第 5 章
三角函数

5.1 任意角和弧度制

人教A版2019必修第一册

学习目标

- 1. 了解任意角的概念，区分正角、负角与零角.
- 2. 了解象限角的概念，理解并掌握终边相同的角的概念，能写出终边相同的角所组成的集合.
- 3. 利用象限角和终边相同的角的概念解决简单的问题.

目录

CATALOG

5.1 任意角和弧度制

01

角的相关概念

导入新知

体操是力与美的结合，也充满了角的概念．2002年11月22日，在匈牙利德布勒森举行的第36届世界体操锦标赛中，“李小鹏跳”——“踺子后手翻转体180度接直体前空翻转体900度”，震惊四座，这里的转体180度、 转体900度就是一个角的概念.

应用新知

圆周运动是一种常见的周期性变化现象，如图5.1－1，$\odot O$上的点P以A为起点做逆时针方向的旋转，如何刻画点P的位置变化呢？

我们知道，角可以看成一条射线绕着它的端点旋转所成的图形．在图5.5－1中，射线的端点是圆心O，它从起始位置OA按逆时针方向旋转到终止位置OP，形成一个角α，射线OA，OP分别是角α的始边和终边．当角α确定时，终边OP的位置就确定了．这时，射线OP与$\odot O$的交点P也就确定了．由此想到，可以借助角α的大小变化刻画点P的位置变化．

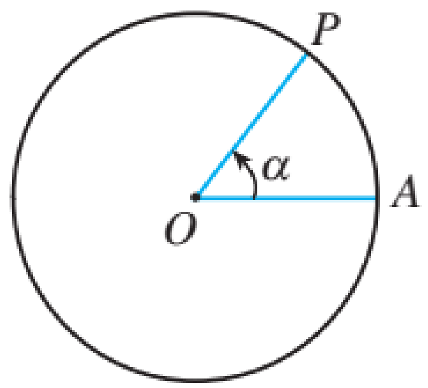


图 5.1-1

学习新知

由初中知识可知,射线OA绕端点O按逆时针方向旋转一周回到起始位置,在这个过程中可以得到$0^\circ \sim 360^\circ$范围内的角. 如果继续旋转,那么所得到的角就超出这个范围了. 所以,为了借助角的大小变化刻画圆周运动,需要先扩大角的范围.

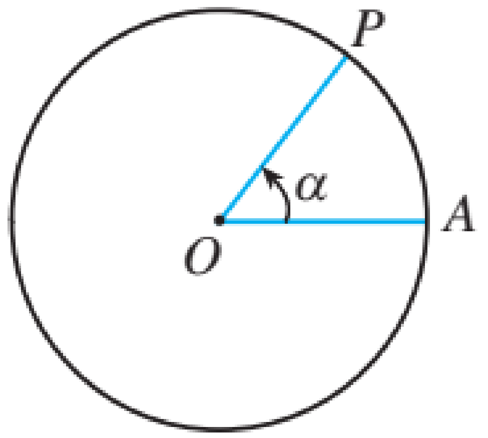


图 5.1-1

学习新知

现实生活中随处可见超出0°～360°范围的角.例如,体操中有“前空翻转体540度”“后空翻转体720度”这样的动作名称,这里不仅有超出0°～360°范围的角,而且旋转的方向也不相同;又如,图5.1－2是两个齿轮旋转的示意图,被动轮随着主动轮的旋转而旋转,而且被动轮与主动轮有相反的旋转方向.这样,OA绕点O旋转所成的角与$O'B$绕点O'旋转所成的角就会有不同的方向.

因此,要准确地描述这些现象,不仅要知道旋转的度数,还要知道旋转的方向,这就需要对角的概念进行推广.

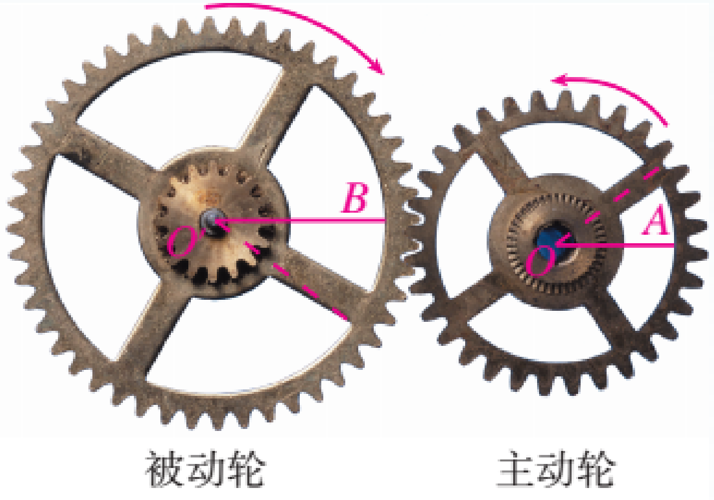


图 5.1-2

学习新知

我们规定，

一条射线绕其端点按逆时针方向旋转形成的角叫做正角，

按顺时针方向旋转形成的角叫做负角.

如果一条射线没有做任何旋转，就称它形成了一个零角.

这样，零角的始边与终边重合.

如果α是零角,那么$\alpha=0^\circ$

学习新知

图5.1－3(1)中的角是一个正角,它等于750°;5.1－3(2)中,正角$\alpha=210°$,负角$\beta=-150°$,$\gamma=-660°$.

正常情况下,如果以零时为起始位置,那么钟表的时针或分针在旋转时所形成的角总是负角.

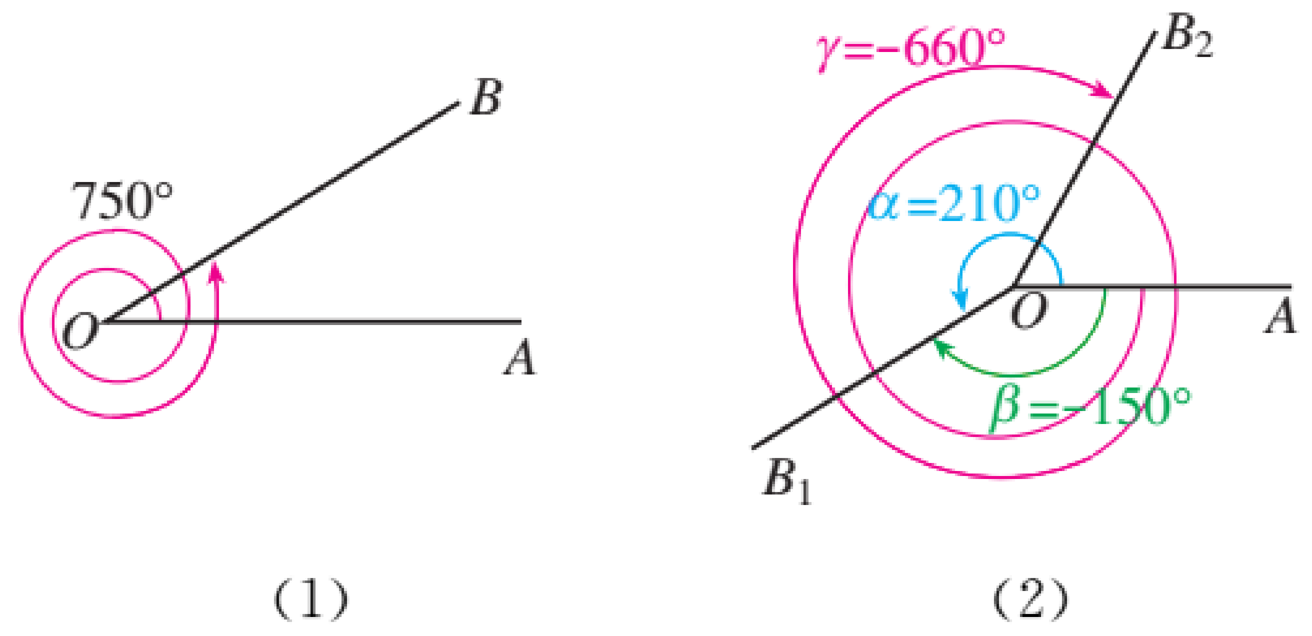


图 5.1-3

学习新知

这样，我们就把角的概念推广到了任意角（any angle），包括正角、负角和零角.

设角α由射线OA绕端点O旋转而成，角β由射线$O'A'$绕端点O'旋转而成.如果它们的旋转方向相同且旋转量相等，那么就称$\alpha=\beta$.

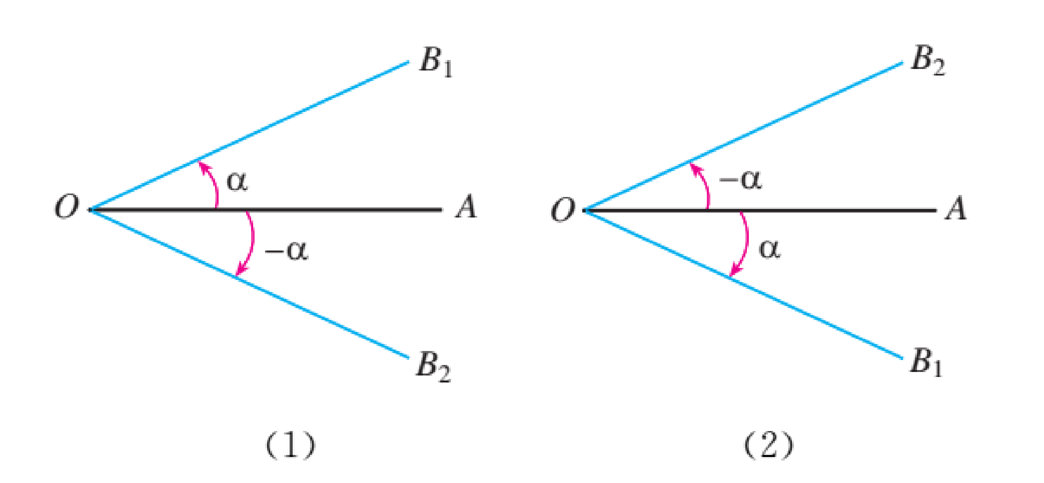
设α，β是任意两个角.我们规定，把角α的终边旋转角β，这时终边所对应的角是$\alpha+\beta$.

学习新知

类似于实数a的相反数是$-a$,我们引入任意角α的相反角的概念.如图5.1-4,我们把射线OA绕端点O按不同方向旋转相同的量所成的两个角叫做互为相反角,角α的相反角记为$-\alpha$,于是,像实数减法的"减去一个数等于加上这个数的相反数"一样,我们有

$$\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$$

这样,角的减法可以转化为角的加法.



学习新知

我们通常在直角坐标系内讨论角．为了方便，使角的顶点与原点重合，角的始边与轴的非负半轴重合．那么，角的终边在第几象限，就说这个角是第几象限角．

例如，图5.1－5中的30°角、－120°角分别是第一象限角和第三象限角．如果角的终边在坐标轴上，那么就认为这个角不属于任何一个象限．

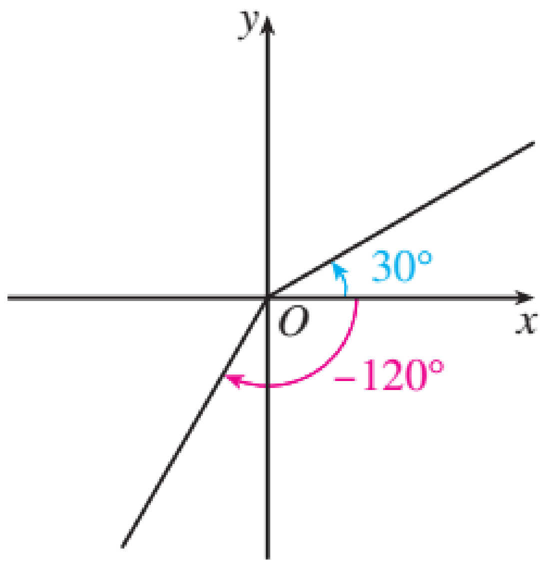
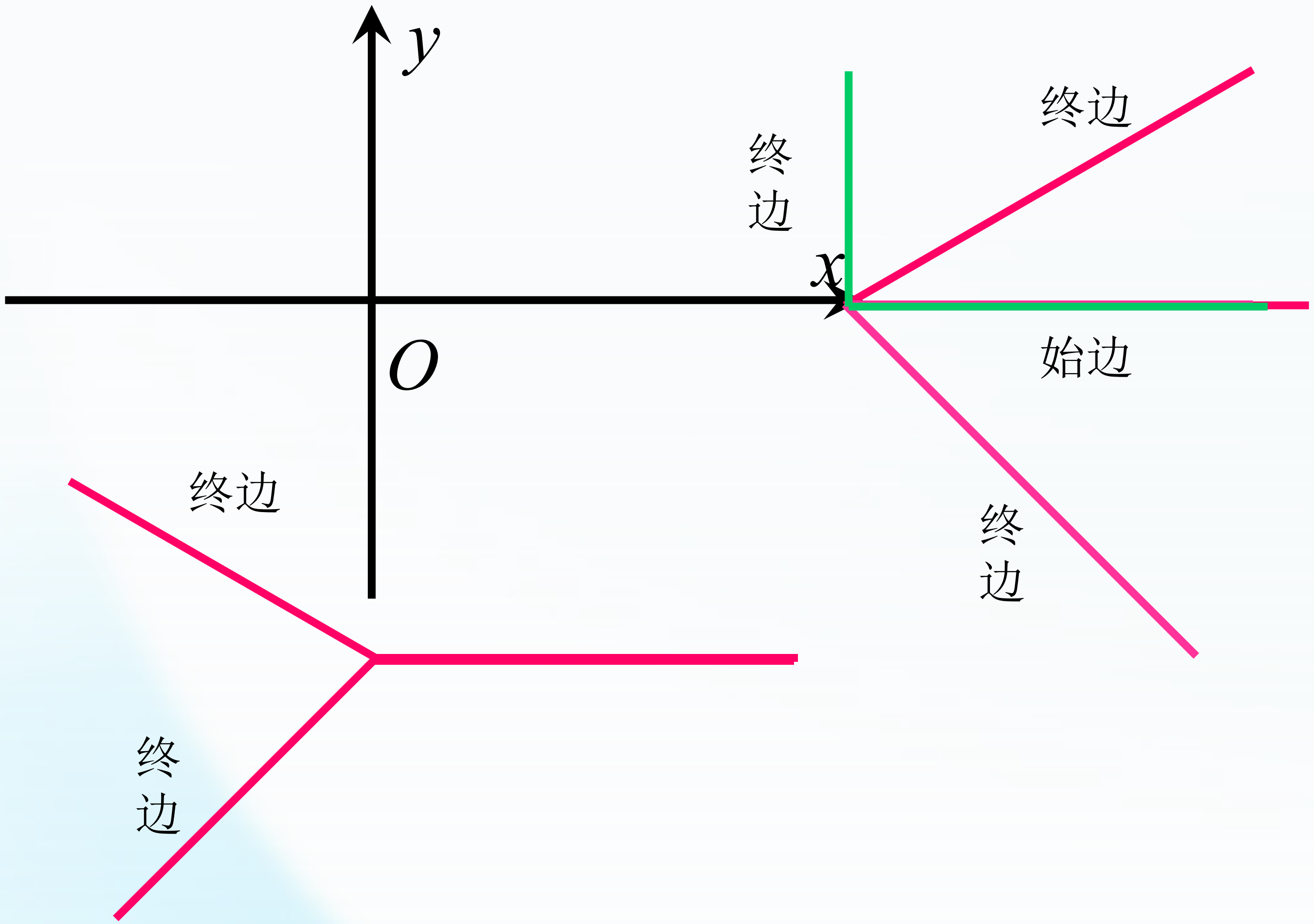


图 5.1-5

你能说说在直角坐标系内讨论角的好处吗？

学习新知



（1）置角的顶点于原点

（2）始边重合于x轴的正半轴 终边落在第几象限就是第几象限角

02

平面直角坐标系中的任意角

学习新知

例1 在$0^\circ \sim 360^\circ$范围内,找出与$-950^\circ 12'$角终边相同的角,并判定它是第几象限的角.

解:$-950^\circ 12' = 129^\circ 48' - 3 \times 360^\circ$,所以在$0^\circ \sim 360^\circ$范围内,与$-950^\circ 12'$角终边相同的角是$129^\circ 48'$,它是第二象限角.

学习新知

【变式】若角 2α与 240°角的终边相同，则角α可以表示为(　　)

A. $120°+k\cdot 360°$，$k\in\mathbf{Z}$　　B. $120°+k\cdot 180°$，$k\in\mathbf{Z}$

C. $240°+k\cdot 360°$，$k\in\mathbf{Z}$　　D. $240°+k\cdot 180°$，$k\in\mathbf{Z}$

【答案】 B

【解析】 因为角 2α与 240°角的终边相同，所以 $2\alpha=240°+k\cdot 360°$，$k\in\mathbf{Z}$，所以$\alpha=120°+k\cdot 180°$，$k\in\mathbf{Z}$.

反思感悟　终边相同的角的表示

(1)与角α终边相同的角都可以表示成$\alpha+k\cdot 360°(k\in\mathbf{Z})$的形式.

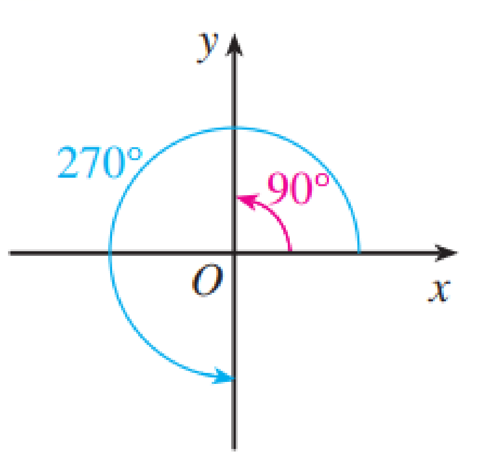
(2)终边相同的角相差360°的整数倍.

(3)终边在同一直线上的角之间相差180°的整数倍.

学习新知

例2 写出终边在y轴上的角的集合.

在$0^\circ \sim 360^\circ$范围内,终边在y轴上的角有两个,即90°, 270°角.



因此,所有与90°角终边相同的角构成集合

$$S_1=\{\beta \mid \beta=90^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}.$$

而所有与270°角终边相同的角构成集合

$$S_2=\{\beta \mid \beta=270^\circ+k\cdot 360^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$$

于是,终边在y轴上的角的集合$S=S_1\cup S_2$

$$=\{\beta \mid \beta=90^\circ+2k\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}\cup\{\beta \mid \beta=90^\circ+180^\circ+2k\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$$

$$=\{\beta \mid \beta=90^\circ+2k\cdot 180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}\cup\{\beta \mid \beta=90^\circ+(2k+1)180^\circ, k\in \mathbf{Z}\}$$

$$=\{\beta \mid \beta=90^\circ+n\cdot 180^\circ, n\in \mathbf{Z}\}$$

学习新知

【变式】写出终边落在直线 $y=-x$ 上的角β的集合 S.

【解析】由于直线 $y=-x$ 是第二、四象限的平分线,

故角α的集合在 0°～360°范围内所对应的两个角分别为 135°及 315°,

从而角α的集合为 $S=\{\alpha|\alpha=135°+k\cdot360°或\alpha=315°+k\cdot360°，k\in Z\}$

$=\{\alpha|\alpha=135°+2k\cdot180°或\alpha=135°+(2k+1)\cdot180°，k\in Z\}$.

所以 $S=\{\alpha|\alpha=135°+k\cdot180°，k\in Z\}$.

若角α的终边在直线 $y=-x$ 上，试写出角α的集合.

反思感悟　终边相同的角的表示

(1)与角α终边相同的角都可以表示成$\alpha+k\cdot360°(k\in Z)$的形式.

(2)终边相同的角相差360°的整数倍.

(3)终边在同一直线上的角之间相差180°的整数倍.

学习新知

例3 写出终边在直线$y=x$上的角的集合S.

S中满足不等式$-360°\le \beta \le 720°$的元素β有哪些?

解:如图,在直角坐标系中画出直线$y=x$,可以发现它与x轴的夹角是45°,在0°~360°范围内,终边在直线$y=x$上的角有两个:45°, 225°

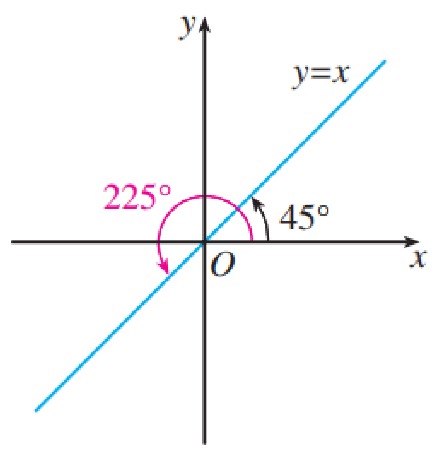


图 5.1-8

因此,终边在直线$y=x$上的角的集合

$S=\{\beta \mid \beta=45°+k\cdot 360°, k\in Z\}$

$\cup\{\beta \mid \beta=225°+k\cdot 360°, k\in Z\}$

$=\{\beta \mid \beta=45°+n\cdot 180°, n\in Z\}$

学习新知

S中适合不等式$-360° \leq \beta \leq 720°$的元素$\beta$有

$45° - 2 \times 180° = -315°$,

$45° - 1 \times 180° = -135°$,

$45° + 0 \times 180° = 45°$,

$45° + 1 \times 180° = 225°$,

$45° + 2 \times 180° = 405°$,

$45° + 3 \times 180° = 585°$

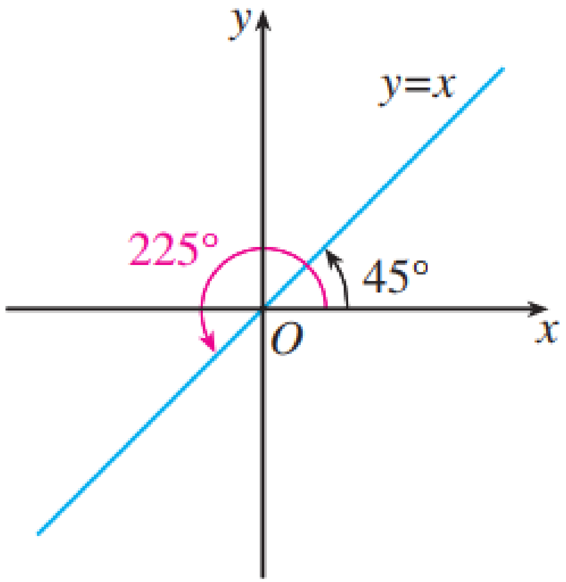


图 5.1-8

学习新知

【变式】(多选)下列四个角中，属于第二象限角的是(　　)

A．$160°$　　B．$480°$

C．$-960°$　　D．$1\ 530°$

答案　ABC

解析　A 中，$160°$很显然是第二象限角；

B 中，$480°=120°+360°$，是第二象限角；

C 中，$-960°=-3\times360°+120°$，是第二象限角；

D 中，$1\ 530°=4\times360°+90°$，不是第二象限角．

反思感悟　正确理解象限角与锐角、直角、钝角、平角、周角等概念的关系，需要掌握判断结论正确与否的技巧，判断结论正确需要证明，而判断结论不正确只需举一个反例即可．

03 题型强化训练

能力提升

题型一　任意角的概念

【练习 1】 经过 2 个小时，钟表上的时针旋转形成的角为(　　)

A．60°　　B．－60°　　C．30°　　D．－30°

【答案】 B

【解析】 钟表的时针旋转一周形成的角是－360°，

其中每小时旋转形成的角是$-\dfrac{360°}{12}=-30°$，

所以经过 2 个小时旋转形成的角是－60°.故选 B.

【感悟提升】判断角的概念问题的策略

(1)正确理解任意角与锐角、直角、钝角、平角、周角等概念，严格辨析它们之间的联系与区别.

(2)弄清角的始边与终边及旋转方向与大小，“旋转方向”决定角的“正负”，“旋转幅度”决定角的“绝对值大小”.

(3)判断命题为真需要证明，而判断命题为假只要举出反例即可.