C 截得的最短弦长为 4

【答案】BD

【解析】

【分析】求出直线 l 所过定点的坐标, 可推断 A 选项的正误; 假设假设法可推断 B 选项的正误; 利用勾股定理可推断 CD 选项的正误.

【详解】对于 A 选项, 直线 l 过定点 $(0,1)$, 且点 $(0,1)$ 在圆 C 内, 则直线 l 与圆 C 必相交, A 选项错误;

对于 B 选项, 若直线 l 将圆 C 平分, 则直线 l 过原点, 此时直线 l 的斜率不存在, B 选项正确;

对于 C 选项, 当 $k=1$ 时, 直线 l 的方程为 $x-y+1=0$, 圆心 C 到直线 l 的距离为 $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

所以, 直线 l 被 C 截得的弦长为 $2\sqrt{5 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 3\sqrt{2}$, C 选项错误;

对于 D 选项, 圆心 C 到直线 l 的距离为 $d = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}} \leq 1$,

所以, 直线 l 被 C 截得的弦长为 $2\sqrt{5 - d^2} \geq 4$, D 选项正确.

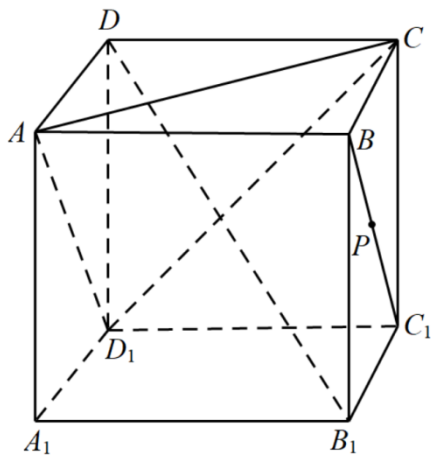
故选: BD.

【点睛】方法点睛: 圆的弦长的常用求法

(1) 几何法: 求圆的半径为 r , 弦心距为 d , 弦长为 l , 则 $l = 2\sqrt{r^2 - d^2}$;

(2) 代数方法: 运用根与系数的关系及弦长公式 $|AB| = \sqrt{1 + k^2} |x_1 - x_2|$.

11. 如图, 在棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 点 P 在线段 BC_1 上运动, 则下列推断中正确的是 ()



A. $DP \parallel$ 面 AB_1D_1

B. 三棱锥 $A - D_1PC$ 的体积为 $\frac{1}{12}$

C. 平面 PB_1D 与平面 ACD_1 所成二面角为 90°

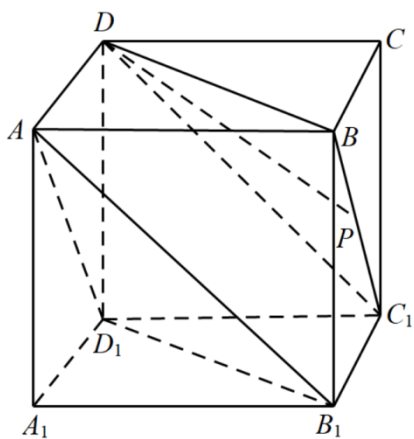
D. 异面直线 A_1P 与 AD_1 所成角的范围是 $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$

【答案】ACD

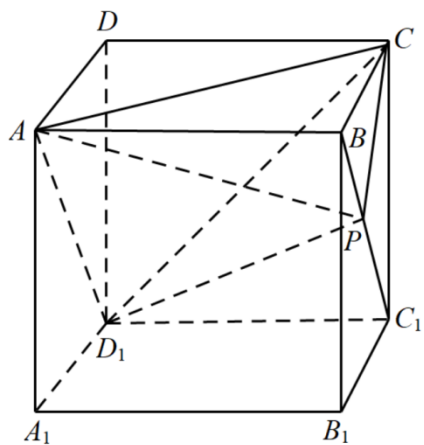
【解析】

【分析】A 利用面面平行的性质证 $DP \parallel$ 面 AB_1D_1 ；B 应用等体积法，依据特别点： P 与 B 重合时求 $A - D_1PC$ 的体积；C 先证明 $DB_1 \perp$ 面 ACD_1 ，再利用面面垂直的判定定理证面 $PB_1D \perp$ 面 ACD_1 即可；D 由 $AD_1 \parallel BC_1$ ，依据 P 在线段 BC_1 的位置，即可确定异面直线 A_1P 与 AD_1 所成角的范围。

【详解】A：连接 DB ， DC_1 ， AB_1 ， D_1B_1 ，由于 $BC_1 \parallel AD_1$ ， $DB \parallel D_1B_1$ ，由面面平行的判定定理，可证明面 $AB_1D_1 \parallel$ 面 BDC_1 ，又 $DP \subset$ 面 BDC_1 ，所以 $DP \parallel$ 面 AB_1D_1 ，正确；



B: $V_{A-D_1PC} = V_{C-AD_1P}$ ，因为 C 到面 AD_1P 的距离不变，且 $\triangle AD_1P$ 的面积不变，所以三棱锥 $C - AD_1P$ 的体积不变，当 P 与 B 重合时得 $V_{C-AD_1B} = V_{D_1-ABC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$ ，错误；

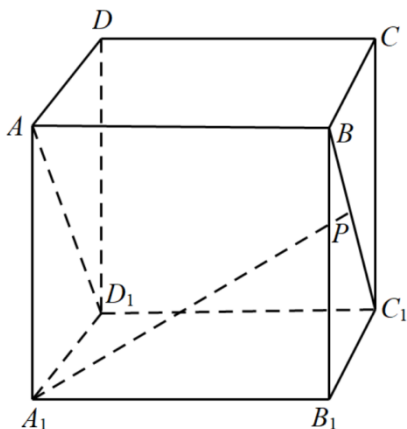


C: 由三垂线定理, 可证明 $DB_1 \perp AC, DB_1 \perp AD_1$, 再由线面垂直的判定定理可得 $DB_1 \perp$ 面 ACD_1 , 又

$DB_1 \subset$ 面 PB_1D , 则面 $PB_1D \perp$ 面 ACD_1 , 正确;

D: 由 $AD_1 \parallel BC_1$, 异面直线 A_1P 与 AD_1 所成角即为 A_1P 与 BC_1 所成角, 又 $\triangle A_1BC_1$ 为等边三角形, 当 P 与

线段 BC_1 的两端点重合时, A_1P 与 AD_1 所成角取最小值 $\frac{\pi}{3}$, 当 P 与线段 BC_1 的中点重合时, A_1P 与 AD_1 所成角取最大值 $\frac{\pi}{2}$, 故 A_1P 与 AD_1 所成角的范围 $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, 正确.



故选: ACD.

12. 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过原点 O 的动直线 l 交抛物线于另一点 P , 交抛物线的准线于点 Q , 下列说法正确的是 ()

A. 若 O 为线段 PQ 中点, 则 $|PF| = 2$

B. 若 $|PF| = 4$, 则 $|OP| = 2\sqrt{5}$

C. 存在直线 l , 使得 $PF \perp QF$

D. $\triangle PFQ$ 面积的最小值为 2

【答案】AD

【解析】

【分析】对于 A，求出 P 点的横坐标，再依据抛物线的定义求出 $|PF|$ ，即可推断；

对于 B，依据抛物线的定义求出 P 点的横坐标，再求出 $|OP|$ ，即可推断，

对于 C， $P(a^2, 2a)$ ，则 $Q(-1, -\frac{2}{a})$ ，推断 $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{QF} = 0$ 是否有解，即可推断；

对于 D，依据 $S_{\triangle PFQ} = \frac{1}{2} \cdot |OF| \cdot |y_P - y_Q|$ ，结合基本不等式即可推断。

【详解】解：抛物线 $y^2 = 4x$ 的准线为 $x = -1$ ，焦点 $F(1, 0)$ ，

若 O 为 PQ 中点，所以 $x_P = 1$ ，所以 $PF = x_P + 1 = 2$ ，故 A 正确；

若 $|PF| = 4$ ，则 $x_P = 4 - 1 = 3$ ，所以 $|OP| = \sqrt{x_P^2 + y_P^2} = \sqrt{x_P^2 + 4x_P} = \sqrt{21}$ ，故 B 错误；

设 $P(a^2, 2a)$ ，则 $Q(-1, -\frac{2}{a})$ ，所以 $\overrightarrow{FP} = (a^2 - 1, 2a)$ ， $\overrightarrow{QF} = (2, \frac{2}{a})$ ，

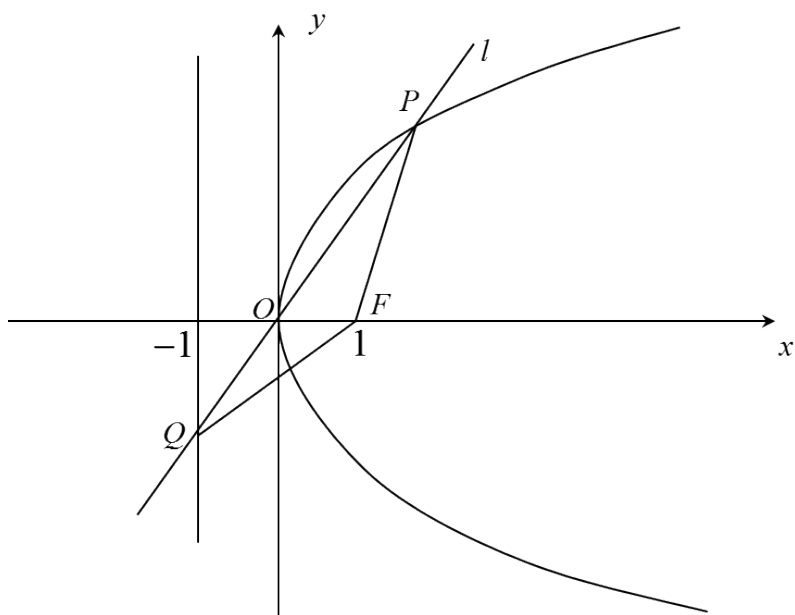
所以 $\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{QF} = 2a^2 - 2 + 4 = 2a^2 + 2 > 0$ ，所以 FP 与 FQ 不垂直，故 C 错误；

$$S_{\triangle PFQ} = \frac{1}{2} \cdot |OF| \cdot |y_P - y_Q| = \frac{1}{2} \times 1 \times \left| 2a + \frac{2}{a} \right| = \left| a + \frac{1}{a} \right| \geq 2,$$

当且仅当 $|a| = \frac{1}{|a|}$ ，即 $a = \pm 1$ 时，取等号，

所以 $\triangle PFQ$ 面积的最小值为 2，故 D 正确。

故选：AD.



以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。如要下载或阅读全文，请访问：<https://d.book118.com/246234211043010202>