

## 专题 02 函数的综合应用

### 【考点预测】

高考中考查函数的内容主要是以综合题的形式出现，通常是函数与数列的综合、函数与不等式的综合、函数与导数的综合及函数的开放性试题和信息题，求解这些问题时，着重掌握函数的性质，把函数的性质与数列、不等式、导数等知识点融会贯通，从而找到解题的突破口，要求掌握二次函数图像、最值和根的分佈等基本解法；掌握函数图像的各种变换形式（如对称变换、平移变换、伸缩变换和翻折变换等）；了解反函数的概念与性质；掌握指数、对数式大小比较的常见方法；掌握指数、对数方程和不等式的解法；掌握导数的定义、求导公式与求导法则、复合函数求导法则及导数的定义、求导公式与求导法则、复合函数求导法则及导数的几何意义，特别是应用导数研究函数的单调性、最值等。

### 【题型归纳目录】

题型一：函数与数列的综合

题型二：函数与不等式的综合

题型三：函数中的创新题

### 【典例例题】

题型一：函数与数列的综合

例 1. (2023·浙江·效实中学模拟预测) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $e^{a_{n+1}} = 2 - \frac{1}{a_n + 1}$  ( $n \in \mathbf{N}^+$ ), 其中  $e$  是自然对数的底数, 则 ( )

A.  $0 < a_{2022} < \frac{1}{4043}$

B.  $\frac{1}{4043} < a_{2022} < \frac{1}{2022}$

C.  $\frac{1}{2022} < a_{2022} < 1$

D.  $1 < a_{2022} < 2$

例 2. (2023·辽宁·东北育才学校二模) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $0 < a_1 < 0.5$ ,  $a_{n+1} = a_n + \ln(2 - a_n)$ , 则下列说法正确的是 ( )

A.  $0 < a_{2022} < 0.5$

B.  $0.5 < a_{2022} < 1$

C.  $1 < a_{2022} < 1.5$

D.  $1.5 < a_{2022} < 2$

例 3. (2023·浙江绍兴·模拟预测) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{3\pi}{4}$ ,  $a_{n+1} + \cos a_n - \frac{\pi}{2} = 0$ , 则下列说法正确的是

( )

A.  $a_{n+1} - a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$

B.  $a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n^2 \geq \frac{\pi}{2} - 1$

C.  $a_{n+1} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}a_n \leq \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$

D.  $a_{n+1} - \frac{2}{\pi}a_n \geq \frac{\pi}{2} - 1$

例 4. (2023·浙江·慈溪中学模拟预测) 已知数列  $\{a_n\}$  满足:  $a_1 = -\frac{1}{2}$ , 且  $a_{n+1} = \ln(a_n + 1) - \sin a_n$ , 则下列关于数列  $\{a_n\}$  的叙述正确的是 ( )

A.  $a_n > a_{n+1}$

B.  $-\frac{1}{2} \leq a_n < -\frac{1}{4}$

C.  $a_{n+1} > -\frac{a_n^2}{a_n + 2}$

D.  $a_n \leq -\frac{2}{4^{2n-1}}$

例 5. (2023·辽宁·二模) 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 满足

$\sin(a_3 - 1) + 2a_3 - 5 = 0, \sin(a_9 - 1) + 2a_9 + 1 = 0$ , 则下列结论正确的是 ( )

A.  $S_{11} = 11, a_3 < a_9$

B.  $S_{11} = 11, a_3 > a_9$

C.  $S_{11} = 22, a_3 < a_9$

D.  $S_{11} = 22, a_3 > a_9$

例 6. (2023·上海·高三专题练习) 若等差数列  $\{a_n\}$  的公差  $d < 0$ , 令函数

$f_i(x) = |x - a_i| + a_i, g(x) = \min\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ , (其中  $i = 1, 2, \dots, n$ ), 则下列四个结论中: ①  $g(x) = f_n(x)$ ; ②

$g(x+d) = g(x) + d$ ; ③  $f_n(x+d) = f_{n-1}(x) + d$ ; ④  $g_{\max}(x) = a_1$ ; ⑤  $g_{\min}(x) = a_n$ ; 错误的序号是\_\_\_\_\_.

### 【方法技巧与总结】

利用函数与数列知识的相互联系、相似性质:

(1) 抽象函数的关系与数列递推关系式类似.

(2) 函数单调性与数列单调性的相似性.

(3) 数列与不等式的综合可以利用数列的形式构造辅助函数, 利用函数的性质证明不等式, 因此解决数列问题可转化为函数问题, 用函数的知识或方法解决.

### 题型二: 函数与不等式的综合

例 7. (2023·全国·模拟预测) 已知函数  $f(x)$  是定义域为  $\mathbb{R}$  的函数,  $f(2+x) + f(-x) = 0$ , 对任意  $x_1,$

$x_2 \in [1, +\infty) (x_1 < x_2)$ , 均有  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , 已知  $a, b (a \neq b)$  为关于  $x$  的方程  $x^2 - 2x + t^2 - 3 = 0$  的两个解,

则关于  $t$  的不等式  $f(a) + f(b) + f(t) > 0$  的解集为 ( )

A.  $(-2, 2)$

B.  $(-2, 0)$

C.  $(0, 1)$

D.  $(1, 2)$

例 8. (2023·海南·模拟预测) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} |\ln(x-1)|, & 1 < x \leq 3 \\ 2|x| - 2, & x \leq 1 \end{cases}$ , 若关于  $x$  的不等式  $x + m < f(x) < x + m + 1$

有且仅有两个整数解，则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

例 9. (2023·全国·高三专题练习) 不等式  $(x^2-1)^{1011} + x^{2002} + 2x^2 - 1 \leq 0$  的解集为: \_\_\_\_\_.

例 10. (2023·四川遂宁·三模(文)) 德国大数学家高斯年少成名，被誉为数学届的王子，19岁的高斯得到了一个数学史上非常重要的结论，就是《正十七边形尺规作图之理论与方法》，在其年幼时，对  $1+2+3+\dots+100$  的求和运算中，提出了倒序相加法的原理，该原理基于所给数据前后对应项的和呈现一定的规律生成，因此，此方法也称之为高斯算法，现有函数  $f(x) = \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}}$ ，设数列  $\{a_n\}$  满足

$a_n = f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \dots + f(\frac{n-1}{n}) + f(1) (n \in \mathbb{N}^*)$ ，若存在  $n \in \mathbb{N}^*$  使不等式  $n^2 + 4n - 2ka_n + 27 \leq 0$  成立，则  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

### 【方法技巧与总结】

不等式问题转化为函数问题是静态转化为动态，常量转化为变量，这体现了函数思想，并能用函数的图像及性质解答.

#### 题型三：函数中的创新题

例 11. (2023·全国·高三专题练习) 定义两个函数的关系：函数  $m(x), n(x)$  的定义域分别为  $A, B$ ，若对任意的  $x_1 \in A$ ，总存在  $x_2 \in B$ ，使得  $m(x_1) = n(x_2)$ ，我们就称函数  $m(x)$  为  $n(x)$  的“子函数”. 已知函数

$$f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{3}{4} \ln \frac{x}{3}, \quad g(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 3, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

- (1) 求函数  $f(x)$  的单调区间；
- (2) 若  $f(x)$  为  $g(x)$  的一个“子函数”，求  $a^2 + b^2$  的最小值.

例 12. (2023·上海·高三专题练习) 若存在常数  $k(k > 0)$ ，使得对定义域  $D$  内的任意  $x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ ，都有  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$  成立，则称函数  $f(x)$  在其定义域  $D$  上是“ $k$ -利普希兹条件函数”.

- (1) 若函数  $f(x) = \sqrt{x} (1 \leq x \leq 4)$  是“ $k$ -利普希兹条件函数”，求常数  $k$  的最小值；
- (2) 判断函数  $f(x) = \log_2 x$  是否是“2-利普希兹条件函数”，若是，请证明，若不是，请说明理由；
- (3) 若  $y = f(x) (x \in \mathbb{R})$  是周期为 2 的“1-利普希兹条件函数”，证明：对任意的实数  $x_1, x_2$ ，都有  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 1$ .

例 13. (2023·上海·高三专题练习) 对定义域  $D_f, D_g$  的函数  $y = f(x), y = g(x)$ ，规定：

$$\text{函数 } h(x) = \begin{cases} f(x)g(x), & x \in D_f \cap D_g \\ f(x), & x \in D_f \text{ 且 } x \notin D_g \\ g(x), & x \notin D_f \text{ 且 } x \in D_g \end{cases}$$

- (1) 若函数  $f(x) = \frac{1}{x-1}$ ,  $g(x) = x^2$ , 写出函数  $h(x)$  的解析式;
- (2) 求问题 (1) 中函数  $h(x)$  的值域;
- (3) 若  $g(x) = f(x+\alpha)$ , 其中  $\alpha$  是常数, 且  $\alpha \in [0, \pi]$ , 请设计一个定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $y = f(x)$ , 及一个  $\alpha$  的值, 使得  $h(x) = \cos 4x$ , 并予以证明.

**例 14.** (2023·上海·高三专题练习) 对于函数  $f(x) (x \in D)$ , 若存在正常数  $T$ , 使得对任意的  $x \in D$ , 都有  $f(x+T) \geq f(x)$  成立, 我们称函数  $f(x)$  为“ $T$  同比不减函数”.

- (1) 求证: 对任意正常数  $T$ ,  $f(x) = x^2$  都不是“ $T$  同比不减函数”;
- (2) 若函数  $f(x) = kx + \sin x$  是“ $\frac{\pi}{2}$  同比不减函数”, 求  $k$  的取值范围;
- (3) 是否存在正常数  $T$ , 使得函数  $f(x) = x + |x-1| - |x+1|$  为“ $T$  同比不减函数”, 若存在, 求  $T$  的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

### 【方法技巧与总结】

紧扣题目中所给的信息和对已知条件的解读理解, 将其转化为已有的认知结构, 然后利用函数性质解题.

### 【过关测试】

### 一、单选题

1. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数  $f(x) = \left| \frac{x-2}{x+2} - ax - b \right|$ , 若对任意的实数  $a, b$ , 总存在  $x_0 \in [-1, 2]$ , 使得  $f(x_0) \leq m$  成立, 则实数  $m$  的取值范围是 ( )

- A.  $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right]$       B.  $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$       C.  $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right]$       D.  $(-\infty, 1]$

2. (2023·全国·高三专题练习) 若定义在  $R$  上的函数  $f(x)$  满足  $f(x) + f(2a-x) = 2b$ , 则其图象关于点  $(a, b)$  成中心对称. 已知: 函数  $f(x) = \frac{1}{4^{x-1} + 1}$ , 则函数  $f(x)$  图象的中心对称点是 ( )

- A.  $(0, 1)$       B.  $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$       C.  $(1, 0)$       D.  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$

3. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2^x - \frac{1}{2}, & x < 1 \\ \log_2\left(x + \frac{1}{2}\right), & x \geq 1 \end{cases}$ , 若函数  $g(x) = -x + m (m > 0)$  与  $y = f(x)$

的图象相交于  $A, B$  两点, 且  $A, B$  两点的横坐标分别记为  $x_1, x_2$ , 则  $x_1 + x_2$  的取值范围是

- A.  $\left(1, \frac{3}{2}\right)$       B.  $\left[\log_2 3, \frac{5}{2}\right)$       C.  $\left[1, \frac{5}{2}\right)$       D.  $[\log_2 3, 3]$

4. (2023·全国·高三专题练习 (理)) 已知  $f(x)$  是定义在  $R$  上的奇函数, 对任意两个不相等的正数  $x_1, x_2$  都有  $\frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ , 记  $a = \frac{f(4^{0.2})}{4^{0.2}}, b = \frac{f(0.4^2)}{0.4^2}, c = \frac{f(\log_{0.2} 4)}{\log_{0.2} 4}$ , 则 ( )

- A.  $c < b < a$       B.  $a < b < c$       C.  $a < c < b$       D.  $c < b < a$

5. (2023·全国·高三专题练习) 关于函数  $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$  有下述四个结论:

①  $f(x)$  是偶函数      ②  $f(x)$  在区间  $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  单调递增

③  $f(x)$  在  $[-\pi, \pi]$  有 4 个零点      ④  $f(x)$  的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

- A. ①②④      B. ②④      C. ①④      D. ①③

6. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数  $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{2} \leq x \leq 2\right)$  的图象上存在点  $P$ , 函数  $g(x) = ax - 3$  的图象上存在点  $Q$ , 且  $P, Q$  关于原点对称, 则实数  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $[-4, 0]$       B.  $\left[0, \frac{5}{8}\right]$       C.  $[0, 4]$       D.  $\left[\frac{5}{8}, 4\right]$

7. (2023·天津一中模拟预测) 已知  $a > 1$ , 且函数  $f(x) = 2|x^2 - x + a| + |x^2 - 4x + a|$ . 若对任意的  $x \in (1, a)$  不等式  $f(x) \geq (a-1)x$  恒成立, 则实数  $a$  的取值范围为

- A.  $(1,9]$                       B.  $(1,25]$                       C.  $[4,25]$                       D.  $[4,+\infty)$

8. (2023·全国·高三专题练习(文)) 设函数  $f(x) = e^x(2x-1) - ax + a$ , 其中  $a < 1$ , 若存在唯一的整数  $x_0$ , 使得  $f(x_0) < 0$ , 则  $a$  的取值范围是 ( )

- A.  $\left[-\frac{3}{2e}, 1\right)$                       B.  $\left[-\frac{3}{2e}, \frac{3}{4}\right)$                       C.  $\left[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4}\right)$                       D.  $\left[\frac{3}{2e}, 1\right)$

## 二、多选题

9. (2023·浙江嘉兴·高二期中) 对于定义域为  $D$  的函数  $f(x)$ , 若存在区间  $[m, n] \subseteq D$ , 同时满足下列条件:

①  $f(x)$  在  $[m, n]$  上是单调的; ② 当定义域是  $[m, n]$  时,  $f(x)$  的值域也是  $[m, n]$ , 则称  $[m, n]$  为该函数的“和谐区间”. 下列函数存在“和谐区间”的是 ( )

- A.  $f(x) = 2x$                       B.  $f(x) = 3 - \frac{2}{x}$                       C.  $f(x) = x^2 - 2x$                       D.  $f(x) = \ln x + 2$

10. (2023·福建福州·高一期末) 设  $x \in \mathbf{R}$ , 计算机程序中的命令函数  $INT(x)$  表示不超过  $x$  的最大整数, 例如

$INT(-2.1) = -3$ ,  $INT(1.2) = 1$ . 若函数  $f(x) = \begin{cases} \log_a x, & x > 0 \\ x - INT(x), & x \leq 0 \end{cases}$  ( $a > 0$ , 且  $a \neq 1$ ), 则下列说法正确的是

( )

- A.  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 0]$  上为单调函数  
 B.  $f(x)$  在区间  $(-\infty, 0]$  上不存在最大值  
 C.  $f(x)$  在区间  $[-4, 4]$  上有 5 个零点  
 D. 若  $f(x)$  的图象上至少存在 4 对关于坐标原点对称的点, 则  $0 < a < \frac{1}{3}$ .

11. (2023·全国·高一单元测试) 数学的对称美在中国传统文化中多有体现, 譬如如图所示的太极图是由黑白两个鱼形纹组成的圆形图案, 充分展现了相互转化、对称统一的和谐美. 如果能够将圆的周长和面积同时平分的函数称为这个圆的“优美函数”, 下列说法正确的是 ( )

- A. 对于任意一个圆, 其“优美函数”有无数个  
 B.  $f(x) = x^3$  可以是某个圆的“优美函数”  
 C. 正弦函数  $y = \sin x$  可以同时是无数个圆的“优美函数”  
 D. 函数  $y = f(x)$  是“优美函数”的充要条件为函数  $y = f(x)$  的图象是中心对称图形

12. (2023·重庆市秀山高级中学校高三阶段练习) 设  $[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数, 给出以下命题, 其中正确的是 ( )

- A. 若  $x_1 \leq x_2$ , 则  $[x_1] \leq [x_2]$   
 B.  $[lg 1] + [lg 2] + [lg 3] + \dots + [lg 2020] = 4953$

C. 若  $x \geq 0$ , 则可由  $[2 \sin x] = [\frac{1}{x}]$  解得  $x$  的范围是  $[\frac{\pi}{6}, 1) \cup (\frac{5\pi}{6}, \pi]$

D. 若  $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x} - \frac{1}{2}$ , 则函数  $[f(x)] + [f(-x)]$  的值域为  $\{-1, 0\}$

13. (2023·全国·高二课时练习) 已知函数  $f(x) = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1) = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ ,  
 $g(x) = f(x)(x-n) = b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_{n+1}x^{n+1}$ , 其中  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $a_i \in \mathbb{R} (i=1, 2, \dots, n)$ ,  $b_i \in \mathbb{R} (i=1, 2, \dots, n+1)$ , 则  
 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n =$  \_\_\_\_\_,  $b_1 + nb_2 + n^2b_3 + \cdots + n^{n-1}b_n =$  \_\_\_\_\_.

### 三、填空题

14. (2023·全国·高三专题练习) 已知函数  $f(x) = \left| x + \frac{1}{x} \right|$ , 给出下列命题: ①存在实数  $a$ , 使得函数  
 $y = f(x) + f(x-a)$  为奇函数; ②对任意实数  $a$ , 均存在实数  $m$ , 使得函数  $g(x) = f(x) + f(x-a)$  关于  $x = m$   
对称; ③若对任意非零实数  $a$ ,  $f(x) + f(x-a) \geq k$  都成立, 则实数  $k$  的取值范围为  $(-\infty, 4]$ ; ④存在实数  $k$ ,  
使得函数  $y = f(x) + f(x-a) - k$  对任意非零实数  $a$  均存在 6 个零点. 其中的真命题是 \_\_\_\_\_ (写出所有  
真命题的序号)

15. (2023·全国·高三专题练习) 已知  $P$  是曲线  $C_1: y = x^3 - x \left( -\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \right)$  上的点,  $Q$  是曲线  $C_2$  上的点, 曲线  
 $C_1$  与曲线  $C_2$  关于直线  $y = 2x + 4$  对称,  $M$  为线段  $PQ$  的中点,  $O$  为坐标原点, 则  $|OM|$  的最小值为  
\_\_\_\_\_.

16. (2023·全国·高三专题练习) 若  $f(x) = |x-a| + |x-3a|$ , 且  $x \in [0, 1]$  上的值域为  $[0, f(1)]$ , 则实数  $a$  的取值  
范围是 \_\_\_\_\_.

17. (2023·全国·高三专题练习) 设  $a, b, c$  为实数,  $f(x) = (x+a)(x^2+bx+c)$ ,  
 $g(x) = (ax+1)(cx^2+bx+1)$ , 记集合  $S = \{x | f(x) = 0, x \in \mathbb{R}\}$ ,  $T = \{x | g(x) = 0, x \in \mathbb{R}\}$ , 若  $|S|, |T|$  分别为集合  
 $S, T$  的元素个数, 则下列结论可能成立的是 \_\_\_\_\_.

①  $|S|=1, |T|=0$ ; ②  $|S|=1, |T|=1$ ; ③  $|S|=2, |T|=2$ ; ④  $|S|=2, |T|=3$ .

18. (2023·全国·高三专题练习) 已知定义域为  $\mathbb{R}$  的奇函数  $f(x)$  满足  $f(x+1) = f(3-x)$ , 当  $x \in (0, 2]$  时,  
 $f(x) = -x^2 + 4$ , 则函数  $y = f(x) - a (a \in \mathbb{R})$  在区间  $[-4, 8]$  上的零点个数最多时, 所有零点之和为  
\_\_\_\_\_.



## 专题 02 函数的综合应用

### 【考点预测】

高考中考查函数的内容主要是以综合题的形式出现,通常是函数与数列的综合、函数与不等式的综合、函数与导数的综合及函数的开放性试题和信息题,求解这些问题时,着重掌握函数的性质,把函数的性质与数列、不等式、导数等知识点融会贯通,从而找到解题的突破口,要求掌握二次函数图像、最值和根的分布等基本解法;掌握函数图像的各种变换形式(如对称变换、平移变换、伸缩变换和翻折变换等);了解反函数的概念与性质;掌握指数、对数式大小比较的常见方法;掌握指数、对数方程和不等式的解法;掌握导数的定义、求导公式与求导法则、复合函数求导法则及导数的定义、求导公式与求导法则、复合函数求导法则及导数的几何意义,特别是应用导数研究函数的单调性、最值等.

### 【题型归纳目录】

题型一: 函数与数列的综合

题型二: 函数与不等式的综合

题型三: 函数中的创新题

### 【典例例题】

题型一: 函数与数列的综合

例 1. (2023·浙江·效实中学模拟预测) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1$ ,  $e^{a_{n+1}} = 2 - \frac{1}{a_n + 1}$  ( $n \in \mathbf{N}^+$ ),

其中  $e$  是自然对数的底数, 则 ( )

A.  $0 < a_{2022} < \frac{1}{4043}$

B.  $\frac{1}{4043} < a_{2022} < \frac{1}{2022}$

C.  $\frac{1}{2022} < a_{2022} < 1$

D.  $1 < a_{2022} < 2$

答案: B

【解析】

分析:

利用不等式  $e^x \geq x+1$  可得  $2 - \frac{1}{a_n + 1} > a_{n+1} + 1$ , 即  $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} > 1$ , 由累加法可得  $a_n < \frac{1}{n}$ , 利用不

等式  $e^x \leq \frac{1}{1-x}$  可得  $2 - \frac{1}{a_n + 1} < \frac{1}{1 - a_{n+1}}$ , 即  $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} < 2$ , 同理用累加法可得  $a_n > \frac{1}{2n-1}$ , 则

$\frac{1}{2n-1} < a_n < \frac{1}{n}$ , 即可求解.

【详解】

$\because e^x \geq x+1$  (当  $x=0$  时等号成立),  $\therefore e^{a_{n+1}} \geq a_{n+1}+1$ ,

当  $a_n > 0$  时,  $e^{a_{n+1}} = 2 - \frac{1}{a_n+1} > 1 \Rightarrow a_{n+1} > 0$ , 即  $a_1 = 1 > 0 \Rightarrow a_n > 0$ ,

则  $e^{a_{n+1}} > a_{n+1}+1$ ,  $e^{a_{n+1}} = 2 - \frac{1}{a_n+1} > a_{n+1}+1$ ,

整理得  $\frac{a_n}{a_n+1} > a_{n+1}$ , 即  $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} > 1$ ,

即  $\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_1} > 1$ ,  $\frac{1}{a_3} - \frac{1}{a_2} > 1$ ,  $\dots$ ,  $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n-1}} > 1$ ,

将  $n$  个不等式相加得  $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} > n-1$ , 即  $\frac{1}{a_n} > n$ ,  $a_n < \frac{1}{n}$ ,

令  $f(x) = e^x(1-x) - 1$ , 则  $f'(x) = -xe^x$ ,

当  $x < 0$  时,  $f'(x) > 0$ , 当  $x > 0$  时,  $f'(x) < 0$ ,

则  $f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增, 在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 即  $f(x)$  在  $x=0$  出取得最大值,

$f(x) \leq f(0) = 0$ , 所以  $e^x(1-x) - 1 \leq 0$  (当  $x=0$  时等号成立),

当  $x < 1$  时,  $e^x \leq \frac{1}{1-x}$  (当  $x=0$  时等号成立),

即当  $n > 1$  时,  $e^{a_{n+1}} < \frac{1}{1-a_{n+1}}$ ,  $2 - \frac{1}{a_n+1} < \frac{1}{1-a_{n+1}}$ ,  $1 - \frac{1}{a_n+1} < \frac{1}{1-a_{n+1}} - 1$ ,

$\frac{a_n}{a_n+1} < \frac{a_{n+1}}{1-a_{n+1}}$ ,  $\frac{a_n+1}{a_n} > \frac{1-a_{n+1}}{a_{n+1}}$ , 即  $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} < 2$ ,

同理利用累加法可得  $\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_1} < 2(n-1)$ , 即  $a_n > \frac{1}{2n-1}$ ,

所以  $\frac{1}{2n-1} < a_n < \frac{1}{n}$  ( $n > 1$ ), 则  $\frac{1}{4043} < a_{2022} < \frac{1}{2022}$ ,

故选: B .

例 2. (2023·辽宁·东北育才学校二模) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $0 < a_1 < 0.5$ ,  $a_{n+1} = a_n + \ln(2-a_n)$ ,

则下列说法正确的是 ( )

A.  $0 < a_{2022} < 0.5$

B.  $0.5 < a_{2022} < 1$

C.  $1 < a_{2022} < 1.5$

D.  $1.5 < a_{2022} < 2$

答案: B

【解析】

分析:

利用  $\ln x \leq x-1$  可得  $a_n < 1$ , 且数列  $\{a_n\}$  是单调递增数列, 得出  $0 < a_n < 1$ , 利用导数可得

$g(x) = x + \ln(2-x), 0 < x < 1$  在  $(0,1)$  单调递增, 即可得出当  $n > 1$  时,  $\ln 2 < a_n < 1$ , 即可求解.

**【详解】**

令  $f(x) = \ln x - x + 1, x > 0$ , 则  $f'(x) = \frac{1-x}{x}$ ,

由  $f'(x) > 0$  得  $0 < x < 1$ , 由  $f'(x) < 0$  得  $x > 1$ ,

所以  $f(x)$  在  $(0,1)$  单调递增, 在  $(1, +\infty)$  单调递减, 所以  $f(x) \leq f(1) = 0$ ,

所以  $\ln x \leq x - 1$ ,

所以  $a_{n+1} = a_n + \ln(2 - a_n) \leq a_n + (2 - a_n - 1) = 1$ , 当且仅当  $a_n = 1$  时等号成立, 与已知矛盾, 所以  $a_n < 1$ ,

则  $a_{n+1} - a_n = \ln(2 - a_n) > \ln 1 = 0$ , 所以数列  $\{a_n\}$  是单调递增数列, 所以  $0 < a_n < 1$ ,

令  $g(x) = x + \ln(2-x), 0 < x < 1$ , 则  $g'(x) = 1 + \frac{1}{2-x} > 0$ ,

所以  $g(x)$  在  $(0,1)$  单调递增, 则  $a_2 = g(a_1) > g(0) = \ln 2$ ,

所以当  $n > 1$  时,  $\ln 2 < a_n < 1$ , 因为  $\ln 2 > 0.5$ , 所以  $0.5 < a_n < 1$ , 所以  $0.5 < a_{2022} < 1$ .

故选: B.

例 3. (2023·浙江绍兴·模拟预测) 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = \frac{3\pi}{4}$ ,  $a_{n+1} + \cos a_n - \frac{\pi}{2} = 0$ , 则下列

说法正确的是 ( )

A.  $a_{n+1} - a_n \leq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}$

B.  $a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n^2 \geq \frac{\pi}{2} - 1$

C.  $a_{n+1} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}a_n \leq \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}$

D.  $a_{n+1} - \frac{2}{\pi}a_n \geq \frac{\pi}{2} - 1$

答案: D

**【解析】**

分析:

将已知等式化为  $a_{n+1} - \frac{\pi}{2} = \sin\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right)$ , 根据  $f(x) = x - \sin x$  的单调性和  $f(0) = 0$ , 可得

$|x| \geq |\sin x|$ , 由此可化简得到  $\frac{\pi}{4} \leq a_n \leq \frac{3\pi}{4}$ ; 分别构造函数  $g_1(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x - x$ ,

$g_2(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x - \frac{1}{2}x^2$ ,  $g_3(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x$  和  $g_4(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x - \frac{2}{\pi}x$ , 利用导数可求

得各个函数在  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$  上的单调性, 进而根据单调性得到最值, 从而判断出各个选项的正误.

【详解】

$$\text{Q } a_{n+1} + \cos a_n - \frac{\pi}{2} = 0, \therefore a_{n+1} - \frac{\pi}{2} = -\cos a_n = \sin\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right),$$

令  $f(x) = x - \sin x$ , 则  $f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$ ,

$\therefore f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增, 又  $f(0) = 0$ ,  $\therefore |x| \geq |\sin x|$ ,

$$\therefore \left|a_{n+1} - \frac{\pi}{2}\right| = \left|\sin\left(a_n - \frac{\pi}{2}\right)\right| \leq \left|a_n - \frac{\pi}{2}\right|,$$

$$\therefore \left|a_2 - \frac{\pi}{2}\right| \leq \left|a_1 - \frac{\pi}{2}\right|, \left|a_3 - \frac{\pi}{2}\right| \leq \left|a_2 - \frac{\pi}{2}\right|, \dots, \left|a_n - \frac{\pi}{2}\right| \leq \left|a_{n-1} - \frac{\pi}{2}\right|,$$

$$\therefore \left|a_n - \frac{\pi}{2}\right| \leq \left|a_1 - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{\pi}{4}, \text{ 解得: } \frac{\pi}{4} \leq a_n \leq \frac{3\pi}{4};$$

对于 A,  $a_{n+1} - a_n = \frac{\pi}{2} - \cos a_n - a_n$ ,

令  $g_1(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x - x$ , 则  $g_1'(x) = \sin x - 1 \leq 0$ ,  $\therefore g_1(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减,

$$\text{Q } \frac{\pi}{4} \leq a_n \leq \frac{3\pi}{4}, \therefore g_1(a_n) \geq g_1\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{4}, \text{ A 错误;}$$

对于 B,  $a_{n+1} - \frac{1}{2}a_n^2 = \frac{\pi}{2} - \cos a_n - \frac{1}{2}a_n^2$ ,

令  $g_2(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x - \frac{1}{2}x^2$ , 则  $g_2'(x) = \sin x - x$ ,

令  $h(x) = g_2'(x)$ , 则  $h'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ ,

$\therefore g_2'(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递减, 又  $g_2'(0) = 0$ ,

$\therefore$  当  $x \in (-\infty, 0)$  时,  $g_2'(x) > 0$ ; 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $g_2'(x) < 0$ ;

$\therefore g_2(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递增, 在  $(0, +\infty)$  上单调递减,

$$\text{Q } \frac{\pi}{4} \leq a_n \leq \frac{3\pi}{4}, \therefore g_2(a_n) \leq g_2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi^2}{32} < \frac{\pi}{2} - 1, \text{ B 错误;}$$

对于 C,  $a_{n+1} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}a_n = \frac{\pi}{2} - \cos a_n - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}a_n$ ,

令  $g_3(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}x$ , 则  $g_3'(x) = \sin x - \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ ,

令  $m(x) = g_3'(x)$ , 则  $m'(x) = \cos x$ ,

当  $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  时,  $m'(x) > 0$ ; 当  $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$  时,  $m'(x) < 0$ ;

$\therefore g_3'(x)$  在  $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$  上单调递增, 在  $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$  上单调递减,

$$\text{又 } g_3'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} > 0, \quad g_3'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} < 0, \quad g_3'\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} < 0,$$

$$\therefore \exists x_1 \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \exists x_2 \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \quad \text{使得 } g_3'(x_1) = g_3'(x_2) = 0,$$

$$\therefore g_3(x) \text{ 在 } \left[\frac{\pi}{4}, x_1\right), \left(x_2, \frac{3\pi}{4}\right] \text{ 上单调递增, 在 } (x_1, x_2) \text{ 上单调递减,}$$

$$\therefore g_3(x_1) > g_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}, \quad \mathbf{Q} \frac{\pi}{4} \leq a_n \leq \frac{3\pi}{4}, \quad \therefore \exists a_n \in \left(x_1, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 使得 } g_3(a_n) > \frac{\pi}{2} - \sqrt{2}, \text{ C 错误}$$

$$\text{对于 D, } a_{n+1} - \frac{2}{\pi}a_n = \frac{\pi}{2} - \cos a_n - \frac{2}{\pi}a_n,$$

$$\text{令 } g_4(x) = \frac{\pi}{2} - \cos x - \frac{2}{\pi}x, \quad \text{则 } g_4'(x) = \sin x - \frac{2}{\pi},$$

$$\text{当 } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \text{ 时, } \sin x \in \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right], \quad \therefore \sin x - \frac{2}{\pi} > 0, \quad \text{即 } g_4'(x) > 0,$$

$$\therefore g_4(x) \text{ 在 } \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right] \text{ 上单调递增,}$$

$$\mathbf{Q} \frac{\pi}{4} \leq a_n \leq \frac{3\pi}{4}, \quad \therefore g_4(a_n) \geq g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2} > \frac{\pi}{2} - 1, \quad \text{D 正确.}$$

故选：D.

【点睛】

关键点点睛：本题考查利用导数求解函数最值的问题，解题关键是能够根据  $|x| \geq |\sin x|$  的特点，构造不等式求得  $a_n$  的取值范围，进而可以通过构造函数的方式，将问题转化为函数最值的求解问题，从而利用导数来进行求解。

例 4. (2023·浙江·慈溪中学模拟预测) 已知数列  $\{a_n\}$  满足：  $a_1 = -\frac{1}{2}$ ，且

$$a_{n+1} = \ln(a_n + 1) - \sin a_n, \quad \text{则下列关于数列 } \{a_n\} \text{ 的叙述正确的是 ( )}$$

$$\text{A. } a_n > a_{n+1} \quad \text{B. } -\frac{1}{2} \leq a_n < -\frac{1}{4} \quad \text{C. } a_{n+1} > -\frac{a_n^2}{a_n + 2} \quad \text{D. } a_n \leq -\frac{2}{4^{2n-1}}$$

答案：D

【解析】

分析：

构造函数  $f(x) = \ln(x+1) - \sin x$  ( $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ )，由导数确定其单调性，从而利用数学归纳法

证明  $-\frac{1}{2} \leq a_n < 0$ ，然后构造函数  $g(x) = f(x) - x = \ln(x+1) - \sin x - x$  ( $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ )，利用导

数证明  $g(x) > 0$ ，得  $f(x) > x$ ，利用此不等式可直接判断 A，对选项 B，由数列  $\{a_n\}$

的单调性与有界性知其极限存在, 设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , 对数列的递推关系求极值可得  $A = 0$ , 从而判断 B, 对选项 C, 引入函数设  $p(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} (-1 < x < 0)$ , 由导数证明  $p(x) < 0$ , 得  $\ln(x+1) < \frac{2x}{x+2} (-1 < x < 0)$ , 从而利用不等式性质得出数列  $\{a_n\}$  的不等关系, 判断 C, 利用判断选项 C 所得正确不等式变形, 并换元引入新数列  $b_n = -\frac{1}{a_n}$ , 得  $\{b_n\}$  前后项关系 (求对数再变化), 类比等比数列的通项公式的方法得出结论后判断 D.

**【详解】**

首先我们证明:  $-\frac{1}{2} \leq a_n < 0$ , 利用数学归纳法.

事实上, 当  $n=1$  时,  $-\frac{1}{2} \leq a_1 < 0$ ;

假设当  $n=k$  时,  $-\frac{1}{2} \leq a_k < 0$ , 则当  $n=k+1$  时,  $a_{k+1} = \ln(a_k+1) - \sin a_k$ .

设函数  $f(x) = \ln(x+1) - \sin x$  ( $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ ), 则  $f'(x) = \frac{1}{x+1} - \cos x > 0$ , 则  $f(x)$  在  $[-\frac{1}{2}, 0)$

上单调递增,

从而  $-\frac{1}{2} \leq \ln \frac{1}{2} + \sin \frac{1}{2} = f\left(-\frac{1}{2}\right) \leq a_{k+1} = f(a_k) < f(0) = 0$ .

当  $-\frac{1}{2} \leq x < 0$  时, 设  $g(x) = f(x) - x = \ln(x+1) - \sin x - x$  ( $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ ),

则  $g'(x) = \frac{1}{x+1} - \cos x - 1$ , 设  $h(x) = g'(x) = \frac{1}{x+1} - \cos x - 1$ ,

$h'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \sin x < 0$ , 则  $g'(x)$  在  $[-\frac{1}{2}, 0)$  上单调递减, 又  $g'\left(-\frac{1}{2}\right) > 0, g'(0) < 0$ ,

所以存在  $x_0 \in (-\frac{1}{2}, 0)$ , 使得  $g'(x_0) = 0$ ,  $-\frac{1}{2} < x < x_0$  时,  $g'(x) > 0$ ,  $x_0 < x < 0$  时,  $g'(x) < 0$ ,

故  $g(x)$  在  $[-\frac{1}{2}, 0)$  上先增后减, 从而  $g(x) > \min\left\{g(0), g\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = 0$ , 从而  $f(x) > x$ .

对于 A 选项: 由于  $-\frac{1}{2} \leq a_n < 0$ ,  $a_{n+1} = \ln(a_n+1) - \sin a_n > a_n$ , 故数列  $\{a_n\}$  单调递增, 选项 A 错误.

对于 B 选项, 由于  $\{a_n\}$  单调递增且  $-\frac{1}{2} \leq a_n < 0$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  存在, 由

$a_{n+1} = \ln(a_n+1) - \sin a_n > a_n$  可得  $A = \ln(A+1) - \sin A$ , 故  $A = 0$ , 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . 故选项 B 错误.

对于 C 选项, 由于  $-1 < x < 0$  时,

设  $p(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2}$  ( $-1 < x < 0$ ),  $p'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(x+2)^2} = \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$ ,

所以  $p(x)$  是增函数,  $p(x) < p(0) = 0$ , 所以  $\ln(x+1) < \frac{2x}{x+2}$  ( $-1 < x < 0$ ),

$0 < x < 1$  时,  $x > \sin x$ , 因此有  $\sin x > x$  ( $1 < x < 0$ ),

从而  $f(x) = \ln(x+1) - \sin x < \frac{2x}{x+2} - x = \frac{-x^2}{x+2}$ , 故  $a_{n+1} = \ln(a_n+1) - \sin a_n < \frac{-a_n^2}{a_n+2}$ , 故选项 C

错误.

对于 D 选项, 由于  $a_{n+1} < \frac{-a_n^2}{a_n+2} < 0$ , 即  $0 > \frac{1}{a_{n+1}} > -\frac{1}{a_n} - \frac{2}{a_n^2}$ , 令  $b_n = -\frac{1}{a_n}$ , 则

$-b_{n+1} > b_n - 2b_n^2$ , 即  $b_{n+1} < 2b_n^2 - b_n < 2b_n^2 - b_n + \frac{1}{8} = 2\left(b_n - \frac{1}{4}\right)^2$ , 其中  $2 \leq b_n < b_{n+1}$ , 故

$\ln b_{n+1} < \ln 2 + 2 \ln\left(b_n - \frac{1}{4}\right) < \ln 2 + 2 \ln b_n$ , 从而  $\ln b_{n+1} + \ln 2 < 2(\ln b_n + \ln 2)$ , 即

$\ln b_n + \ln 2 < 2^{n-1}(\ln b_1 + \ln 2)$ ,  $2b_n < 4^{2^{n-1}}$ , 即  $-\frac{2}{a_n} < 4^{2^{n-1}}$ , 故  $a_n < -\frac{2}{4^{2^{n-1}}}$ . 从而选项 D 正

确.

故选: D.

### 【点睛】

难点点睛: 本题考查数列的性质, 难度很大, 解题难点在于有关数列的不等关系, 一是用数学归纳法进行证明, 二是需引入函数, 利用导数研究函数的单调性, 从而得出数列的不等关系, 考查了学生的逻辑能力, 运算求解能力, 属于困难题.

例 5. (2023·辽宁·二模) 已知等差数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 满足

$\sin(a_3 - 1) + 2a_3 - 5 = 0, \sin(a_9 - 1) + 2a_9 + 1 = 0$ , 则下列结论正确的是 ( )

A.  $S_{11} = 11, a_3 < a_9$

B.  $S_{11} = 11, a_3 > a_9$

C.  $S_{11} = 22, a_3 < a_9$

D.  $S_{11} = 22, a_3 > a_9$

答案: B

### 【解析】

分析:

把已知等式变形为  $\sin(a_3 - 1) + 2(a_3 - 1) - 3 = 0, \sin(1 - a_9) + 2(1 - a_9) - 3 = 0$ , 构造函数

$f(x) = \sin x + 2x - 3$ , 可知  $a_3 - 1$  和  $1 - a_9$  是函数  $f(x)$  的零点, 故利用导数研究其  $f(x)$  单调性并研究其零点, 结合函数零点存在性定理求得  $a_3, a_9$  的关系, 再利用等差数列的性质与求和公式即可求解.

### 【详解】

$$Q \sin(a_3 - 1) + 2a_3 - 5 = 0, \sin(a_9 - 1) + 2a_9 + 1 = 0$$

$$\therefore \sin(a_3 - 1) + 2(a_3 - 1) - 3 = 0, \sin(1 - a_9) + 2(1 - a_9) - 3 = 0$$

令  $f(x) = \sin x + 2x - 3$ ，即  $a_3 - 1$  和  $1 - a_9$  是函数  $f(x)$  的零点

$\because f'(x) = \cos x + 2 > 0$ ，故  $f(x)$  最多有一个零点

$$\therefore a_3 - 1 = 1 - a_9, \therefore a_3 + a_9 = 2$$

$$\therefore S_{11} = \frac{11(a_1 + a_{11})}{2} = \frac{11(a_3 + a_9)}{2} = 11$$

$$\text{又} \because f(1) = \sin 1 - 1 < 0, f(2) = \sin 2 + 1 > 0,$$

$$\therefore 1 < a_3 - 1 = 1 - a_9 < 2,$$

$$\therefore 2 < a_3 < 3, -1 < a_9 < 0, \therefore a_3 > a_9.$$

故选：B

例 6. (2023·上海·高三专题练习) 若等差数列  $\{a_n\}$  的公差  $d < 0$ ，令函数

$f_i(x) = |x - a_i| + a_i, g(x) = \min\{f_1(x), \dots, f_n(x)\}$ ，(其中  $i = 1, 2, \dots, n$ )，则下列四个结论中：①

$g(x) = f_n(x)$ ；②  $g(x+d) = g(x) + d$ ；③  $f_n(x+d) = f_{n-1}(x) + d$ ；④  $g_{\max}(x) = a_1$ ；⑤

$g_{\min}(x) = a_n$ ；错误的序号是\_\_\_\_\_.

答案：②④

【解析】

分析：

不妨取  $a_1 = -1, d = -1$ ，则  $f_i(x) = |x + i| - i$  过原点，且  $y = f_n(x)$  在最下方，根据性质逐项判定，即可求解，得到答案.

【详解】

不妨取  $a_1 = -1, d = -1$ ，则  $f_i(x) = |x + i| - i$  过原点，且  $y = f_n(x)$  在最下方，

可得①中，函数  $g(x) = f_n(x)$  是正确的；

$$\text{②中，} g(x+d) = f_n(x-1) = |x-1+n| - n, g(x) + d = |x+n| - n - 1,$$

所以  $g(x+d) \neq g(x) + d$ ，所以不正确；

$$\text{③中，} f_n(x+d) = f(x-1) = |x-1+n| - n, f_{n-1}(x) + d = |x+n-1| - (n-1) - 1 = |x-1+n| - n,$$

所以  $f_n(x+d) = f_{n-1}(x) + d$ ，所以是正确的；

④中，由  $g(x) = f_n(x) = |x+n| - n$ ，函数  $g(x)$  无最大值，所以  $g_{\max}(x) = a_1$  不正确；

⑤中，函数  $f_n(x) = |x+n| - n$ ，所以当  $x = -n$  时，函数  $f_n(x)$  取得最小值  $-n = a_n$ ，

即函数  $g_{\min}(x) = a_n$ ，所以是正确的.

故答案为：②④.

### 【点睛】

本题主要考查了等差数列的性质，以及函数的基本性质的应用，其中解答中认真审题，合理利用题设条件，构造新函数，逐项判定是解答的关键，着重考查了分析问题和解决问题的能力，属于中档试题.

### 【方法技巧与总结】

利用函数与数列知识的相互联系、相似性质：

- (1) 抽象函数的关系与数列递推关系式类似.
- (2) 函数单调性与数列单调性的相似性.
- (3) 数列与不等式的综合可以利用数列的形式构造辅助函数，利用函数的性质证明不等式，因此解决数列问题可转化为函数问题，用函数的知识或方法解决.

### 题型二：函数与不等式的综合

例 7. (2023·全国·模拟预测) 已知函数  $f(x)$  是定义域为  $\mathbf{R}$  的函数， $f(2+x)+f(-x)=0$ ，对任意  $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$  ( $x_1 < x_2$ )，均有  $f(x_2)-f(x_1) > 0$ ，已知  $a, b (a \neq b)$  为关于  $x$  的方程  $x^2 - 2x + t^2 - 3 = 0$  的两个解，则关于  $t$  的不等式  $f(a)+f(b)+f(t) > 0$  的解集为 ( )

A.  $(-2, 2)$       B.  $(-2, 0)$       C.  $(0, 1)$       D.  $(1, 2)$

答案：D

### 【解析】

分析：

由题可得函数  $f(x)$  关于点  $(1, 0)$  对称，函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增，进而可得  $f(t) > 0 = f(1)$ ，利用函数的单调性即得.

### 【详解】

由  $f(2+x)+f(-x)=0$ ，得  $f(1)=0$  且函数  $f(x)$  关于点  $(1, 0)$  对称.

由对任意  $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$  ( $x_1 < x_2$ )，均有  $f(x_2)-f(x_1) > 0$ ，

可知函数  $f(x)$  在  $[1, +\infty)$  上单调递增.

又因为函数  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}$ ，

所以函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增.

因为  $a, b (a \neq b)$  为关于  $x$  的方程  $x^2 - 2x + t^2 - 3 = 0$  的两个解，

所以  $\Delta = 4 - 4(t^2 - 3) > 0$ ，解得  $-2 < t < 2$ ，

且  $a + b = 2$ ，即  $b = 2 - a$  .

又  $f(2+x)+f(-x)=0$ ，

令  $x = -a$ ，则  $f(a)+f(b)=0$ ，

则由  $f(a)+f(b)+f(t)>0$ ，得  $f(t)>0=f(1)$ ，

所以  $t>1$ 。

综上， $t$  的取值范围是  $(1,2)$ 。

故选：D。

例 8. (2023·海南·模拟预测) 已知函数  $f(x)=\begin{cases} |\ln(x-1)|, 1 < x \leq 3 \\ 2|x|-2, x \leq 1 \end{cases}$ ，若关于  $x$  的不等式

$x+m < f(x) < x+m+1$  有且仅有两个整数解，则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_。

答案：  $[-3+\ln 2, -2)$

【解析】

分析：

令  $g(x)=f(x)-x$ ，讨论  $g(x)$  的单调性，分析画出函数的图象，由  $m < f(x)-x < m+1$  可知  $-3+\ln 2 \leq m < -2$ 。

【详解】

关于  $x$  的不等式  $x+m < f(x) < x+m+1$  有且仅有两个整数解，转化为  $m < f(x)-x < m+1$  有

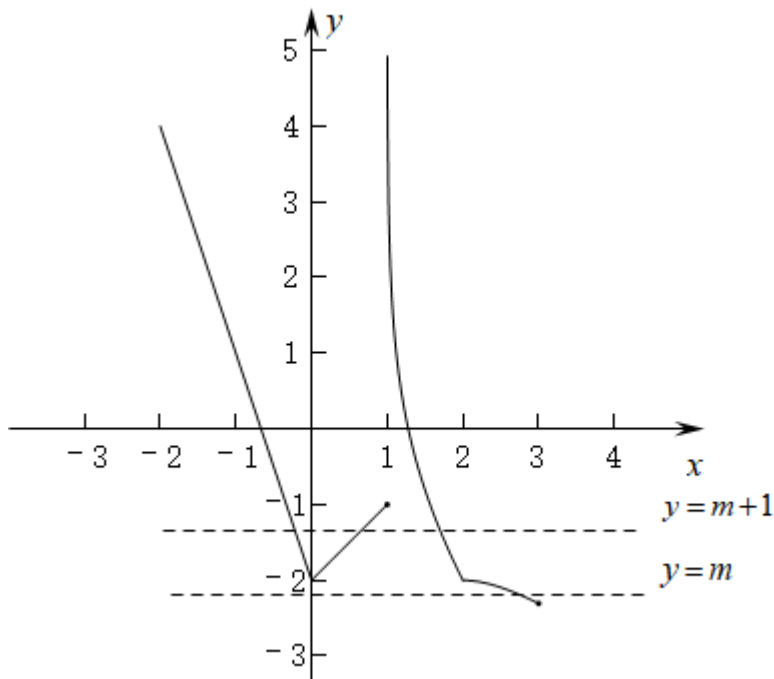
且仅有两个整数解，令  $g(x)=f(x)-x=\begin{cases} -3x-2, x \leq 0 \\ x-2, 0 < x \leq 1 \\ -\ln(x-1)-x, 1 < x \leq 2 \\ \ln(x-1)-x, 2 < x \leq 3 \end{cases}$ ，

当  $2 < x \leq 3$ ， $g(x)=\ln(x-1)-x$ ， $g'(x)=\frac{1}{x-1}-1=\frac{1-x+1}{x-1}=\frac{2-x}{x-1} < 0$ ，所以  $g(x)$  在  $(2,3]$

上单调递减，同理已知  $g(x)$  在  $(-\infty,0]$ ， $(1,2]$  上单调递减，在  $(0,1]$  上单调递增，且

$g(0)=-2, g(1)=-1, g(2)=-2, g(3)=\ln 2-3$ ， $g(x)$  的图象如下图，而  $y=m, y=m+1$  的距离为 1，即在  $y=m, y=m+1$  之间有且仅有两个整数解，所以  $-3+\ln 2 \leq m < -2$ ，则  $m$  的取值范围是：  $[-3+\ln 2, -2)$ 。

故答案为：  $[-3+\ln 2, -2)$ 。



例 9. (2023·全国·高三专题练习) 不等式  $(x^2 - 1)^{1011} + x^{2002} + 2x^2 - 1 \leq 0$  的解集为:

\_\_\_\_\_.

答案:  $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

【解析】

分析:

将不等式化为  $(x^2)^{1011} + x^2 \leq (1 - x^2)^{1011} + 1 - x^2$ , 构造  $f(x) = x^{1011} + x$  根据其单调性可得

$x^2 \leq 1 - x^2$ , 求解即可.

【详解】

不等式变形为  $(x^2 - 1)^{1011} + x^2 - 1 + (x^2)^{1011} + x^2 \leq 0$ ,

所以  $(x^2)^{1011} + x^2 \leq (1 - x^2)^{1011} + 1 - x^2$ ,

令  $f(x) = x^{1011} + x$ , 则有  $f(x^2) \leq f(1 - x^2)$ , 显然  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上单调递增,

则  $x^2 \leq 1 - x^2$ , 可得  $x^2 \leq \frac{1}{2}$ , 解得  $-\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

故不等式的解集为  $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ .

故答案为:  $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

例 10. (2023·四川遂宁·三模(文)) 德国大数学家高斯年少成名, 被誉为数学届的王子, 19 岁的高斯得到了一个数学史上非常重要的结论, 就是《正十七边形尺规作图之理论与方法》, 在其年幼时, 对  $1+2+3+\dots+100$  的求和运算中, 提出了倒序相加法的原理, 该原理基于所给数据前后对应项的和呈现一定的规律生成, 因此, 此方法也称之为高斯算法, 现有函数  $f(x) = \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}}$ , 设数列  $\{a_n\}$  满足  $a_n = f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \dots + f(\frac{n-1}{n}) + f(1) (n \in \mathbf{N}^*)$ , 若存在  $n \in \mathbf{N}^*$  使不等式  $n^2 + 4n - 2ka_n + 27 \leq 0$  成立, 则  $k$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

答案:  $[\frac{49}{5}, +\infty)$

【解析】

分析:

根据题意先求  $f(x) + f(1-x)$ , 然后利用倒序相加法求  $a_n$ , 则由  $n^2 + 4n - 2ka_n + 27 \leq 0$  可得

$$k \geq \frac{n^2 + 4n + 27}{n+1} = \frac{(n+1)^2 + 2(n+1) + 24}{n+1} = (n+1) + \frac{24}{n+1} + 2, \text{ 求出 } (n+1) + \frac{24}{n+1} + 2 \text{ 的最小值即可}$$

求得  $k$  的取值范围

【详解】

因为  $f(x) = \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}}$ ,

$$\text{所以 } f(x) + f(1-x) = \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}} + \frac{2^{1-x}}{2^{1-x} + \sqrt{2}} = \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}} + \frac{2}{2 + \sqrt{2} \cdot 2^x} = \frac{2^x}{2^x + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2^x + \sqrt{2}} = 1,$$

$$\text{由 } a_n = f(0) + f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + \dots + f(\frac{n-1}{n}) + f(1) (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$a_n = f(1) + f(\frac{n-1}{n}) + f(\frac{n-2}{n}) + \dots + f(\frac{1}{n}) + f(0),$$

$$\text{所以 } 2a_n = n+1, \text{ 所以 } a_n = \frac{n+1}{2},$$

$$\text{所以由 } n^2 + 4n - 2ka_n + 27 \leq 0, \text{ 得 } n^2 + 4n - 2k \cdot \frac{n+1}{2} + 27 \leq 0,$$

$$n^2 + 4n - k(n+1) + 27 \leq 0,$$

$$n^2 + 4n + 27 \leq k(n+1),$$

$$\text{所以 } k \geq \frac{n^2 + 4n + 27}{n+1} = \frac{(n+1)^2 + 2(n+1) + 24}{n+1} = (n+1) + \frac{24}{n+1} + 2,$$

$$\text{令 } g(x) = (x+1) + \frac{24}{x+1}, (x \in \mathbf{N}^*) \text{ 则当 } 0 < x < 2\sqrt{6} - 1, g(x) \text{ 递减, 当 } x > 2\sqrt{6} - 1 \text{ 时, } g(x)$$

递增,

$$\text{因为 } g(4) = 5 + \frac{24}{5} = \frac{49}{5}, g(3) = 4 + \frac{24}{4} = 10,$$

所以  $g(x)_{\min} = g(4) = \frac{49}{5}$ ,

所以  $k \geq \frac{49}{5} + 2 = \frac{59}{5}$ ,

即  $k$  的取值范围是  $\left[\frac{49}{5}, +\infty\right)$ ,

故答案为:  $\left[\frac{49}{5}, +\infty\right)$

### 【方法技巧与总结】

不等式问题转化为函数问题是静态转化为动态, 常量转化为变量, 这体现了函数思想, 并能用函数的图像及性质解答.

### 题型三: 函数中的创新题

例 11. (2023·全国·高三专题练习) 定义两个函数的关系: 函数  $m(x), n(x)$  的定义域分别为  $A, B$ , 若对任意的  $x_1 \in A$ , 总存在  $x_2 \in B$ , 使得  $m(x_1) = n(x_2)$ , 我们就称函数  $m(x)$  为  $n(x)$  的“子函数”. 已知函数  $f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{3}{4} \ln \frac{x}{3}$ ,  $g(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 3$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若  $f(x)$  为  $g(x)$  的一个“子函数”, 求  $a^2 + b^2$  的最小值.

答案: (1) 单调递减区间为  $(0, 3)$ , 单调递增区间为  $(3, +\infty)$ , (2)  $\frac{4}{5}$ .

### 【解析】

分析:

(1) 求导, 令  $f'(x) > 0$ , 可得  $f(x)$  的单调递增区间; 令  $f'(x) < 0$ , 可得  $f(x)$  的单调递减区间;

(2) 根据  $f(x)$  的单调性求出  $f(x)$  的取值范围, 进而得到  $g(x)_{\min} < 2$ , 即  $g(x) = 2$  有实数解,

从而得到  $x^2 + ax + b + a\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ , 令  $t = x + \frac{1}{x} \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ , 可得  $t^2 + at + b - 2 = 0$ ,

令  $u = \sqrt{a^2 + b^2}$ , 则  $u_{\min} = \frac{t^2 - 2}{\sqrt{t^2 + 1}}$ ,  $t^2 \geq 4$ , 利用换元法和函数的单调性即可得出结果.

### 【详解】

(1)  $f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{3}{4} \ln \frac{x}{3}$ , 函数  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,

$$f'(x) = -\frac{3}{4x} + \frac{1}{2\sqrt{1+x}} = \frac{(\sqrt{1+x}-2)(2\sqrt{1+x}+1)}{4x\sqrt{1+x}},$$

令  $f'(x) > 0$ , 即  $\sqrt{1+x} - 2 > 0$ , 解得  $x > 3$ ,

所以函数  $f(x)$  的单调递增区间为  $(3, +\infty)$ ;

令  $f'(x) < 0$ ，即  $\sqrt{1+x} - 2 < 0$ ，解得  $0 < x < 3$ ，

所以函数  $f(x)$  的单调递减区间为  $(0, 3)$ ，

综上，函数  $f(x)$  的单调递减区间为  $(0, 3)$ ，单调递增区间为  $(3, +\infty)$ 。

(2) 由 (1) 知，当  $x = 3$  时，函数  $f(x)$  取得极小值，即最小值，

所以  $f(x) \in [2, +\infty)$ ，

当  $x \rightarrow +\infty$  时， $g(x) \rightarrow +\infty$ ，

且  $g(x)$  为连续函数，只需  $g(x)_{\min} < 2$ ，

即  $g(x) = 2$  有实数解，

即  $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ ，因为  $x \neq 0$ ，

则  $x^2 + ax + b + a\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$ ，

令  $t = x + \frac{1}{x} \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ ，

即  $t^2 + at + b - 2 = 0$  在区间  $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$  上有实数解，

将  $(a, b)$  看成直线  $ta + b + t^2 - 2 = 0$  上的点，

令  $u = \sqrt{a^2 + b^2}$ ，则  $u_{\min} = \frac{t^2 - 2}{\sqrt{t^2 + 1}}$ ， $t^2 \geq 4$ ，

令  $s = \sqrt{t^2 + 1} \geq \sqrt{5}$ ，则  $u_{\min} = s - \frac{3}{s} \geq \frac{2}{\sqrt{5}}$ ，

所以  $a^2 + b^2$  的最小值为  $\frac{4}{5}$ 。

### 【点睛】

本题考查了利用导数研究函数的单调性、极值、最值，不等式的解法，考查了换元法和等价转化法的应用，考查学生的推理能力与计算能力，属于难题。

例 12. (2023·上海·高三专题练习) 若存在常数  $k (k > 0)$ ，使得对定义域  $D$  内的任意

$x_1, x_2 (x_1 \neq x_2)$ ，都有  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$  成立，则称函数  $f(x)$  在其定义域  $D$  上是“ $k$ -利普希兹条件函数”。

(1) 若函数  $f(x) = \sqrt{x} (1 \leq x \leq 4)$  是“ $k$ -利普希兹条件函数”，求常数  $k$  的最小值；

(2) 判断函数  $f(x) = \log_2 x$  是否是“2-利普希兹条件函数”，若是，请证明，若不是，请说明理由；

(3) 若  $y = f(x) (x \in \mathbb{R})$  是周期为 2 的“1-利普希兹条件函数”，证明：对任意的实数  $x_1, x_2$ ，都有  $|f(x_1) - f(x_2)| \leq 1$ 。

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。  
如要下载或阅读全文，请访问：

<https://d.book118.com/247034162051006113>