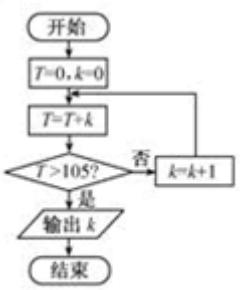
数列、极限和数学归纳法

安徽理〔11〕如以以下图，程序框图〔算法流程图〕的输出结果是_____



第(11)题图

(11)15【命题意图】此题考查算法框图的识别，考查等差数列前 n 项和.

【解析】由算法框图可知 $T=1+2+3+\cdots+k=\dfrac{k(k+1)}{2}$，假设 T=105，那么 K=14，继续执行循环体，这时 k=15，T>105，所以输出的 k 值为 15.

〔18〕〔本小题总分值 12 分〕在数 1 和 100 之间插入 n 个实数，使得这 $n+2$ 个数构成递增的等比数列，将这 $n+2$ 个数的乘积记作 T_n，再令 $a_n=\lg T_n,\ n\geqslant 1$.

〔Ⅰ〕求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

〔Ⅱ〕设 $b_n=\tan a_n\tan a_{n+1}$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

〔本小题总分值 13 分〕此题考查等比和等差数列，指数和对数的运算，两角差的正切公式等根本知识，考查灵巧运用知识解决问题的能力，综合运算能力和创新思维能力.

解：〔I〕设 $l_1,l_2,\cdots,l_{n+2}$ 构成等比数列，其中 $t_1=1,t_{n+2}=100$，那么

$$T_n=t_1\cdot t_2\cdots t_{n+1}\cdot t_{n+2},\quad ①,\qquad T_n=t_{n+1}\cdot t_{n+2}\cdots t_2\cdot t_1,\quad ②$$

①×②并利用 $t_1t_{n+3-i}=t_1t_{n+2}=10^2(1\leq i\leq n+2)$，得

$$T_n^2=(t_1t_{n+2})\cdot(t_2t_{n+1})\cdots(t_{n+1}t_2)\cdot(t_{n+2}t_1)=10^{2(n+2)},\therefore a_n=\lg T_n=n+2,n\geq 1.$$

〔II〕由题意和〔I〕中计算结果，知 $b_n=\tan(n+2)\cdot\tan(n+3),n\geq 1.$

另一方面，利用 $\tan 1=\tan((k+1)-k)=\dfrac{\tan(k+1)-\tan k}{1+\tan(k+1)\cdot\tan k}$，

得 $\tan(k+1)\cdot\tan k=\dfrac{\tan(k+1)-\tan k}{\tan 1}-1$. 所以 $S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k=\sum_{k=3}^{n+2}\tan(k+1)\cdot\tan k$

$$=\sum_{k=3}^{n+2}\left(\frac{\tan(k+1)-\tan k}{\tan 1}-1\right)=\frac{\tan(n+3)-\tan 3}{\tan 1}-n$$

安徽文〔7〕假设数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=(-1)(3n-2)$，那么 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=$

〔A〕 15　　〔B〕 12　　〔C〕 -12　　〔D〕 -15

〔7〕A【命题意图】此题考查数列求和. 属中等偏易题.

【解析】法一：分别求出前 10 项相加即可得出结论；

法二：$a_1+a_2=a_3+a_4=\cdots=a_9+a_{10}=3$，故 $a_1+a_2+\cdots+a_{10}=3\times 5=15$. 应选 A.

北京理

11. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中，假设 $a_1=\frac{1}{2}$，$a_4=-4$，那么公比 $q=$_____；$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=$_____.

【解析】$a_1=\frac{1}{2}$，$a_4=-4\Rightarrow q=-2$，$\{|a_n|\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项，以 2 为公比的等比数列，$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|=2^{n-1}-\frac{1}{2}$。

20. 假设数列 A_n：a_1，a_2，…，$a_n(n\geq 2)$ 满足 $|a_{k+1}-a_k|=1$（$k=1$，2，…，$n-1$），那么称 A_n 为 E 数列。记 $S(A_n)=a_1+a_2+\cdots+a_n$.

（1）写出一个满足 $a_1=a_5=0$，且 $S(A_5)>0$ 的 E 数列 A_5；

（2）假设 $a_1=12$，$n=2000$，证明：E 数列 A_n 是递增数列的充要条件是 $a_n=2011$；

（3）对任意给定的整数 $n(n\geq 2)$，是否存在首项为 0 的 E 数列 A_n，使得 $S(A_n)=0$？如果存在，写出一个满足条件的 E 数列 A_n；如果不存在，说明理由。

解：（Ⅰ）0，1，2，1，0 是一具满足条件的 E 数列 A_5。
（答案不唯一，0，1，0，1，0 也是一个满足条件的 E 的数列 A_5）

（Ⅱ）必要性：因为 E 数列 A_5 是递增数列，所以 $a_{k+1}-a_k=1(k=1,2,\cdots,1999)$.

所以 A_5 是首项为 12，公差为 1 的等差数列. 所以 $a_{2000}=12+(2000-1)\times 1=2024$.

充分性，由于 $a_{2000}-a_{1000}\leq 1$，

$a_{2000}-a_{1000}\leq 1$

……

$a_2-a_1\leq 1$

所以 $a_{2000}-a\leq 19999$，即 $a_{2000}\leq a_1+1999$.

又因为 $a_1=12$，$a_{2000}=2024$, 所以 $a_{2000}=a_1+1999$.

故 $a_{n+1}-a_n=1>0(k=1,2,\cdots,1999)$, 即 A_n 是递增数列. 综上，结论得证。

（Ⅲ）令 $c_k=a_{k+1}-a_k=1>0(k=1,2,\cdots,n-1)$, 则 $c_A=\pm 1$.

因为 $a_2=a_1+c_1+a_1=a_1+c_1+c_2$

……

$a_n=a_1+c_1+c_2+\cdots+c_{n+1}$，

所以 $S(A_n)=na_1+(n-1)c_1+(n-2)c_2+(n-3)c_3+\cdots+c_{n-1}$

$= \frac{n(n-1)}{2} - [(1-c_1)(n-1) + (1-c_2)(n-2) + \square \ + (1-c_{n-1})].$

因为$c_k = \pm 1$,所以$1-c_k$为偶数$(k = 1, \square \ , n-1).$

所以$*1-c_1)(n-1) + (1-c_2)(n-2) + \square \ + (1-c_n)$为偶数,

所以要使$S(A_n) = 0$,必须使$\frac{n(n-1)}{2}$为偶数,

即 4 整除$n(n-1)$,亦即$n = 4m$或$n = 4m+1(m \in N^*)$.

当

$n = 4m+1(m \in N^*)$时,E数列A_n的项满足$a_{4k+1} = a_{4k-1} = 0, a_{4k-2} = -1, \ a_{4k} = 1$

$(k = 1,2, \square \ , m)$时，有$a_1 = 0, S(A_n) = 0;$

$a_{4k} = 1(k = 1,2, \square \ , m), a_{4k+1} = 0$时,有$a_1 = 0, S(A_n) = 0;$

当$n = 4m+1(m \in N^*)$时,E数列A_n的项满足，$a_{4k-1} = a_{3k-3} = 0, a_{4k-2} = -1,$

当$n = 4m+2$或$n = 4m+3(m \in N)$时,$n(m-1)$不能被 4 整除，此时不存在 E 数列

A_n，

使得$a_1 = 0, S(A_n) = 0.$

北京文

〔14〕设$A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(t+4,3)$， $D(t,3)$。记$N(t)$为平行四边形$ABCD$内部〔不含边界〕的整点的个数，其中整点是指横、纵坐标都是整数的点，那么$N(0) =$_____；$N(t)$的所有可能取值为_____。6；6，7，8

〔20〕〔本小题共 13 分〕

假设数列$A_n : a_1, a_2, \text{L} \ a_n (n \geq 2)$满足$|a_{k+1} - a_k| = 1(k = 1,2, \text{L} \ , n-1)$，那么称$A_n$为$E$数列，记$S(A_n) = a_1 + a_2 + \text{L} \ + a_n$。

〔I〕写出一个E数列A_5满足$a_1 = a_3 = 0$；

〔II〕假设$a_1 = 12, n = 2000$，证明：E数列A_n是递增数列的充要条件是$a_n = 2011$

〔III〕在$a_1 = 4$的E数列A_n中，求使得$S(A_n) = 0$成立的n的最小值

解：〔Ⅰ〕0，1，0，1，0 是一具满足条件的 E 数列A_5。

〔答案不唯一，0，1，0，-1，0 也是一个满足条件的 E 的数列A_5〕

〔Ⅱ〕必要性：因为E数列A_5是递增数列，所以$a_{k+1}-a_k=1(k=1,2,\cdots,1999)$.

所以A_5是首项为12，公差为1的等差数列.所以a_{2000}=12+〔2000—1〕×1=2024.

充分性，由于$a_{2000}-a_{1000}\leqslant 1$，

$a_{2000}-a_{1000}\leqslant 1$

……

$a_2-a_1\leqslant 1$

所以$a_{2000}-a\leqslant 19999$，即$a_{2000}\leqslant a_1+1999$.

又因为$a_1=12$，$a_{2000}=2024$,所以$a_{2000}=a_1+1999$.

故$a_{n+1}-a_n=1>0(k=1,2,\cdots,1999)$,即$A_n$是递增数列.综上，结论得证。

〔Ⅲ〕$\left|a_{k+1}-a_k\right|=1\Rightarrow a_{k+1}-a_k\geq -1\Rightarrow a_{k+1}\geq a_k-1$

所以有：$a_2\geq a_1-1=3$，$a_3\geq a_2-1\geq 2$，$a_4\geq a_3-1\geq 1$，…，$a_8\geq a_7-1\geq -3$；

$a_9\geq a_8-1\geq -4$

相加得：$a_1+a_2+\cdots+a_9\geq 0$，所以在$a_1=4$的E数列A_n中，使得$S(A_n)=0$成立的n的最小值为9。

福建理

16.（本小题总分值13分） 等比数列$\{a_n\}$的公比$q=3$，前3项和$S_3=\frac{13}{3}$.

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（Ⅱ）假设函数$f(x)=A\sin(2x+\varphi)(A>0,0<\varphi<\pi)$在$x=\frac{\pi}{6}$处取得最大值，且最大值为$a_3$，求函数$f(x)$的解析式.

解：（Ⅰ）**由**$q=3,S_3=\frac{13}{3}$**得**$a_1=\frac{1}{3}$**，所以**$a_n=3^{n-2}$**；**

（Ⅱ）由（Ⅰ）得$a_3=3$，因为函数$f(x)$最大值为3，所以$A=3$，

又当$x=\frac{\pi}{6}$时函数$f(x)$取得最大值，所以$\sin(\frac{\pi}{3}+\varphi)=1$，因为$0<\varphi<\pi$，故$\varphi=\frac{\pi}{6}$，

所以函数$f(x)$的解析式为$f(x)=3\sin(2x+\frac{\pi}{6})$。

福建文17.〔本小题总分值12分〕

数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_3=-3$。〔Ⅰ〕求数列$\{a_n\}$的通项公式；

〔Ⅱ〕假设数列$\{a_n\}$的前k项和$S_k=-35$，求k的值。

解：〔Ⅰ〕由$a_1=1$，$a_3=-3$得$d=-2$，所以$a_n=3-2n$;

〔Ⅱ〕$S_k=k-k(k-1)=-35$，解得$k=7$。

广东理 11. 等差数列$\{a_n\}$前 9 项的和等于前 4 项的和. 假设$a_1=1, a_k+a_4=0$，那么$k=$_____.

解法一：$S_9=S_4$,即$\frac{(a_1+a_9)9}{2}=\frac{(a_1+a_4)4}{2}$,$\therefore 9a_5=2(a_1+a_4)$,即$9(1+4\mathrm{d})=2(2+3\mathrm{d}),\therefore \mathrm{d}=-\frac{1}{6}$,

由$1-\frac{1}{6}(k-1)+1+3\cdot(-\frac{1}{6})=0$得：$\mathrm{k}=10$.

解法二：$S_9=S_4,\therefore a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=0,\therefore a_7=0$,从而$a_4+a_{10}=2a_7=0,\therefore k=10$.

20.〔本小题总分值 12 分〕

设$b>0$,数列$\{a_n\}$满足$a_1=b, a_n=\frac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+2n-2}(n\geq 2)$,

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)证明：对于一切正整数 n, $a_n\leq\frac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$

解: (1) 由$a_n=\frac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+2n-2}$可得$\frac{n}{a_n}=\frac{2}{b}\cdot\frac{n-1}{a_{n-1}}+\frac{1}{b}$,

当$b=2$时,$\frac{n}{a_n}=\frac{n-1}{a_{n-1}}+\frac{1}{2}$,则数列$\{\frac{n}{a_n}\}$是以$\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$为首项,$\frac{1}{2}$为公差的等差数列,$\therefore\frac{n}{a_n}=\frac{n}{2}$,从而$a_n=2$.

当$b\neq 2$时,$\frac{n}{a_n}+\frac{1}{2-b}=\frac{2}{b}(\frac{n-1}{a_{n-1}}+\frac{1}{2-b})$,

则数列$\{\frac{n}{a_n}+\frac{1}{2-b}\}$是以$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{2-b}=\frac{2}{b(2-b)}$为首项,$\frac{2}{b}$为公比的等比数列,

$\therefore\frac{n}{a_n}+\frac{1}{2-b}=\frac{2}{b(2-b)}\cdot(\frac{2}{b})^{n-1}=\frac{1}{2-b}\cdot(\frac{2}{b})^n,\therefore a_n=\frac{nb^n(2-b)}{2^n-b^n}$,

综上$a_n=\begin{cases}2, & (b=2)\\ \frac{nb^n(2-b)}{2^n-b^n} & (b>0,b\neq 2)\end{cases}$.

(2) 当b=2时, $a_n=2,\frac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1=2,\therefore a_n=\frac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$, 从而原不等式成立;

当$b\neq 2$时, 要证$a_n\le\frac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$, 只需证$\frac{nb^n(2-b)}{2^n-b^n}\le\frac{b^{n+1}}{2^{n+1}}+1$,即证$\frac{n(2-b)}{2^n-b^n}\le\frac{b}{2^{n+1}}+\frac{1}{b^n}$,

即证$\frac{n}{2^{n-1}+2^{n-2}b+2^{n-3}b^2+\mathrm{L}\ +2b^{n-2}+b^{n-1}}\le\frac{b}{2^{n+1}}+\frac{1}{b^n}$,

即证$n\le\frac{2^{n-1}}{b^n}+\frac{2^{n-2}}{b^{n-1}}+\frac{2^{n-3}}{b^{n-2}}+\mathrm{L}\ +\frac{2}{b^2}+\frac{1}{b}+\frac{b}{2^2}+\frac{b^2}{2^3}+\mathrm{L}\ +\frac{b^{n-1}}{2^n}+\frac{b^n}{2^{n+1}}$,

而上式左边=$(\frac{2^{n-1}}{b^n}+\frac{b^n}{2^{n+1}})+(\frac{2^{n-2}}{b^{n-1}}+\frac{b^{n-1}}{2^n})+\mathrm{L}\ +(\frac{2}{b^2}+\frac{b^2}{2^3})+(\frac{1}{b}+\frac{b}{2^2})$

$\ge 2\sqrt{\frac{2^{n-1}}{b^n}\cdot\frac{b^n}{2^{n+1}}}+2\sqrt{\frac{2^{n-2}}{b^{n-1}}\cdot\frac{b^{n-1}}{2^n}}+\mathrm{L}\ +2\sqrt{\frac{2}{b^2}\cdot\frac{b^2}{2^3}}+2\sqrt{\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{2^2}}=n$

$\therefore$当$b\neq 2$时,原不等式也成立,从而原不等式成立.

广东文 11．$\{a_n\}$是递增等比数列，$a_2=2,a_4-a_3=4$，那么此数列的公比$q=$_____．2

20.〔本小题总分值 14 分〕

设 b>0, 数列$\{a_n\}$满足$a_1=b$, $a_n=\frac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+n-1}(n\ge 2)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）证明：对于一切正整数n, $2a_n\le b^{n+1}+1$.

解：〔1〕由$a_1=b>0$可知$a_n=\frac{nba_{n-1}}{a_{n-1}+n-1},\therefore\frac{n}{a_n}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\frac{n-1}{a_{n-1}}$,令$A_n=\frac{n}{a_n}$,则$A_1=\frac{1}{b}$,

当$n\ge 2$时，$A_n=\frac{1}{b}+\frac{1}{b}A_{n-1}=\frac{1}{b}+\mathrm{K}\ +\frac{1}{b^{n-1}}+\frac{1}{b^{n-1}}A_1=\frac{1}{b}+\mathrm{K}\ +\frac{1}{b^{n-1}}+\frac{1}{b^n}$

①当$b\neq 1$时，$A_n=\frac{\frac{1}{b}(1-\frac{1}{b^n})}{1-\frac{1}{b}}=\frac{b^n-1}{b^n(b-1)}$；②当$b=1$时，$A_n=n\ \therefore a_n=\begin{cases}\frac{nb^n(b-1)}{b^n-1},b\neq 1\\ 1,b=1\end{cases}$；

〔2〕当$b\neq 1$时，欲证$2a_n=\frac{2nb^n(b-1)}{b^n-1}\le b^{n+1}+1$,

只需证$2nb^n\le(b^{n+1}+1)\frac{b^n-1}{b-1}$,

$\mathrm{Q}\ (b^{n+1}+1)\frac{b^n-1}{b-1}=b^{2n}+b^{2n-1}+\mathrm{K}\ +b^{n+1}+b^{n-1}+b^{n-2}+\mathrm{K}\ +1$

$=b^n(b^n+\frac{1}{b^n}+b^{n-1}+\frac{1}{b^{n-1}}+\mathsf{K}\ +b+\frac{1}{b})$

$>b^n(2+2+\mathsf{K}\ +2)=2nb^n$，$\therefore 2a_n=\frac{2nb^n(b-1)}{b^n-1}<1+b^{n+1}$；

当$b=1$时，$2a_n=2=b^{n+1}+1$，综上所述$2a_n\le b^{n+1}+1$。

湖北理 12.?九章算术?“竹九节”问题：现有一根 9 节的竹子，自上而下各节的容积成等差数列，上面 4 节的容积共 3 升，下面 3 节的容积共 4 升，那么第 5 节的容积为_____升.

【答案】$\frac{67}{66}$

解析：设该数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公差为d，依题意

$\begin{cases}a_1+a_2+a_3+a_4=3\\a_7+a_8+a_9=4\end{cases}$，即$\begin{cases}4a_1+6d=3\\3a_1+21d=4\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_1+7d=\frac{4}{3}\\d=\frac{7}{66}\end{cases}$，

那么$a_5=a_1+4d=a_1+7d-3d=\frac{4}{3}-\frac{21}{66}=\frac{67}{66}$，所以应该填$\frac{67}{66}$.

19.〔本小题总分值 13 分〕

数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足：$a_1=a\ (a\neq 0)$，$a_{n+1}=rS_n\ \ (n\in\mathbb{N}^*,\ r\in R,r\neq -1)$.

〔Ⅰ〕求数列$\{a_n\}$的通项公式；

〔Ⅱ〕假设存在$k\in\mathbb{N}^*$，使得S_{k+1}，S_k，S_{k+2}成等差数列，试判断：对于任意的$m\in\mathbb{N}^*$，且$m\ge 2$，a_{m+1}，a_m，a_{m+2}是否成等差数列，并证明你的结论.

解：〔Ⅰ〕由：$a_{n+1}=rS_n$得$a_{n+2}=rS_{n+1}$，两式相减得$a_{n+2}=(r+1)a_{n+1}$，又$a_2=ra$

所以当$r=0$时数列$\{a_n\}$为：a，0，0，0，…，

当$r\neq 0,r\neq -1$时，由$a\neq 0$，所以$a_n\neq 0$，$n\in N^*$，于是$\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=1+r,(n\in N^*)$

所以数列$a_2,a_3,\mathsf{L}\ ,a_n$成等比数列，即当$n\ge 2$时$a_n=r(1+r)^{n-2}a$

综上数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=\begin{cases}a & n=1\\r(1+r)^{n-2}a, & n\ge 2\end{cases}$

〔Ⅱ〕对于任意的$m\in N^*$，且$m\ge 2$，a_{m+1}，a_m，a_{m+2}成等差数列，证明如下：

当$r=0$时由〔Ⅰ〕知$a_n=\begin{cases}a & n=1\\0 & n\geq 2\end{cases}$，此时$a_{m+1}$，$a_m$，$a_{m+2}$成等差数列；

当$r\neq 0,r\neq -1$时，假设存在$k\in$ N*，使得S_{k+1}，S_k，S_{k+2}成等差数列，那么$2S_k=S_{k+1}+S_{k+2}$

$\therefore 2a_{k+1}+a_{k+2}=0$，由〔Ⅰ〕知数列$a_2,a_3,\cdots,a_n$的公比$r+1=-2$，于是对于任意的$m\in$N*，且$m\geq 2$，

$a_{m+2}=-2a_{m+1}\Rightarrow a_{m+2}=4a_m$；所以$2a_m=a_{m+1}+a_{m+2}$即$a_{m+1}$，$a_m$，$a_{m+2}$成等差数列；

综上：对于任意的$m\in N^*$，且$m\geq 2$，a_{m+1}，a_m，a_{m+2}成等差数列。

湖北文 17.〔本小题总分值 12 分〕

成等差数列的三个正数的和等于 15，并且这三个数分别加上 2、5、13 后成为等比数列$\{b_n\}$中的b_3、b_4、b_5。

(I) 求数列$\{b_n\}$的通项公式；

(II) 数列$\{b_n\}$的前 n 项和为S_n，求证：数列$\left\{S_n+\frac{5}{4}\right\}$是等比数列。

解：(I) 设成等差数列的三个正数分别为$a-d,a,a+d$；那么$a-d+a+a+d=15\Rightarrow a=5$；

数列$\{b_n\}$中的b_3、b_4、b_5依次为$7-d,10,18+d$，那么$(7-d)(18+d)=100$；

得$d=2$或$d=-13$〔舍〕，于是$b_3=5,b_4=10\Rightarrow b_n=5\cdot 2^{n-3}$

(II) 数列$\{b_n\}$的前 n 项和$S_n=5\cdot 2^{n-2}-\frac{5}{4}$，即$S_n+\frac{5}{4}=5\cdot 2^{n-2}\Rightarrow\frac{S_{n+1}+\frac{5}{4}}{S_n+\frac{5}{4}}=\frac{5\cdot 2^{n-1}}{5\cdot 2^{n-2}}=2$

因此数列$\left\{S_n+\frac{5}{4}\right\}$是公比为 2 的等比数列。

湖南文 20.〔此题总分值 13 分〕

某企业在第 1 年初购置一台价值为 120 万元的设备 M，M 的价值在使用过程中逐年减少，从第 2 年到第 6 年，每年初 M 的价值比上年初减少 10 万元；从第 7 年开始，每年初 M 的价值为上年初的 75%.

〔I〕求第 n 年初 M 的价值a_n的表达式；

〔II〕设 $A_n=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$,假设 A_n 大于 80 万元，那么 M 继续使用，否那么须在第 n 年初对 M 更新，证明：须在第 9 年初对 M 更新.

解析：〔I〕当 $n\le 6$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是首项为 120，公差为 -10 的等差数列.

$$a_n=120-10(n-1)=130-10n;$$

当 $n\ge 6$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是以 a_6 为首项，公比为 $\dfrac{3}{4}$ 为等比数列，又 $a_6=70$，所以

$$a_n=70\times(\frac{3}{4})^{n-6};$$

因此，第 n 年初，M 的价值 a_n 的表达式为 $a_n=\begin{cases}120-10(n-1)=130-10n, n\le 6\\ a_n=70\times(\dfrac{3}{4})^{n-6}, n\ge 7\end{cases}$

(II)设 S_n 表示数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，由等差及等比数列的求和公式得

当 $1\le n\le 6$ 时，$S_n=120n-5n(n-1), A_n=120-5(n-1)=125-5n;$

当 $n\ge 7$ 时，

$$S_n=S_6+(a_7+a_8+\cdots+a_n)=570+70\times\frac{3}{4}\times 4\times[1-(\frac{3}{4})^{n-6}]=780-210\times(\frac{3}{4})^{n-6}$$

$$A_n=\frac{780-210\times(\frac{3}{4})^{n-6}}{n}.$$

因为 $\{a_n\}$ 是递减数列，所以 $\{A_n\}$ 是递减数列，又

$$A_8=\frac{780-210\times(\frac{3}{4})^{8-6}}{8}=82\frac{47}{64}>80, A_9=\frac{780-210\times(\frac{3}{4})^{9-6}}{9}=76\frac{79}{96}<80,$$

所以须在第 9 年初对 M 更新.

湖南理 12、设 S_n 是等差数列 $\{a_n\}(n\in N^*)$ 的前 n 项和，且 $a_1=1, a_4=7$，那么 $S_5=$_____

答案：25

解析：由 $a_1=1, a_4=7$ 可得 $a_1=1, d=2, a_n=2n-1$，所以 $S_5=\dfrac{(1+9)\times 5}{2}=25$。

江苏 13. 设 $1=a_1\le a_2\le\cdots\le a_7$，其中 a_1, a_3, a_5, a_7 成公比为 q 的等比数列，a_2, a_4, a_6 成公差为 1 的等差数列，那么 q 的最小值是_____.

答案：$\sqrt[3]{3}$.

解析：由题意：$1=a_1\le a_2\le q\le a_2+1\le q^2\le a_2+2\le q^3$，

$\therefore a_2 \le q \le a_2+1, a_2+1 \le q^2 \le a_2+2$

$q^3 \ge a_2+2 \ge 3$，而 $Q\, a_2 \ge 1, a_1=1, \therefore a_2, a_2+1, a_2+2$ 的最小值分别为 1，2，3；

$\therefore q_{\min}=\sqrt[3]{3}$.

此题主要考查综合运用等差、等比的概念及通项公式，不等式的性质解决问题的能力，考查抽象概括能力和推理能力，此题属难题.

20.〔本小题总分值 16 分〕设 M 为局部正整数组成的集合，数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，前 n 项和为 S_n，对任意整数 k 属于 M，当 n>k 时，$S_{n+k}+S_{n-k}=2(S_n+S_k)$ 都成立.

〔1〕设 M= {1}，$a_2=2$，求 a_5 的值；〔2〕设 M= {3，4}，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

答案：〔1〕 $Q\, k=1, \therefore \forall n>1, S_{n+1}+S_{n-1}=2(S_n+S_1), \therefore S_{n+2}+S_n=2(S_{n+1}+S_1)$ 即：

$a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}$

所以，n>1 时，$\{a_n\}$ 成等差，而 $a_2=2$，$S_2=3, S_3=2(S_2+S_1)-S_1=7, \therefore a_3=4, \therefore a_5=8;$

〔2〕由题意：$\forall n>3, S_{n+3}+S_{n-3}=2(S_n+S_3),(1); \forall n>4, S_{n+4}+S_{n-4}=2(S_n+S_4),(2)$，

$\forall n>2, S_{n+4}+S_{n-2}=2(S_{n+1}+S_3),(3); \forall n>3, S_{n+5}+S_{n-3}=2(S_{n+1}+S_4),(4);$

当 $n \ge 5$ 时，由〔1〕〔2〕得：$a_{n+4}-a_{n-3}=2a_4,(5)$

由〔3〕〔4〕得：$a_{n+5}-a_{n-2}=2a_4,(6)$

由〔1〕〔3〕得：$a_{n+4}+a_{n-2}=2a_{n+1},(7);$

由〔2〕〔4〕得：$a_{n+5}+a_{n-3}=2a_{n+1},(8);$

由〔7〕〔8〕知：$a_{n+4}, a_{n+1}, a_{n-2}$，成等差，$a_{n+5}, a_{n+1}, a_{n-3}$，成等差；设公差分别为：$d_1, d_2$，

由〔5〕〔6〕得：

$a_{n+5}=a_{n-3}+2d_2=a_{n+4}-2a_4+2d_2,(9); a_{n+4}=a_{n-2}+2d_1=a_{n+5}-2a_4+2d_1,(10);$

由〔9〕〔10〕得：$a_{n+5}-a_{n+4}=d_2-d_1, 2a_4=d_1+d_2, a_{n-2}-a_{n-3}=d_2-d_1; \therefore \{a_n\}(n \ge 2)$ 成等差，设公差为 d，

在〔1〕〔2〕中分别取 n=4，n=5 得：$2a_1+6a_2+15d=2(2a_1+5a_2+5d)$，即 $4a_2-5d=-2;$

$2a_1+8a_2+28d=2(2a_1+7a_2+9d)$,即$3a_2-5d=-1$

$\therefore a_2=3,d=2,\therefore a_n=2n-1.$

解析：此题主要考查数列的概念,通项与前 n 项和的关系,等差数列概念及根本性质、和与通项关系、集合概念、全称量词,转化与化归、考查分析探究及逻辑推理解决问题的能力，其中〔1〕是中等题，〔2〕是难题.

江西理 5. 数列$\{a_n\}$的前n项和S_n满足：$S_n+S_m=S_{n+m}$，且$a_1=1$，那么$a_{10}=$

A. 1　　B. 9　　C. 10　　D. 55

【答案】A

【解析】$S_2=S_1+S_1=2$，可得$a_2=1$，$S_3=S_1+S_2=3$，可得$a_3=S_3-S_2=1$，同理可得$a_4=a_5=\square=a_{10}=1$，应选 A

18. 〔本小题总分值 12 分〕

两个等比数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，满足$a_1=a\ (a>0)$，$b_1-a_1=1$，$b_2-a_2=2$，$b_3-a_3=3$.

〔1〕假设$a=1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式；

〔2〕假设数列$\{a_n\}$唯一，求a的值.

【解析】〔1〕设$\{a_n\}$的公比为q，那么$b_1=1+a=2$，$b_2=2+aq=2+q$，

$b_3=3+aq^2=3+q^2$，由b_1，b_2，b_3成等比数列得$(2+q)^2=2(3+q^2)$，

即$q^2-4q+2=0$，解得$q_1=2+\sqrt{2}$，$q_2=2-\sqrt{2}$

所以$\{a_n\}$的通项公式$a_n=(2+\sqrt{2})^{n-1}$或$a_n=(2-\sqrt{2})^{n-1}$.

〔2〕设$\{a_n\}$的公比为q,那么由$(2+aq)^2=(1+q)(3+aq^2)$,得$aq^2-4aq+3a-1=0(*)$

由$a>0$得$\Delta=4a^2+4a>0$，故方程〔*〕有两个不同的实根.

由$\{a_n\}$唯一，知方程〔*〕必有一根为 0，代入〔*〕得$a=\frac{1}{3}$.

江西文 5. 设$\{a_n\}$为等差数列，公差 d = -2，S_n为其前 n 项和. 假设$S_{10}=S_{11}$，那么$a_1=$〔　　〕

A. 18　　B. 20　　C. 22　　D. 24

答案：B　　解析：$\square\ S_{10}=S_{11},\therefore a_{11}=0$

$a_{11}=a_1+10d,\therefore a_1=20$

21.(本小题总分值 14 分〕

〔1〕两个等比数列$\{a_n\},\{b_n\}$，满足$a_1=a(a>0),b_1-a_1=1,b_2-a_2=2,b_3-a_3=3$，

假设数列$\{a_n\}$唯一，求a的值；

〔2〕是否存在两个等比数列$\{a_n\},\{b_n\}$，使得$b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3,b_4-a_4$成公差不为0的等差数列？假设存在，求$\{a_n\},\{b_n\}$的通项公式；假设不存在，说明理由.

解：〔1〕$\{a_n\}$要唯一，∴当公比$q_1\neq 0$时，由$b_1=1+a=2,b_2=2+a_2,b_3=3+a_3$且

$b_2^{\ 2}=b_1b_3\Rightarrow(2+aq_1)^2=(1+a)(3+aq_1^{\ 2})\Rightarrow aq_1^{\ 2}-4aq_1+3a-1=0$，

$a>0$，$\therefore aq_1^{\ 2}-4aq_1+3a-1=0$最少有一个根〔有两个根时，保证仅有一个正根〕

$\therefore(4a)^2-4a(3a-1)\geq 0\Rightarrow 4a(a+1)\geq 0$，此时满足条件的a有无数多个，不符合。

∴当公比$q_1=0$时，等比数列$\{a_n\}$首项为a，其余各项均为常数0，唯一，此时由

$(2+aq_1)^2=(1+a)(3+aq_1^{\ 2})\Rightarrow aq_1^{\ 2}-4aq_1+3a-1=0$，可推得$3a-1=0,a=\frac{1}{3}$符合

综上：$a=\frac{1}{3}$。

〔2〕假设存在这样的等比数列$\{a_n\},\{b_n\}$,公比分别为q_1，q_2，那么由等差数列的性质可得：

$(b_2-a_2)+(b_3-a_3)=(b_1-a_1)+(b_4-a_4)$，整理得：$(b_1-b_3)(q_2-1)=(a_1-a_3)(q_1-1)$

要使该式成立，那么$q_2-1=q_1-1=0\Rightarrow q_1=q_2=1$或$b_1=b_3=a_1=a_3=0$此时数列

b_2-a_2，b_3-a_3公差为0与题意不符，所以不存在这样的等比数列$\{a_n\},\{b_n\}$。

辽宁理17.〔本小题总分值12分〕

等差数列$\{a_n\}$满足$a_2=0$，$a_6+a_8=-10$

〔I〕求数列$\{a_n\}$的通项公式；

〔II〕求数列$\left\{\frac{a_n}{2^{n-1}}\right\}$的前$n$项和.

〔I〕设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，由条件可得$\begin{cases}a_1+d=0,\\2a_1+12d=-10,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a_1=1,\\d=-1.\end{cases}$故数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=2-n.$ ……5分

〔II〕设数列$\{\frac{a_n}{2^{n-1}}\}$的前n项和为S_n，即$S_n=a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}$,故$S_1=1$，

$\frac{S_n}{2}=\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{4}+\cdots+\frac{a_n}{2^n}$.所以，当$n>1$时，$\frac{S_n}{2}=a_1+\frac{a_2-a_1}{2}+\cdots+\frac{a_n-a_{n-1}}{2^{n-1}}-\frac{a_n}{2^n}$

$=1-(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{2-n}{2^n})=1-(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2-n}{2^n}$

所以$S_n=\frac{n}{2^{n-1}}$.综上，数列$\{\frac{a_n}{2^{n-1}}\}$的前n项和$S_n=\frac{n}{2^{n-1}}$. ……12 分

辽宁文 5．假设等比数列$\{a_n\}$满足$a_na_{n+1}=16^n$，那么公比为 B

A．2 B．4 C．8 D．16

15．S_n为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和，$S_2=S_6$，$a_4=1$，那么 a_5=_____．—1

全国Ⅰ理

〔17〕〔本小题总分值 12 分〕

等比数列$\{a_n\}$的各项均为正数，且$2a_1+3a_2=1, a_3^2=9a_2a_6$.

〔Ⅰ〕求数列$\{a_n\}$的通项公式；

〔Ⅱ〕设 $b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+.....+\log_3 a_n$,求数列$\{\frac{1}{b_n}\}$的前 n 项和.

〔17〕解：〔Ⅰ〕设数列{a_n}的公比为 q，由$a_3^2=9a_2a_6$得$a_3^3=9a_4^2$所以$q^2=\frac{1}{9}$。

由条件可知 a>0,故$q=\frac{1}{3}$。

由$2a_1+3a_2=1$得$2a_1+3a_2q=1$，所以$a_1=\frac{1}{3}$。

故数列{a_n}的通项式为$a_n=\frac{1}{3^n}$。

〔Ⅱ 〕$b_n=\log_3 a_1+\log_3 a_2+...+\log_3 a_n=-(1+2+\cdots+n)=-\frac{n(n+1)}{2}$

故$\frac{1}{b_n}=-\frac{2}{n(n+1)}=-2(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$

$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+...+\frac{1}{b_n}=-2((1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+...+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}))=-\frac{2n}{n+1}$

所以数列$\{\frac{1}{b_n}\}$的前 n 项和为$-\frac{2n}{n+1}$

全国Ⅰ文〔17〕〔本小题总分值 12 分〕

设等差数列$\{a_n\}$满足$a_3=5$，$a_{10}=-9$。

〔Ⅰ〕求$\{a_n\}$的通项公式；

〔Ⅱ〕求$\{a_n\}$的前n项和S_n及使得S_n最大的序号n的值。

解：〔Ⅰ〕由$a_n=a_1+(n-1)d$及$a_3=5$，$a_{10}=-9$得$a_1=9,d=-2$；

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=11-2n$

〔Ⅱ〕$S_n=10n-n^2=-(n-5)^2+25$，所以$n=5$时S_n取得最大值。

全国Ⅱ理〔4〕设S_n为等差数列$\{a_n\}$的前n项和，假设$a_1=1$，公差$d=2$，

$S_{k+2}-S_k=24$，那么$k=$

(A) 8　　(B) 7　　(C) 6　　(D) 5

【答案】：D

【命题意图】：本小题主要考查等差数列的通项公式及前n项和公式等有关知识。

【解析】：$S_{k+2}-S_k=a_{k+2}+a_{k+1}=2a_{k+1}+d=2(a_1+kd)+d=2(1+2k)+2=24$，解得

$k=5$。

另外：此题也可用等差数列的前n项和公式进行计算。

〔20〕〔本小题总分值12分〕〔注意：在试题卷上作答无效〕

设数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$且$\frac{1}{1-a_{n+1}}-\frac{1}{1-a_n}=1$.

〔Ⅰ〕求$\{a_n\}$的通项公式；

〔Ⅱ〕设$b_n=\frac{1-\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{n}}$，记$S_n=\sum_{k=1}^{n}b_k$，证明：$S_n<1$.

【命题立意】：本小题主要考查数列的通项公式、等差数列的概念、递推数列、不等式等根底知识和根本技能，
同时考查分析、归纳、探究和推理论证问题的能力。在解题过程中也渗透了化归与转化思想方法.难度较小，
学生易得分。

【解析】：〔Ⅰ〕由$\frac{1}{1-a_{n+1}}-\frac{1}{1-a_n}=1$知数列$\left\{\frac{1}{1-a_n}\right\}$是首项为$\frac{1}{1-a_1}=1$，公差为1的等差数列。

$\therefore\frac{1}{1-a_n}=1+(n-1)\cdot 1=n,\therefore a_n=1-\frac{1}{n}$

以上内容仅为本文档的试下载部分，为可阅读页数的一半内容。

如要下载或阅读全文，请访问：

https://d.book118.com/247120051016006126