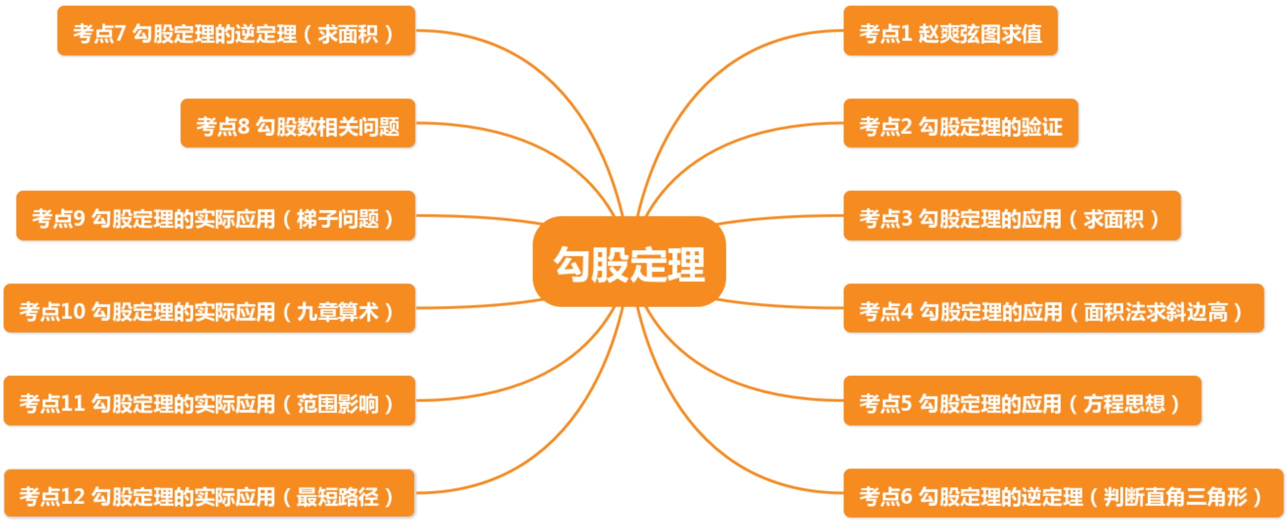
专题 1.3　勾股定理章末重难点题型

【沪科版】

直击考点

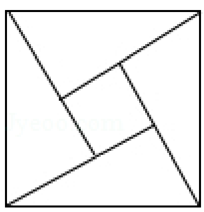


举一反三

【考点 1　赵爽弦图求值】

【方法点拨】解决此类问题要熟练运用勾股定理及完全平方公式，结合赵爽弦图利用面积之间的关系即可解决问题.

【例 1】(2020 春•大悟县期中）“赵爽弦图”巧妙地利用面积关系证明了勾股定理，是我国古代数学的骄傲，如图所示的“赵爽弦图”是由四个全等的直角三角形和一个小正方形拼成的一个大正方形，设直角三角形较长直角边长为 a，较短直角边长为 b，若 $ab=8$，小正方形的面积为 9，则大正方形的边长为（　　）



A．9　　　B．6　　　C．5　　　D．4

【分析】由题意可知：中间小正方形的边长为：$a-b$，根据勾股定理以及题目给出的已知数据即可求出大正方形的边长.

【解答】解：由题意可知：中间小正方形的边长为：$a-b$，

∵每一个直角三角形的面积为：$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\times8=4$，

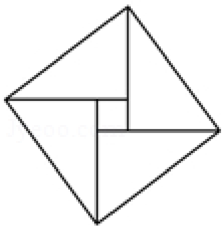
∴大正方形的面积为：$4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2=16+9=25$，

∴大正方形的边长为 5．

故选：C．

【点评】本题考查勾股定理的证明，解题的关键是熟练运用勾股定理以及完全平方公式，本题属于基础题型．

【变式 1-1】（2020 春•湛江期末）如图，由 4 个相同的直角三角形与中间的小正方形拼成一个大正方形，若大正方形面积是 9，小正方形面积是 1，直角三角形较长直角边为 a，较短直角边为 b，则 ab 的值是（　　）



A．4　　　B．6　　　C．8　　　D．10

【分析】根据小正方形、大正方形的面积可以列出方程组，通过完全平方公式的变形公式来求 ab 即可．

【解答】解：由题意得：大正方形的面积是 9，小正方形的面积是 1，直角三角形的较长直角边为 a，较短直角边为 b，

即 $a^2+b^2=9$，$a-b=1$，

所以 $ab=\frac{1}{2}[(a^2+b^2)-(a-b)^2]=\frac{1}{2}(9-1)=4$，即 $ab=4$．

解法 2，4 个三角形的面积和为 $9-1=8$；

每个三角形的面积为 2；

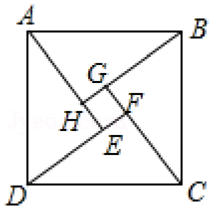
则$\frac{1}{2}ab=2$；

所以 $ab=4$

故选：A．

【点评】本题考查了勾股定理在直角三角形中的灵活运用，考查了正方形面积的计算，本题中列出方程组并求解是解题的关键．

【变式 1-2】（2019 春•番禺区期中）如图是“赵爽弦图”，△ABH、△BCG、△CDF 和△DAE 是四个全等的直角三角形，四边形 $ABCD$ 和 $EFGH$ 都是正方形，如果 $AB=10$，$EF=2$，那么 AH 等于（　　）



A．2　　　　B．4　　　　C．6　　　　D．8

【分析】根据面积的差得出 $a+b$ 的值，再利用 $a-b=2$，解得 a，b 的值代入即可．

【解答】解：∵$AB=10$，$EF=2$，

∴大正方形的面积是 100，小正方形的面积是 4，

∴四个直角三角形面积和为 $100-4=96$，设 AE 为 a，DE 为 b，即 $4\times\frac{1}{2}ab=96$，

∴$2ab=96$，$a^2+b^2=100$，

∴$(a+b)^2=a^2+b^2+2ab=100+96=196$，

∴$a+b=14$，

∵$a-b=2$，

解得：$a=8$，$b=6$，

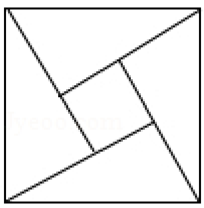
∴$AE=8$，$DE=6$，

∴$AH=8-2=6$．

故选：C．

【点评】此题考查勾股定理的证明，关键是应用直角三角形中勾股定理的运用解得 ab 的值．

【变式 1-3】（2020 春•和县期末）如图，它是由四个全等的直角三角形与中间的一个小正方形拼成的一个大正方形，如果大正方形的面积是 13，小正方形的面积是 1，直角三角形的较短的直角边长为 a，较长的直角边长为 b，那么 $a+b$ 的值为_____．



【分析】根据勾股定理可以求得 a^2+b^2 等于大正方形的面积，然后求四个直角三角形的面积，即可得到 ab 的值，然后根据 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$，即可求得 $a+b$ 的值．

【解答】解：根据勾股定理可得 $a^2+b^2=13$，

四个直角三角形的面积是：$\frac{1}{2}ab\times4=13-1=12$，即：$2ab=12$，

则 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2=13+12=25$，

则 $a+b=5$．

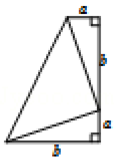
故答案为：5．

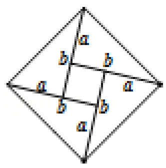
【点评】本题考查勾股定理，以及完全平方式，正确根据图形的关系求得 a^2+b^2 和 ab 的值是关键．

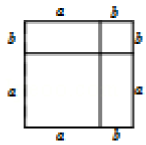
【考点 2　勾股定理的验证】

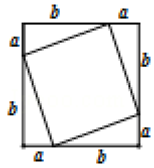
【方法点拨】勾股定理的验证，能根据图形中各个部分的面积列出等式是解此类题的关键．

【例 2】（2020 春•南岗区校级月考）下面各图中，不能证明勾股定理正确性的是（　　）

A. 

B. 

C. 

D. 

【分析】先表示出图形中各个部分的面积，再判断即可．

【解答】解：A、$\because \frac{1}{2}ab+c^2+\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}$（$a+b$）（$a+b$），

$\therefore$整理得：$a^2+b^2=c^2$，即能证明勾股定理，故本选项不符合题意；

B、$\because 4\times\frac{1}{2}ab+$（$b-a$）$^2=c^2$，

$\therefore$整理得：$a^2+b^2=c^2$，即能证明勾股定理，故本选项不符合题意；

C、根据图形不能证明勾股定理，故本选项符合题意；

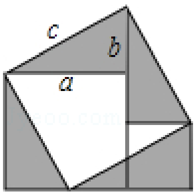
D、$\because 4\times\frac{1}{2}ab+c^2=$（$a+b$）^{2}，

$\therefore$整理得：$a^2+b^2=c^2$，即能证明勾股定理，故本选项不符合题意；

故选：C．

【点评】本题考查了勾股定理的证明，能根据图形中各个部分的面积列出等式是解此题的关键．

【变式 2-1】（2019 春•临海市期末）“赵爽弦图”巧妙地利用“出入相补”的方法证明了勾股定理．小明受此启发，探究后发现，若将 4 个直角边长分别为 a、b，斜边长为 c 的直角三角形拼成如图所示的五边形，用等积法也可以证明勾股定理，则小明用两种方法表示五边形的面积分别是（用含有 a、b、c 的式子表示）_____，_____．



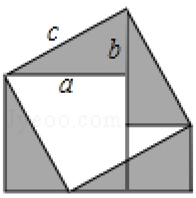
【分析】五边形的面积＝边长为 c 的正方形面积+2 个全等的直角边分别为 a，b 的直角三角形的面积，或五边形的面积＝边长为 c 的正方形面积+边长为 c 的正方形面积+2 个全等的直角边分别为 a，b 的直角三角形的面积，依此列式计算即可求解．

【解答】解：如图所示：

①$S=c^2+\frac{1}{2}ab\times 2=c^2+ab$，

②$S=a^2+b^2+\frac{1}{2}ab\times 2=a^2+b^2+ab$．

故答案为：c^2+ab，a^2+b^2+ab．

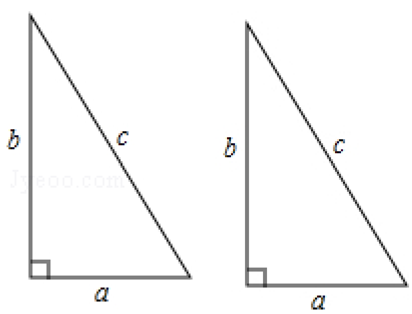


【点评】本题考查利用图形面积的关系证明勾股定理，解题关键是利用三角形和正方形边长的关系进行组合图形．

【变式 2-2】（2019 秋•鼓楼区期中）如图（1）是用硬板纸做成的两个全等的直角三角形，两直角边的长分别为 a 和 b，斜边长为 c，请你开动脑筋，将它们拼成一个能证明勾股定理的图形．

（1）画出拼成的这个图形的示意图，并用这个图形证明勾股定理；

（2）假设图（1）中的直角三角形有若干个，你能运用图（1）中所给的直角三角形拼出另一种能证明勾股定理的图形吗？请画出拼后的示意图（无需证明）

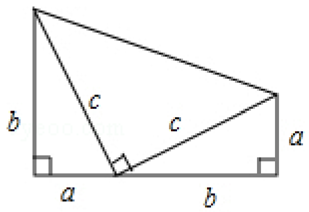


【分析】（1）此题要由图中给出的三个三角形组成一个梯形，而且上底和下底分别为 a，b，高为 $a+b$；此题主要是利用梯形的面积和三角形的面积公式进行计算，根据图中可知，由此列出等式即可求出勾股

定理；

（2）此题的方法很多，这里只举一种例子，即把四个直角三角形组成一个正方形．

【解答】解解：（1）如图所示，是梯形；

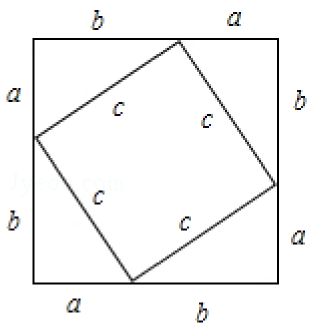


由上图我们根据梯形的面积公式可知，梯形的面积＝$\frac{1}{2}$（a+b）（a+b）．

从上图我们还发现梯形的面积＝三个三角形的面积，即 $\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$．

两者列成等式化简即可得：$a^2+b^2=c^2$；

（2）画边长为（a+b）的正方形，如图，其中 a、b 为直角边，c 为斜边．



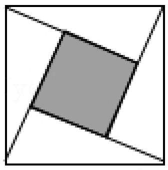
【点评】本题考查了勾股定理的证明，此题的关键是找等量关系，由等量关系求证勾股定理．

【变式 2-3】（2020 春•无锡期中）（1）教材在探索平方差公式时利用了面积法，面积法可以帮助我们直观地推导或验证公式，俗称“无字证明”，例如，著名的赵爽弦图（如图①，其中四个直角三角形较大的直角边长都为 a，较小的直角边长都为 b，斜边长都为 c），大正方形的面积可以表示为 c^2，也可以表示为 $4\times\frac{1}{2}ab$+（$a-b$）^{2}，所以 $4\times\frac{1}{2}ab$+（$a-b$）$^2=c^2$，即 $a^2+b^2=c^2$．由此推导出重要的勾股定理：如果直角三角形两条直角边长为 a，b，斜边长为 c，则 $a^2+b^2=c^2$．图②为美国第二十任总统伽菲尔德的“总统证法”，请你利用图②推导勾股定理．

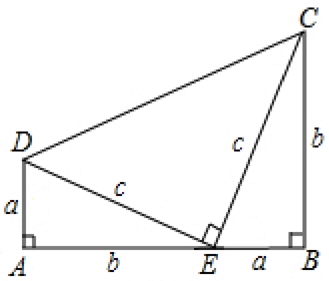
（2）试用勾股定理解决以下问题：

如果直角三角形 ABC 的两直角边长为 3 和 4，则斜边上的高为____．

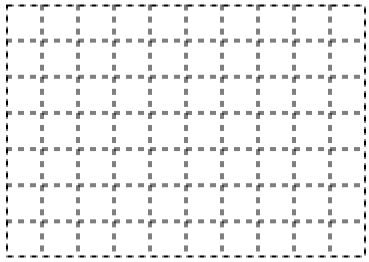
（3）试构造一个图形，使它的面积能够解释（$a-2b$）$^2=a^2-4ab+4b^2$，画在上面的网格中，并标出字母 a，b 所表示的线段．



图①



图②



【分析】(1）梯形的面积可以由梯形的面积公式求出，也利用三个直角三角形面积求出，两次求出的面积相等列出关系式，化简即可得证；

（2）由两直角边，利用勾股定理求出斜边长，再利用面积法即可求出斜边上的高；

（3）已知图形面积的表达式，即可根据表达式得出图形的边长的表达式，即可画出图形.

【解答】解：（1）梯形 $ABCD$ 的面积为$\frac{1}{2}$（$a+b$）（$a+b$）$=\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2$，

也利用表示为$\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}ab$，

$\therefore\frac{1}{2}a^2+ab+\frac{1}{2}b^2=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}ab$，

即 $a^2+b^2=c^2$；

（2）∵直角三角形的两直角边分别为 3，4，

∴斜边为 5，

∵设斜边上的高为 h，直角三角形的面积为$\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}\times5\times h$，

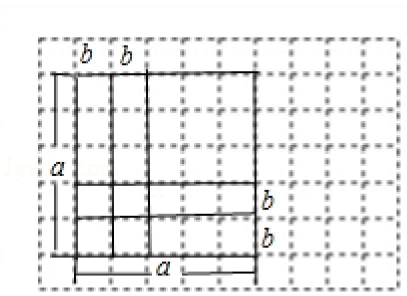
$\therefore h=\frac{12}{5}$，

故答案为$\frac{12}{5}$；

（3）∵图形面积为：$(a-2b)^2=a^2-4ab+4b^2$，

∴边长为 $a-2b$，

由此可画出的图形为：



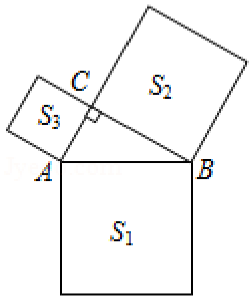
【点评】此题考查了勾股定理的证明，勾股定理，多项式的乘法的运用以及由多项式画图形的创新题型，

此类证明要转化成同一个物体的两种表示方法，从而转化成方程达到证明的结果．

【考点 3　勾股定理的应用（求面积）】

【方法点拨】解决此类问题要善于将面积中的平方式子与勾股定理中的平方式子建立联系．

【例 3】（2020 春•柳州期末）如图，分别以直角△ABC 三边为边向外作三个正方形，其面积分别用 S_1、S_2、S_3 表示，若 S_2＝7，S_3＝2，那么 S_1＝（　　）



A．9　　　　B．5　　　　C．53　　　　D．45

【分析】根据勾股定理与正方形的性质解答．

【解答】解：在 Rt△ABC 中，AB^2＝BC^2+AC^2，

∵S_1＝AB^2，S_2＝BC^2，S_3＝AC^2，

∴S_1＝S_2+S_3．

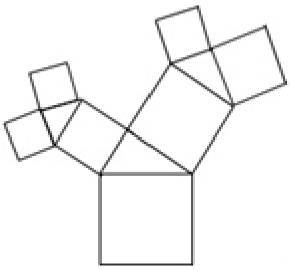
∵S_2＝7，S_3＝2，

∴S_1＝7+2＝9．

故选：A．

【点评】本题考查了勾股定理：在任何一个直角三角形中，两条直角边长的平方之和一定等于斜边长的平方．

【变式 3-1】（2020 春•西华县期末）如图，所有的四边形是正方形，所有的三角形都是直角三角形，其中最大的正方形边长为 13cm，则图中所有的正方形的面积之和为（　　）



A．169cm^2　　　　B．196cm^2　　　　C．338cm^2　　　　D．507cm^2

【分析】根据勾股定理有 $S_{正方形2}$+$S_{正方形3}$＝$S_{正方形1}$，$S_{正方形C}$+$S_{正方形D}$＝$S_{正方形2}$，$S_{正方形A}$+$S_{正方形B}$＝$S_{正方形}$

$_3$，等量代换即可求所有正方形的面积之和．

【解答】解：如右图所示，

根据勾股定理可知，

$S_{正方形2}+S_{正方形3}=S_{正方形1}$，

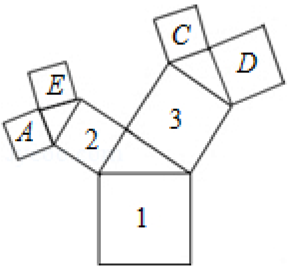
$S_{正方形C}+S_{正方形D}=S_{正方形}$，

$S_{正方形A}+S_{正方形E}=S_{正方形2}$，

$\therefore S_{正方形C}+S_{正方形D}+S_{正方形A}+S_{正方形E}=S_{正方形1}$，

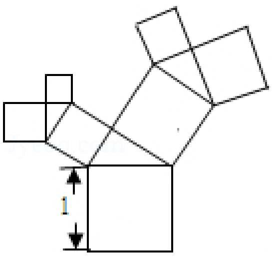
则 $S_{正方形1}+_{正方形2}+S_{正方形3}+S_{正方形C}+S_{正方形D}+S_{正方形A}+S_{正方形E}=3S_{正方形1}=3\times13^2=3\times169=507$（$cm^2$）．

故选：D．



【点评】本题考查了勾股定理．有一定难度，注意掌握直角三角形中，两直角边的平方和等于斜边的平方．

【变式 3-2】（2019 秋•南海区期末）有一个面积为 1 的正方形，经过一次“生长”后，在他的左右肩上生出两个小正方形，其中，三个正方形围成的三角形是直角三角形，再经过一次“生长”后，变成了下图，如果继续“生长”下去，它将变得“枝繁叶茂”，请你算出“生长”了 2019 次后形成的图形中所有的正方形的面积和是（　　）



A．1　　　　B．2018　　　　C．2019　　　　D．2020

【分析】根据勾股定理和正方形的面积公式，知“生长”1 次后，以直角三角形两条直角边为边长的正方形的面积和等于以斜边为边长的正方形的面积，即所有正方形的面积和是 $2\times1=2$；“生长”2 次后，所有的正方形的面积和是 $3\times1=3$，推而广之即可求出“生长”2019 次后形成图形中所有正方形的面积之和．

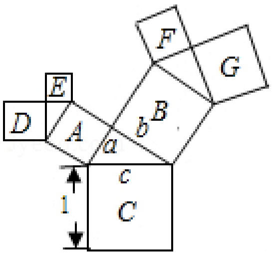
【解答】解：设直角三角形的是三条边分别是 a，b，c.

根据勾股定理，得 $a^2+b^2=c^2$，

即正方形 A 的面积+正方形 B 的面积＝正方形 C 的面积＝1.

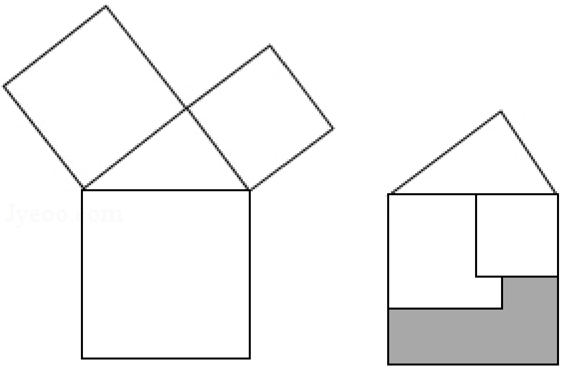
推而广之，“生长”了 2019 次后形成的图形中所有的正方形的面积和是 2020×1＝2020.

故选：D.



【点评】此题考查了正方形的性质，以及勾股定理，其中能够根据勾股定理发现每一次得到的新的正方形的面积和与原正方形的面积之间的关系是解本题的关键.

【变式 3-3】（2020 春•无为县期末）勾股定理是人类最伟大的科学发现之一，在我国古算术《周髀算经》中早有记载．以直角三角形纸片的各边分别向外作正方形纸片，再把较小的两张正方形纸片按如图的方式放置在最大正方形纸片内．若已知图中阴影部分的面积，则可知（　　）



A．直角三角形纸片的面积

B．最大正方形纸片的面积

C．最大正方形与直角三角形的纸片面积和

D．较小两个正方形纸片重叠部分的面积

【分析】根据勾股定理得到 $c^2=a^2+b^2$，根据正方形的面积公式、长方形的面积公式计算即可.

【解答】解：设直角三角形的斜边长为 c，较长直角边为 b，较短直角边为 a，

由勾股定理得，$c^2=a^2+b^2$，

阴影部分的面积＝$c^2-b^2-a(c-b)=a^2-ac+ab=a(a+b-c)$，

较小两个正方形重叠部分的宽＝$a-(c-b)$，长＝a，

则较小两个正方形重叠部分底面积＝$a(a+b-c)$，

∴知道图中阴影部分的面积，则一定能求出较小两个正方形重叠部分的面积，

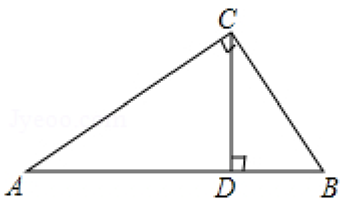
故选：D．

【点评】本题考查的是勾股定理，如果直角三角形的两条直角边长分别是 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$．

【考点 4　勾股定理的应用（面积法求斜边高）】

【方法点拨】解决此类问题要善于利用等积法求解．

【例 4】（2020 春•安陆市期末）如图，在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，$CD\perp AB$ 于 D，则 CD 的长是（　　）



A．5　　B．7　　C．$\frac{12}{5}$　　D．$\frac{24}{5}$

【分析】首先利用勾股定理计算出 AB 的长，再根据三角形的面积公式计算出 CD 的长即可．

【解答】解：∵在 Rt△ABC 中，$\angle ACB=90°$，$AC=4$，$BC=3$，

$\therefore AB=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

$\because \frac{1}{2}\times AC\times BC=\frac{1}{2}\times CD\times AB$，

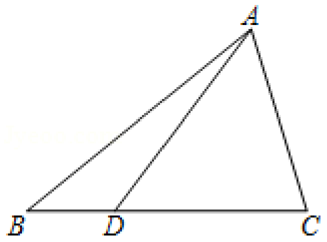
$\therefore \frac{1}{2}\times 3\times 4=\frac{1}{2}\times 5\times CD$，

解得 $CD=\frac{12}{5}$．

故选：C．

【点评】此题主要考查了勾股定理，以及三角形的面积，关键是熟练掌握勾股定理：在任何一个直角三角形中，两条直角边长的平方之和一定等于斜边长的平方．

【变式 4-1】（2020 春•开原市校级月考）如图所示，在△ABC 中，点 D 是 BC 上的一点，已知 $AC=CD=5$，$AD=6$，$BD=\frac{5}{2}$，则△ABC 的面积是（　　）



A．18　　　　B．36　　　　C．72　　　　D．125

【分析】先作辅助线，$AE\perp CD$ 于点 E，$CF\perp AD$ 于点 F，然后根据勾股定理，可以得到 CF 的长，再根据等积法可以得到 AE 的长，然后即可计算出$\triangle ABC$ 的面积．

【解答】解：作 $AE\perp CD$ 于点 E，作 $CF\perp AD$ 于点 F，

$\because AC=CD=5$，$AD=6$，$CF\perp AD$，

$\therefore AF=3$，$\angle AFC=90^\circ$，

$\therefore CF=\sqrt{AC^2-AF^2}=4$，

$\because \dfrac{CD\cdot AE}{2}=\dfrac{AD\cdot CF}{2}$，

$\therefore \dfrac{5AE}{2}=\dfrac{6\times 4}{2}$，

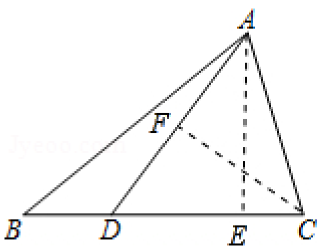
解得．$AE=\dfrac{24}{5}$，

$\because BD=\dfrac{5}{2}$，$CD=5$，

$\therefore BC=\dfrac{15}{2}$，

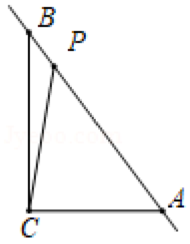
$\therefore \triangle ABC$ 的面积是：$\dfrac{BC\cdot AE}{2}=\dfrac{\frac{15}{2}\times\frac{24}{5}}{2}=18$，

故选：A．



【点评】本题考查勾股定理、等腰三角形，解答本题的关键是明确题意，利用数形结合的思想解答．

【变式 4-2】（2019 秋•南海区期末）如图，三角形 ABC 中，$\angle ACB=90^\circ$，$AC=3$，$BC=4$，P 为直线 AB 上一动点，连接 PC，则线段 PC 的最小值是__．



【分析】作 $CP\perp AB$ 于 P，根据勾股定理求出 AB，根据三角形的面积公式求出 PC.

【解答】解：作 $CP\perp AB$ 于 P，

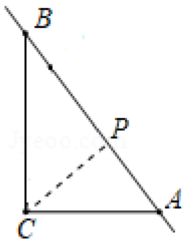
由垂线段最短可知，此时 PC 最小，

由勾股定理得，$AB=\sqrt{BC^2+AC^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5$，

$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\times AC\times BC=\frac{1}{2}\times AB\times PC$，即$\frac{1}{2}\times 3\times 4=\frac{1}{2}\times 5\times PC$，

解得，$PC=\frac{12}{5}$，

故答案为：$\frac{12}{5}$.



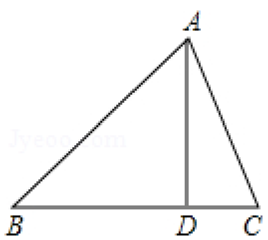
【点评】本题考查的是勾股定理、垂线段最短，如果直角三角形的两条直角边长分别是 a，b，斜边长为 c，那么 $a^2+b^2=c^2$.

【变式 4-3】（2020 春•大冶市期末）在△ABC 中，$AB=15$，$AC=13$，BC 上的高 AD 长为 12，则△ABC 的面积为（　　）

A．84　　B．24　　C．24 或 84　　D．42 或 84

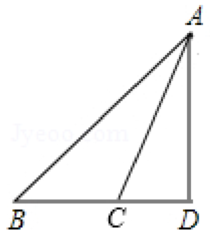
【分析】由于高的位置是不确定的，所以应分情况进行讨论.

【解答】解：（1）



△ABC 为锐角三角形，高 AD 在△ABC 内部．$BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=9$，$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=5$

∴△ABC 的面积为$\frac{1}{2}\times$（9+5）×12=84；



$\triangle ABC$ 为钝角三角形，高 AD 在$\triangle ABC$ 外部．方法同（1）可得到 $BD=9$，$CD=5$

∴$\triangle ABC$ 的面积为$\frac{1}{2}\times$（9﹣5）×12＝24．

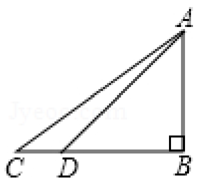
故选：C．

【点评】本题需注意当高的位置是不确定的时候，应分情况进行讨论．

【考点 5　勾股定理的应用（方程思想）】

【方法点拨】解题的关键是利用勾股定理求解线段长度，选择直角三角形借助勾股定理构造方程是解这类问题通用方法．

【例 5】(2019 秋•通州区期末）如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle B=90°$．点 D 为 BC 边上一点，线段 AD 将 Rt$\triangle ABC$ 分为两个周长相等的三角形．若 $CD=2$，$BD=6$，求$\triangle ABC$ 的面积．



【分析】由题意得出 $AC+CD+AD=AD+BD+AB$．得出 $AC=AB+4$，设 $AB=x$，则 $AC=4+x$．在 Rt$\triangle ABC$ 中，由勾股定理得出方程，解方程得出 $AB=6$，由三角形面积公式即可得出答案．

【解答】解：根据题意可知，$\triangle ACD$ 与$\triangle ADB$ 的周长相等，

∴$AC+CD+AD=AD+BD+AB$．

∴$AC+CD=BD+AB$．

∵$CD=2$，$BD=6$，

∴$AC+2=6+AB$，$BC=CD+BD=8$，

∴$AC=AB+4$，

设 $AB=x$，则 $AC=4+x$．

在 Rt$\triangle ABC$ 中，$AB^2+BC^2=AC^2$，

∴$x^2+8^2=(x+4)^2$．

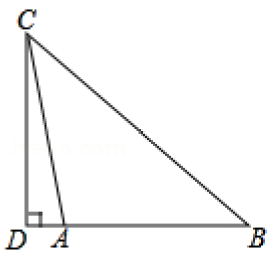
∴$x^2+64=16+x^2+8x$．

$\therefore x=6$.

$\therefore S=\frac{1}{2}\times 6\times 8=24$.

【点评】本题考查了勾股定理以及三角形面积；熟练掌握勾股定理，求出 $AC=AB+4$ 是解题的关键．

【变式 5-1】（2019 秋•宜宾期末）如图所示，在△ABC 中，$AB=AC=5$，$BC=8$，CD 是 AB 边上的高．求线段 AD 的长．



【分析】设 $AD=x$，根据 $CD^2=BC^2-BD^2=AC^2-AD^2$，构建方程即可解决问题．

【解答】解：设 $AD=x$

$\because CD\perp AB$，

$\therefore \angle D=90^\circ$，

$\therefore CD^2=BC^2-BD^2=AC^2-AD^2$，

$\therefore 8^2-(5+x)^2=5^2-x^2$，

$\therefore x=\frac{7}{5}$，

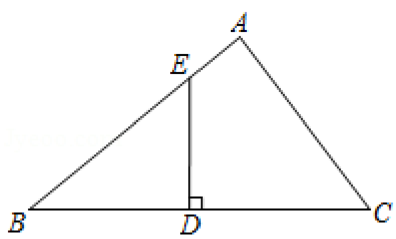
$\therefore AD=\frac{7}{5}$.

【点评】本题考查勾股定理，等腰三角形的性质等知识，解题的关键是学会利用参数构建方程解决问题．

【变式 5-2】（2020 春•林州市期末）已知在△ABC 中，D 是 BC 的中点，$DE\perp BC$，垂足为 D，交 AB 于点 E，且 $BE^2-AE^2=AC^2$．

（1）求∠A 的度数；

（2）若 $DE=3$，$BD=4$，求 AE 的长．



【分析】（1）连接 CE，根据线段垂直平分线的性质转化线段 BE 到△AEC 中，利用勾股定理的逆定理可

求∠A度数；

（2）设 $AE=x$，则 AC 可用 x 表示，在 Rt△ABC 中利用勾股定理得到关于 x 的方程求解 AE 值．

【解答】解：（1）连接 CE，∵D 是 BC 的中点，$DE\perp BC$，

∴$CE=BE$．

∵$BE^2-AE^2=AC^2$，

∴$AE^2+AC^2=CE^2$．

∴△AEC 是直角三角形，∠$A=90°$；

（2）在 Rt△BDE 中，$BE=\sqrt{BD^2+DE^2}=5$．

所以 $CE=BE=5$．

设 $AE=x$，则在 Rt△AEC 中，$AC^2=CE^2-AE^2$，

所以 $AC^2=25-x^2$．

∵$BD=4$，

∴$BC=2BD=8$．

在 Rt△ABC 中，根据 $BC^2=AB^2+AC^2$，

即 $64=(5+x)^2+25-x^2$，

解得 $x=1.4$．

即 $AE=1.4$．

【点评】本题主要考查了勾股定理及其逆定理，解题的关键是利用勾股定理求解线段长度，选择直角三角形借助勾股定理构造方程是解这类问题通用方法．

【变式 5-3】（2019 秋•大丰区期中）如图，△ABC 中，∠$ACB=90°$，$AB=10cm$，$BC=6cm$，若点 P 从点 A 出发以每秒 $1cm$ 的速度沿折线 $A-C-B-A$ 运动，设运动时间为 t 秒（$t>0$）．

（1）若点 P 在 AC 上，且满足 $PA=PB$ 时，求出此时 t 的值；

（2）若点 P 恰好在∠BAC 的角平分线上（但不与 A 点重合），求 t 的值．

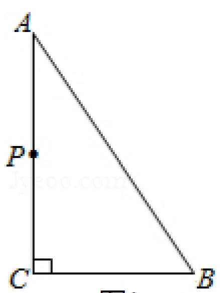


图1

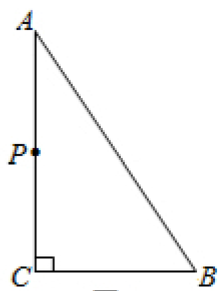


图2

【分析】（1）设存在点 P，使得 $PA=PB$，此时 $PA=PB=t$，$PC=8-t$，根据勾股定理列方程即可得到结

论；

（2）当点 P 在 $\angle CAB$ 的平分线上时，如图 1，过点 P 作 $PE\perp AB$ 于点 E，此时 $BP=14-t$，$PE=PC=t-8$，$BE=10-8=2$，根据勾股定理列方程即可得到结论．

【解答】解：（1）在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$AB=10cm$，$BC=6cm$，

则由勾股定理得到：$AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$（$cm$）

设存在点 P，使得 $PA=PB$，

此时 $PA=PB=t$，$PC=8-t$，

在 Rt$\triangle PCB$ 中，$PC^2+CB^2=PB^2$，

即：$(8-t)^2+6^2=t^2$，

解得：$t=\dfrac{25}{4}$，

∴当 $t=\dfrac{25}{4}$ 时，$PA=PB$；

（2）当点 P 在 $\angle BAC$ 的平分线上时，如图，过点 P 作 $PE\perp AB$ 于点 E，

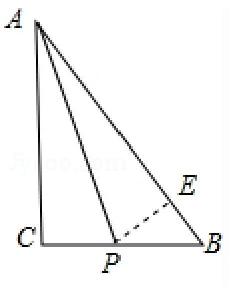
此时 $BP=14-t$，$PE=PC=t-8$，$BE=10-8=2$，

在 Rt$\triangle BEP$ 中，$PE^2+BE^2=BP^2$，

即：$(t-8)^2+2^2=(14-t)^2$，

解得：$t=\dfrac{32}{3}$，

∴当 $t=\dfrac{32}{3}$ 时，P 在 $\triangle ABC$ 的角平分线上．



【点评】考查了勾股定理，角平分线的性质，此题难度较大，注意掌握辅助线的作法，注意掌握数形结合思想的应用．

【考点 6　勾股定理的逆定理（判断直角三角形）】

【方法点拨】如果三角形两边的平方和等于第三边的平方，那么这个三角形是直角三角形．

【例 6】（2020 春•官渡区期末）下列条件中，不能判定 $\triangle ABC$ 为直角三角形的是（　　）

A．$a:b:c=5:12:13$　　　　　　　　B．$\angle A+\angle B=\angle C$

C．$\angle A$：$\angle B$：$\angle C$＝2：3：5　　　　　　D．a＝6，b＝12，c＝10

【分析】由勾股定理的逆定理，只要验证两小边的平方和等于最长边的平方或最大角是否是 90°即可．

【解答】解：A、∵$5^2+12^2=13^2$，∴△ABC 是直角三角形，故能判定△ABC 是直角三角形；

B、∵$\angle A+\angle B=\angle C$，∴$\angle C=90°$，故能判定△$ABC$ 是直角三角形；

C、∵$\angle A$：$\angle B$：$\angle C$＝2：3：5，∴$\angle C=\frac{5}{2+3+5}\times180°=90°$，故能判定△$ABC$ 是直角三角形；

D、∵$6^2+10^2\neq12^2$，∴△ABC 不是直角三角形，故不能判定△ABC 是直角三角形；

故选：D．

【点评】本题考查勾股定理的逆定理的应用．判断三角形是否为直角三角形，可利用勾股定理的逆定理和直角三角形的定义判断．

【变式 6-1】（2019 秋•晋江市期末）在△ABC 中，$BC=a$，$AB=c$，$AC=b$，则不能作为判定△ABC 是直角三角形的条件的是（　　）

A．$\angle A=\angle B-\angle C$　　　　　　B．$\angle A$：$\angle B$：$\angle C$＝1：4：3

C．a：b：c＝7：24：25　　　　　　D．a：b：c＝4：5：6

【分析】由直角三角形的定义，只要验证最大角是否是 90°；由勾股定理的逆定理，只要验证两小边的平方和是否等于最长边的平方即可．

【解答】解：A、由$\angle A=\angle B-\angle C$得到：$\angle B=\angle A+\angle C$，所以$\angle B=90°$，故能判定△$ABC$ 是直角三角形，故本选项不符合题意；

B、$\angle A$：$\angle B$：$\angle C$＝1：4：3，又$\angle A+\angle B+\angle C=180°$，则$\angle B=90°$，故能判定△$ABC$ 是直角三角形，故本选项不符合题意；

C、因为 $7^2+24^2=25^2$，所以能判定△ABC 是直角三角形，故本选项不符合题意；

D、因为 $4^2+5^2\neq6^2$，所以不能判定△ABC 是直角三角形，故本选项符合题意；

故选：D．

【点评】本题主要考查三角形内角和及勾股定理的逆定理的应用．判断三角形是否为直角三角形，已知三角形三边的长，只要利用勾股定理的逆定理加以判断即可．

【变式 6-2】（2020 春•下陆区校级期中）在△ABC 中，$\angle A$，$\angle B$，$\angle C$ 的对边分别记为 a，b，c，下列结论中不正确的是（　　）

A．如果$\angle A-\angle B=\angle C$，那么△$ABC$ 是直角三角形

B．如果$\angle A$：$\angle B$：$\angle C$＝1：2：3，那么△ABC 是直角三角形