# 河北省石家庄市2023-2024学年高一下学期期末教学质量检测

# 数学试卷

学校:___________姓名：___________班级：___________考号：___________

## 一、单选题

1．已知 i 是虚数单位，复数 $z=\frac{2}{1-\mathrm{i}}$，则 $z$ 的虚部为（　）

A．$-1$　　B．1　　C．$-\mathrm{i}$　　D．i

2．若 $D$ 为 $\triangle ABC$ 的边 $BC$ 的中点，则 $\overrightarrow{AC}=$（　）

A．$2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$　　B．$2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$

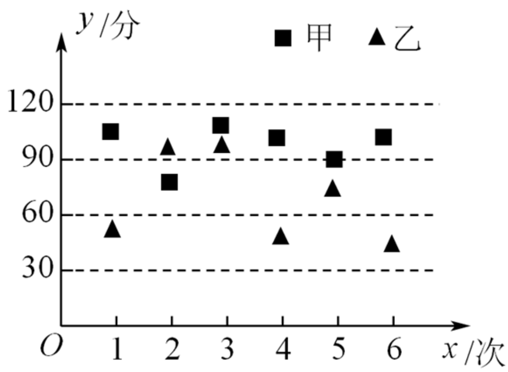
C．$2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$　　D．$2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

3．已知 $\alpha$，$\beta$ 为两个不同平面，$m$，$n$ 为不同的直线，下列命题不正确的是（　）

A．若 $m\parallel n, m\perp\alpha$，则 $n\perp\alpha$　　B．若 $m\perp\alpha, m\perp\beta$，则 $\alpha\parallel\beta$

C．若 $m\perp\alpha,\alpha\perp\beta$，则 $m\parallel\beta$　　D．若 $m\perp\alpha, m\subset\beta$，则 $\alpha\perp\beta$

4．已知甲、乙两名同学在高三的 6 次数学测试的成绩统计如图（图标中心点所对纵坐标代表该次数学测试成绩），则下列说法不正确的是（　）



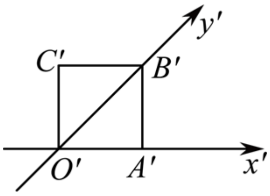

A．甲成绩的极差小于乙成绩的极差

B．甲成绩的第 25 百分位数大于乙成绩的第 75 百分位数

C．甲成绩的平均数大于乙成绩的平均数

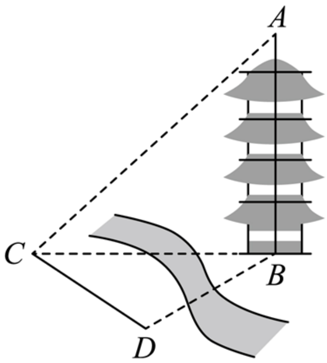
D．甲成绩的方差小于乙成绩的方差

5．正方形 $O'A'B'C'$ 的边长为 $1\mathrm{cm}$，它是水平放置的一个平面图形的直观图，则原图形的周长是（　）



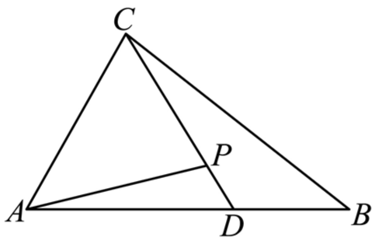

A．8cm　　　B．6cm　　　C．$\left(2+3\sqrt{2}\right)$cm　　　D．$\left(2+2\sqrt{3}\right)$cm

6．如图所示，为测量河对岸的塔高 $AB$，选取了与塔底 $B$ 在同一水平面内的两个测量基点 $C$ 与 $D$，现测得 $\tan\angle ACB=\frac{3}{4}, CD=50\text{m}$，$\cos\angle BCD=\frac{\sqrt{5}}{5}, \cos\angle BDC=\frac{3}{5}$，则塔高 $AB$ 为（　）



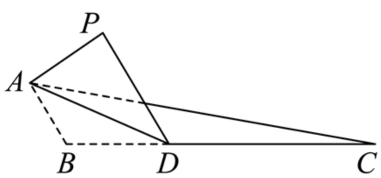

A．$15\sqrt{3}$m　　　B．$20\sqrt{3}$m　　　C．$15\sqrt{5}$m　　　D．$20\sqrt{5}$m

7．如图，在 $\Delta ABC$ 中，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{DB}$，$P$ 为 $CD$ 上一点，且满足 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，若 $\Delta ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，则 $\left|\overrightarrow{AP}\right|$ 的最小值为




A．$\sqrt{2}$　　　B．$\frac{4}{3}$　　　C．3　　　D．$\sqrt{3}$

8．如图，已知在 $\triangle ABC$ 中，$AB=1, BC=3, AB\perp BC$，$D$ 是 $BC$ 边上一点，且 $BD=1$，将 $\triangle ABD$ 沿 $AD$ 进行翻折，使得点 $B$ 与点 $P$ 重合，若点 $P$ 在平面 $ADC$ 上的射影在 $\triangle ADC$ 内部及边界上，则在翻折过程中，动点 $P$ 的轨迹长度为（　）



A．$\frac{\sqrt{2}}{12}\pi$　　B．$\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$　　C．$\frac{\sqrt{2}}{6}\pi$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{4}\pi$

## 二、多选题

9．已知复数$z=2-3i$，其中$i$是虚数单位，则下列结论正确的是（　　）

A．$z$的模等于13　　B．$z$在复平面内对应的点位于第四象限

C．$z$的共轭复数为$-2-3i$　　D．若$z(m+4i)$是纯虚数，则$m=-6$

10．$\triangle ABC$中，内角A，$B$，$C$的对边分别为$a$，$b$，$c$，S为$\triangle ABC$的面积，且$a=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\sqrt{3}S$，下列选项正确的是（　　）

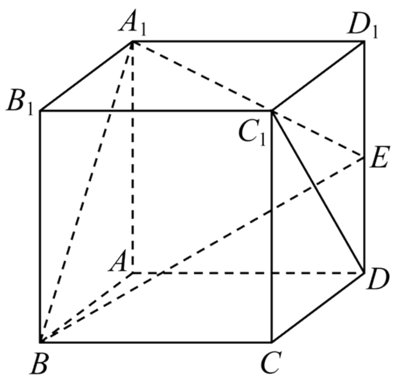
A．$A=\frac{\pi}{3}$

B．若$b=3$，则$\triangle ABC$有两解

C．若$\triangle ABC$为锐角三角形，则$b$取值范围是$\left(2\sqrt{3},4\right)$

D．若$D$为$BC$边上的中点，则$AD$的最大值为$2+\sqrt{3}$

11．如图，棱长为2的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，$E$为棱$DD_1$的中点，$F$为正方形$C_1CDD_1$内一个动点（包括边界），且$B_1F//$平面$A_1BE$，则下列说法正确的有（　　）




A．动点$F$轨迹的长度为$\sqrt{2}$

B．三棱锥$B_1-D_1EF$体积的最小值为$\frac{1}{3}$

C．$B_1F$与$A_1B$不可能垂直

D．当三棱锥$B_1-D_1DF$的体积最大时，其外接球的表面积为$\frac{25}{2}\pi$

## 三、填空题

12．在菱形 $OABC$ 中、$O$ 为坐标原点、$A(3,-1),C(1,3)$、则 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的值为_________.

13．从长度为 2、3、5、7、11 的 5 条线段中任取 3 条，这三条线段能构成一个三角形的概率为_________.

14．刻画空间弯曲性是几何研究的重要内容，用“曲率”刻画空间弯曲性，规定：多面体顶点的曲率等于 $2\pi$ 与多面体在该点的面角之和的差（多面体的面的内角叫做多面体的面角，角度用弧度制）．例如，正四面体的每个顶点有 3 个面角，每个面角为 $\frac{\pi}{3}$，所以正四面体在各顶点的曲率为 $2\pi-\frac{\pi}{3}\times3=\pi$．在底面为矩形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，$PA\perp$底面 $ABCD$，$AD=\sqrt{2}PA$，$PC$ 与底面 $ABCD$ 所成的角为 $\frac{\pi}{6}$，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，顶点 $B$ 的曲率为_____.

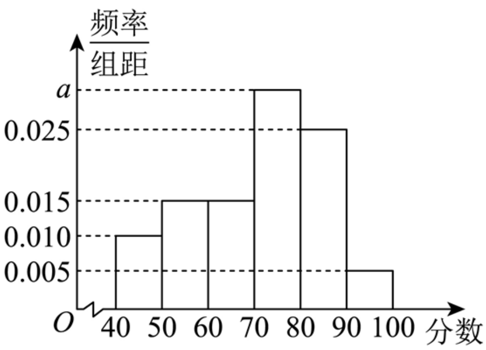
## 四、解答题

15．已知向量 $\vec{a}=(1,1),|\vec{b}|=2\sqrt{2}$．

(1)若 $\vec{a}\parallel\vec{b}$，求 $\vec{b}$ 的坐标；

(2)若 $(5\vec{a}-2\vec{b})\perp(\vec{a}+\vec{b})$，求 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角．

16．2024 年 1 月 17 日，搭载天舟七号货运飞船的长征七号遥八运载火箭成功发射，我国载人航天工程 2024 年发射任务首战告捷．为普及航天知识，某学校开展组织学生举办了一次主题为“我爱星辰大海”的航天知识竞赛，现从中抽取 200 名学生，记录他们的首轮竞赛成绩并作出如图所示的频率分布直方图，根据图形，请回答下列问题：

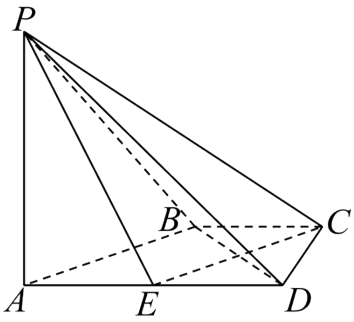



(1)求频率分布直方图中 $a$ 的值．若从成绩不高于 60 分的同学中按分层抽样方法抽取 5 人成绩，求 5 人中成绩不高于 50 分的人数；

(2)用样本估计总体，利用组中值估计该校学生首轮竞赛成绩的平均数以及中位数；

(3)若学校安排甲、乙两位同学参加第二轮的复赛，已知甲复赛获优秀等级的概率为$\frac{2}{3}$，乙复赛获优秀等级的概率为$\frac{3}{4}$，甲、乙是否获优秀等级互不影响，求至少有一位同学复赛获优秀等级的概率.

17．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，$AD//BC$，$AD\perp DC$，$BC=CD=\frac{1}{2}AD=1$，$E$为棱$AD$的中点，$PA\perp$平面$ABCD$.

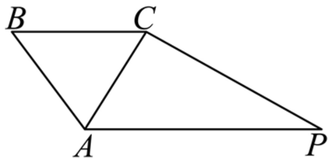



(1)求证：$AB//$平面$PCE$；

(2)求证：平面$PAB\perp$平面$PBD$；

(3)若二面角$P-CD-A$的大小为$45^{\circ}$，求直线$PA$与平面$PBD$所成角的正弦值.

18．在$\triangle ABC$中，角$A$，$B$，$C$所对的边分别为$a$，$b$，$c$，且满足$(2a-c)\cos B=b\cos C$.




(1)求角$B$的大小；

(2)若$\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{DC}$，且$CD=1,AD=\sqrt{7}$，求$\triangle ABC$的面积；

(3)如图，过点$A$作$BC$的平行线$AP$，且$\overrightarrow{BC}=\frac{7}{12}\overrightarrow{AP}$，在四边形$ABCP$中，$AB=2,AP=3$，动点$E$，$F$分别在线段$BC$，$CP$上运动，且$\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CF}=\lambda\overrightarrow{CP}$，求$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}$的最小值.

19．著名的费马问题是法国数学家皮埃尔·德·费马（1601－1665）于1643年提出的平面几何极值问题:“已知一个三角形，求作一点，使其与此三角形的三个顶点的距离之和最小”费马问题中的所求点称为费马点，已知对于每个给定的三角形，都存在唯一的费马点，当$\Delta ABC$的三个内角均小于120°时，则使得$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$的点$P$即为费马点.在$\Delta ABC$中，角$A$，$B$，$C$的对边分别为$a,b,c$，且$\cos B=\frac{2a\cos A}{c}-\frac{\sin B}{\tan C}$．若$P$是$\triangle ABC$的“费马点”，$a=2\sqrt{3},b<c$.

(1)求角A；

(2)若$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PA}=-4$，求$\triangle ABC$的周长；

(3)在(2)的条件下，设$f(x)=4^x-m\cdot 2^x+|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|+|\overrightarrow{PC}|$，若当$x\in[0,1]$时，不等式$f(x)\geq 0$恒成立，求实数$m$的取值范围.

## 参考答案：

1．B

【分析】根据复数的除法运算及虚部概念求解.

【详解】因为$z=\frac{2}{1-\mathrm{i}}=\frac{2(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=\frac{2(1+\mathrm{i})}{2}=1+\mathrm{i}$，

所以$z$的虚部为1.

故选：B

2．B

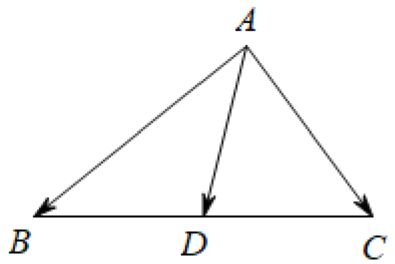
【分析】由向量加法法则求解即可.

【详解】解：因为$D$为$\triangle ABC$的边$BC$的中点，

所以，根据向量加法法则得$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AD}$，

所以$\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$.

故选：B



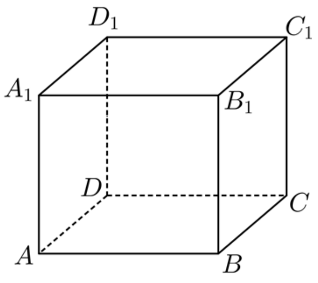

3．C

【分析】由线面垂直的性质可判断A，B；以长方体为载体进行验证可判断C；由面面垂直的判定定理可判断D.

【详解】对于A，两条平行线中的一条垂直于一个平面，则另一条也垂直于该平面，故A正确；

对于B，垂直于同一条直线的两个平面平行，故B正确；

对于C，如图，



长方体中，记$m = AA_1$，平面$ABCD$为平面$\alpha$，平面$A_1ADD_1$为平面$\beta$，

由图可知$m \subset \beta$，故C错误；

对于D，由面面垂直的判定定理可得，故D正确；

故选：C.

4．B

【分析】分析图中数据，结合方差，极差的求法和意义，结合百分位数的求解，得到答案.

【详解】从图表可以看出甲成绩的波动情况小于乙成绩的波动情况，则甲成绩的方差小于乙成绩的方差，且甲成绩的极差小于乙成绩的极差，AD正确；

将甲成绩进行排序，又$6 \times 25\% = 1.5$，故从小到大，选择第二个成绩作为甲成绩的第25百分位数，估计值为90分，

将乙成绩进行排序，又$6 \times 75\% = 4.5$，故从小到大，选择第5个成绩成绩作为乙成绩的第75百分位数，估计值大于90分，

从而甲成绩的第25百分位数小于乙成绩的第75百分位数，B错误；

甲成绩均集中在90分左右，而乙成绩大多数集中在60分左右，故C正确.

故选：B

5．A

【分析】由三视图得原图形的形状，结构，得边长后可得周长.

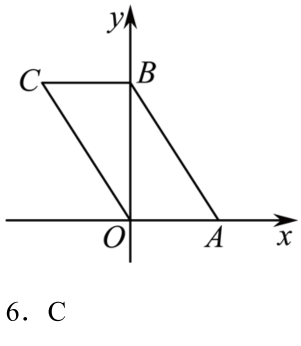
【详解】作出原图形如下图所示：

由三视图知原图形是平行四边形$OABC$，如图，$OA = O'A' = 1\text{cm}$，$OB \perp OA$，

$OB = 2O'B' = 2\sqrt{2}\text{cm}$，$AB = \sqrt{1^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2} = 3\text{cm}$，

所以平行四边形$OABC$的周长是$8\text{cm}$.

故选：A.




6．C

【分析】先在$\triangle BCD$中，利用正弦定理求得$BC$，再在直角$\triangle ABC$

中，利用正切函数的定义，求得 $AB$ 的长，即可求解.

【详解】在 $\triangle BCD$ 中，$CD=50\text{m},\cos\angle BCD=\frac{\sqrt{5}}{5},\cos\angle BDC=\frac{3}{5}$，

所以 $\sin\angle BCD=\frac{2\sqrt{5}}{5},\sin\angle BDC=\frac{4}{5}$

所以 $\sin\angle CBD=\sin\left(\angle BCD+\angle BDC\right)=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{4}{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

由正弦定理 $\frac{CD}{\sin\angle CBD}=\frac{BC}{\sin\angle BDC}$，

可得 $BC=\frac{50\times\frac{4}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}}=20\sqrt{5}$，

在直角 $\triangle ABC$ 中，因为 $\tan\angle ACB=\frac{3}{4}$,

所以 $AB=BC\cdot\tan\angle ACB=20\sqrt{5}\times\frac{3}{4}=15\sqrt{5}(\text{m})$，

即塔高为 $15\sqrt{5}\text{m}$.

故选：C.

7．D

【分析】运用平面向量基本定理，得到 m 的值，结合向量模长计算方法，建立等式，计算最值，即可.

【详解】$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CP}=\overrightarrow{AC}+k\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+k\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)$ $=\overrightarrow{AC}+k\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\right)$

$=\frac{2k}{3}\overrightarrow{AB}+\left(1-k\right)\overrightarrow{AC}=m\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，得到 $1-k=m,\frac{2k}{3}=\frac{1}{2}$，所以 $m=\frac{1}{4}$，结合 $\Delta ABC$ 的面积为 $2\sqrt{3}$，得到 $\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$ ,得到 $\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|=8$，所以

$\left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{\frac{1}{16}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\frac{1}{4}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\frac{1}{8}\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|}=\sqrt{1+\frac{1}{16}\left|\overrightarrow{AC}\right|^2+\frac{16}{\left|\overrightarrow{AC}\right|^2}}\geq\sqrt{3}$，故选 D.

【点睛】考查了平面向量基本定理，考查了基本不等式的运用，难度偏难.

8．A

【分析】过点 $B$ 作 $BF\perp AD$，得到动点 $P$ 的轨迹是以 $E$ 为圆心，以 $BE$ 为半径且圆心角为 $\angle P_1EP_2$ 的圆弧，在 $\triangle ABC$ 所在平面建立平面直角坐标系，求得直线 $BE$ 和 $AC$ 的方程，联立方程组，求得 $F\left(\frac{3}{4},\frac{3}{4}\right)$，得到 $|EF|$ 的长，进而求得 $\angle P_1EP_2=\frac{\pi}{6}$，结合弧长公式，即可求解.

【详解】如图（1）所示，过点 $B$ 作 $BF\perp AD$，分别交 $AD,AC$ 于点 $E,F$，